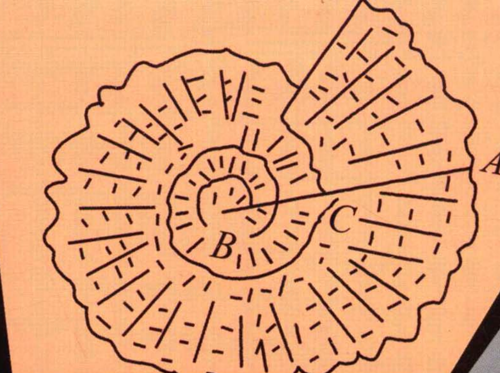
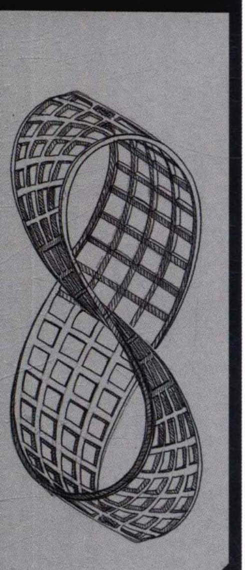


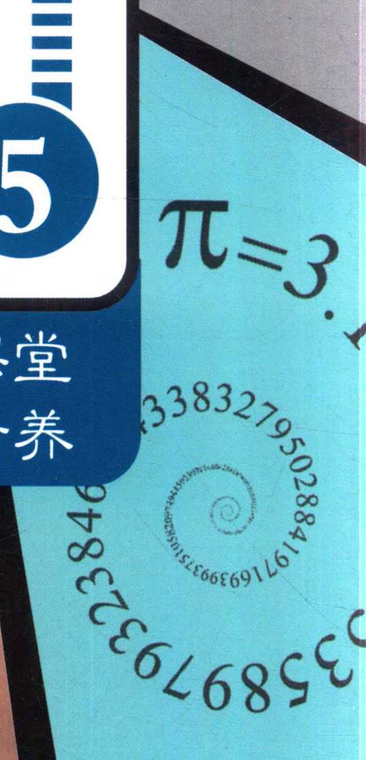
学科阅读推广工程

数学来了 5

颜峰 主编



以阅读体味数学课堂
用阅读提升学科素养



山东城市出版传媒集团·济南出版社


数学来了
5

学科阅读推广工程

数学来了 5

颜峰 主编

副 主 编：杨 军 安志军 陈 杰
分册主编：陈 杰
编 者：梁艳丽 王丽丽 魏秀华
周 静 姜永东 宋丽丽
刘润军

山东城市出版传媒集团·济南出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学来了.5／颜峰主编. —济南：济南出版社，2018.1

ISBN 978-7-5488-2956-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①颜… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第006299号

出版人　崔　刚
项目策划　周家亮
责任编辑　张雪丽　李　晨
封面设计　胡大伟
出版发行　济南出版社
地　　址　山东省济南市二环南路1号(250002)
发行热线　0531-86922073(省内)　0531-67817923(省外)
印　　刷　肥城新华印刷有限公司
版　　次　2018年1月第1版
印　　次　2018年3月第1次印刷
成品尺寸　170 mm×240 mm　16开
印　　张　8.75
字　　数　125千字
定　　价　30.00元

打开数学世界的一扇窗

数学是科学的语言，是一切科学和技术的基础，它渗透于人类生活的各个领域，是人类思考和解决问题的工具，影响着人类对世界及自身的看法。

数学有自己的灵魂，绝不只是简单的数学概念、数学定义、数学公式和数学计算。它赋予它所发现的真理以生命，它唤起心神、澄清智慧。它让我们形成“数学方式”的理性思维，从数学的角度看问题，培养起理性思维的习惯和严密求证的精神，提高逻辑推理的能力和准确表达的意识，以及多角度思考与解决问题的素养。我们从数学中汲取的逻辑思维与理性精神，会深深铭刻在我们的头脑中，使我们在思考问题时全面而深刻，在做事时清晰而逻辑。

通过阅读构建起数学思维与数学素养，是我们编写《数学来了》这一套学科读物的目标。以阅读体味数学课堂，用阅读提升学科素养，这与当前盛行的学科阅读概念不谋而合。因此，我们立足课程，以教材为起点，结合教学进度适当扩充阅读文本，旨在拉近课堂与课外的距离，拉近阅读与学习的距离，使学生开阔知识视野、完善认知结构、提升思维能力，形成对课程的深度学习。书中的每一篇阅读文本，都是数学教学内容的精华和延伸，以打开一扇窗，提供一个全新视角，引领你去揣摩千姿百态的因式分解，赞叹数学对称之美，感触古今中外数学的算法神韵，领会数学知识与社会生活的联系……从而进入丰富多彩的数学殿堂。

我们相信，通过阅读，你们会发现，数学并不是枯燥定义的累积，也不是

烦琐公式的堆砌。我们更加相信，你们会对数学产生前所未有的兴趣和热情，从而改变学习数学的态度，提高学习数学的效率。正如诺瓦列斯所说："纯数学是魔术家真正的魔杖。"希望你们人人都能用这根称手的数学魔杖，在知识的海洋里尽情挥洒！

目 录

一　寻找一元二次方程的解法

人类文明的起源，与数学有着千丝万缕的联系。世界公认的五大古文明（古埃及、古巴比伦、古印度、古中国、古希腊）都拥有悠久的数学历史文化。其中，古巴比伦数学的发展极具特色。

19 世纪上半叶，考古学家在美索不达米亚地区挖掘出大约 50 万块刻有楔形文字的泥板书。这些泥板书跨越巴比伦历史许多时期，其中有 300 多块载有数字表和一些数学问题。现在人们对古巴比伦文明和数学的认识无论是古代的或较近期的，都源自这些原始文献。

图 1-1　泥板书

一块古巴比伦泥板书上记载了这样一个问题：正方形的面积与边长之和为$\frac{3}{4}$，求正方形的边长。你知道古巴比伦人是怎么计算出正方形边长的吗？

数学探秘

一元二次方程的解法

一元二次方程是指含有一个未知数且未知数的最高次项是二次的整式方程。上文所述古巴比伦泥板书中出现的代数问题，相当于求解一元二次方程。

一、一元二次方程的几何解法

从古巴比伦、古希腊、古代中国，到中世纪的阿拉伯，几何解法一直是人们求解一元二次方程的主要方法。几何解法的基础是几何的正方形和矩形这些概念，而不是算术上的平方和乘积的概念。下面，我们用几何解法来解泥板书上的一元二次方程：

设正方形的边长为 x，根据题目可以列出一元二次方程 $x^2+x=\frac{3}{4}$。原方程可变形为 $x(x+1)=\frac{3}{4}$。利用几何割补法解一元二次方程，如图

1-2、1-3和1-4所示。

如图1-2，根据方程 $x(x+1)=\frac{3}{4}$，构造长为 $(x+1)$、宽为 x、面积等于 $\frac{3}{4}$ 的矩形。

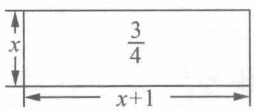


图1-2

如图1-3，将矩形分割成一个边长为 x 的正方形和两个相同的小矩形，再将其中一个小矩形粘到正方形的顶边。

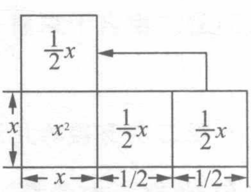


图1-3

如图1-4，在割补后图形的右上角补一个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方形，得到一个边长为 $(x+\frac{1}{2})$，面积为 $\frac{3}{4}+(\frac{1}{2})^2$ 的正方形。

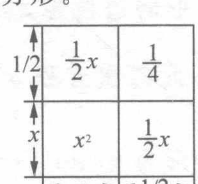


图1-4

由此可得大正方形面积的表达式为 $(x+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}+(\frac{1}{2})^2$，即大正方形的边长为 $x+\frac{1}{2}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$，解得 $x=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$。

这一解法相当于将方程 $x^2+px=q$ 的系数代入公式 $x=\sqrt{(\frac{p}{2})^2+q}-\frac{p}{2}$ 求解。

说明：(1)古巴比伦人没有负数的概念，对二次方程的负根不予考虑。

(2)上述的几何解法只给出了方程的一个根，现在我们知道了负数的存在，便可求出这个方程的另外一个根，即 $x=-\sqrt{(\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$。

(3)几何解法解一元二次方程的本质是构造正方形，在原图形的基础上添加边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方形，得到面积为 $(x+\frac{1}{2})^2$ 的大正方形。由图1-4我们还可得出正方形面积的一个表达式 $x^2+2\times\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2})^2=(x+\frac{1}{2})^2$，即

从“数”和“形”上体现了配方法的本质：加上的常数项是一次项系数的一半的平方。

二、一元二次方程的代数解法

一元二次方程的基本解法有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法等。下面，我们来看一看如何合理地选择解法。

1. 直接开平方法

直接开平方法是用直接开平方求解一元二次方程的方法，主要适用于没有一次项的一元二次方程。

根据平方根的定义，把形如$(ax+c)^2=d(d\geqslant 0,a\neq 0)$的一元二次方程“化归”为两个一元一次方程，即$ax+c=\pm\sqrt{d}$（若$d<0$，则方程无解）。

【例 1】解方程：$(x+1)^2=25$。

分析：方程左边是完全平方式，右边是非负数，适宜用直接开平方法。即$x+1=\pm 5$，解得$x_1=4,x_2=-6$。

2. 配方法

配方法是一种把二次多项式化为一个一次多项式的平方与一个常数的和的方法。

通过配方，将形如$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的一元二次方程化为形如$(x+m)^2=n$的方程，再用直接开平方法求解。

【例 2】解方程：$2x^2-8x=17$。

分析：先将二次项系数化为“1”，即$x^2-4x=\frac{17}{2}$。此时，一次项系数为偶数，宜用配方法。即$(x-2)^2=\frac{25}{2}$，解得$x_1=2+\frac{5\sqrt{2}}{2},x_2=2-\frac{5\sqrt{2}}{2}$。

3. 公式法

公式法是用求根公式解一元二次方程的方法，可以避免配方过程而直接得出根。

利用公式法求解一元二次方程，需要先将一元二次方程整理为一般式$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，再根据求根公式$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$来求解。

求根公式中的被开方数b^2-4ac，叫作一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根的判别式，通常用“Δ”表示。

当$\Delta>0$时，方程有两个不相等的实数根；

当$\Delta=0$时，方程有两个相等的实数根，且$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$；

当$\Delta<0$时，方程没有实数根。

【例 3】解方程：$3x^2-5x+1=0$。

分析：公式法是一元二次方程的通用解法。用公式法解一元二次方程

时，先用 Δ 判断方程有无实数根。本题解得 $\Delta=13>0$，利用求根公式，解得 $x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{6}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$。

4. 因式分解法

通过因式分解将一元二次方程化为两个一次因式的乘积等于 0 的形式，再使这两个一次因式分别等于 0，从而实现"降次"，这种解一元二次方程的方法称为因式分解法。

如果形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一元二次方程经过因式分解能化为 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=0$ 的形式，得到两个一元一次方程 $a_1x+c_1=0$ 或 $a_2x+c_2=0$，即可求得原方程的解。化归的理论依据：由 $A\cdot B=0$ 可以推断出 $A=0$ 或 $B=0$。

因式分解法有提公因式法、公式法、十字相乘法等。下面，我们来介绍一下十字相乘法。

十字相乘法一般以二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 为分解对象。利用十字交叉分解系数，关键是把二次项的系数 a 分解为 a_1，a_2 的积，把常数项 c 分解为 c_1，c_2 的积，且使 $a_2c_1+a_1c_2$ 正好等于一次项系数 b。如图 1-5，将二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 因式分解：$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$。

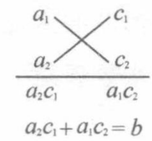


图 1-5　十字相乘法

用十字相乘法进行因式分解时，往往需要多次试验，还要注意各项系数的符号。

【例 4】解方程：$3x^2-4x=0$。

分析： 提取公因式 x，得 $x(3x-4)=0$，即 $x_1=0$，$x_2=\frac{4}{3}$。

【例 5】解方程：$(2x+1)^2-(x+4)^2=0$。

分析： 两项都是平方的形式，可以用直接开平方法，也可以利用平方差公式进行化简，即 $(2x+1+x+4)(2x+1-x-4)=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=-\frac{5}{3}$。

【例 6】解方程：$2x^2+3x-5=0$。

分析： 可以用公式法，更简单的方法是十字相乘法。

图 1-6 给出了将二次三项式 $2x^2$

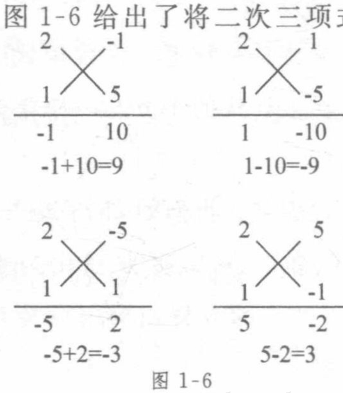


图 1-6

$+3x-5$ 分解因式的“试误”的过程，可以得到 $2x^2+3x-5=(2x+5)(x-1)$。

由此可知，将方程 $2x^2+3x-5=0$ 因式分解，可得 $(2x+5)(x-1)=0$，解得 $x_1=-\dfrac{5}{2}$，$x_2=1$。

说明：方程的结构千变万化，在解一元二次方程时，选择方法上应先“特殊”（直接开平方法、因式分解法）后“一般”（公式法、配方法）。

三、字母系数 a,b,c 与方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 根的关系

1. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的情况可由 $\Delta=b^2-4ac$ 来判定，有时也可以用 a，b，c 的符号加以判断。若 a，c 异号，则 $\Delta=b^2-4ac>0$，方程一定有两个不相等的实数根。

2. 在字母系数中，若 $b=0$，得到形如 $ax^2+c=0(a\neq0)$ 的一元二次方程，移项得 $ax^2=-c(a\neq0)$。若 $c>0$，则方程无实数根；若 $c<0$，用直接开平方法求解，方程的两个实数根互为相反数；若 $c=0$，即 $ax^2=0(a\neq0)$，则方程的两个实数根都等于 0。

3. 在字母系数中，若 $c=0$，得到形如 $ax^2+bx=0(a\neq0)$ 的一元二次方程，提公因式，得 $x(ax+b)=0(a\neq0)$，则方程必有一个解为 0。

四、$\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 一定无根吗？

利用求根公式解一元二次方程 $5x^2+4x+4=0$，其中 $a=5,b=4,c=4$，把它们代入 b^2-4ac，Δ 居然是 -64。$\sqrt{-64}$ 在实数范围内无意义，那么该方程一定无根吗？

在接触复数的概念之前，“负数没有平方根”这个结论在中学生的头脑中根深蒂固，但虚数的引入彻底打破了这一规则。

到高中阶段，我们可以学到 -64 的平方根为 $-64=\pm8\mathrm{i}$。这个小写字母 i 代表虚数单位。这样，一元二次方程 $5x^2+4x+4=0$ 有一组虚数根 $x=\dfrac{-4\pm8\mathrm{i}}{10}$，即 $x_1=\dfrac{-2+4\mathrm{i}}{5}$，$x_2=\dfrac{-2-4\mathrm{i}}{5}$。

现阶段所解的一元二次方程仅限于实系数，且一元二次方程有实数根，即判别式大于或等于零。学习了复数以后，我们对一元二次方程解的认识就更深、更完整了。

数学应用

一元二次方程的解题思想

代数法解一元二次方程的基本思

想是“化归”，通过“降次”将它“化归”为两个一元一次方程。下面，我们继续寻找一元二次方程的解题思想。

一、整体思想

【例 1】已知 $x=1$ 是一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根，求代数式 $a^2+b^2+2ab+2$ 的值。

分析： 把 $x=1$ 代入一元二次方程，求得 $a+b=-1$；然后把 $a+b=-1$ 整体代入代数式 $a^2+b^2+2ab+2$，即得 $a^2+b^2+2ab+2=(a+b)^2+2=(-1)^2+2=3$。

二、转化思想

【例 2】解方程：$(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$。

分析： 这个方程不是一元二次方程，我们可以将 x^2-1 看作一个整体。设 $x^2-1=y$，则原方程可转化为关于 y 的一元二次方程 $y^2-5y+4=0$，解得 $y_1=1, y_2=4$。由此得到两个一元二次方程 $x^2-1=1$ 和 $x^2-1=4$，解这两个一元二次方程，得到原方程的解 $x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2}, x_3=\sqrt{5}, x_4=-\sqrt{5}$。

三、分类讨论思想

【例 3】当 k 为何值时，方程 $(k^2-1)x^2+2(k+1)x+1=0$ 有实数根？

分析： 本题只说方程，没有说是一次方程还是二次方程，故应该分情况讨论。当 $k^2-1=0$ 时，该方程为一元一次方程；当 $k^2-1\neq 0$ 时，该方程为一元二次方程。

解答： (1)当 $k^2-1=0$ 时，$k=\pm 1$，将其分别代入原方程：

①当 $k=1$ 时，原方程为 $4x+1=0$，有一个实数根；

②当 $k=-1$ 时，原方程为 $1=0$，无解。

(2)当 $k^2-1\neq 0$ 时，

得 $\begin{cases} k^2-1\neq 0, \\ \Delta=4(k+1)^2-4(k^2-1)\geqslant 0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} k\neq \pm 1, \\ k\geqslant -1. \end{cases}$

∴当 $k>-1$ 且 $k\neq 1$ 时，原方程有实数根。

综上可知，当 $k>-1$ 时，原方程有实数根。

四、数形结合思想

几何图形法求解一元二次方程 $x^2+x=\frac{3}{4}$ 体现了数形结合的思想。对于一元二次方程，三国时期的中国数学家赵爽也研究过其几何解法。以一元二次方程 $x^2+2x=35$ 为例加以

说明，如图 1-7 所示。

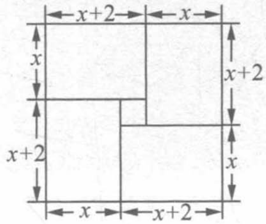


图 1-7

分析：(1)一元二次方程 $x^2+2x=35$ 可变形为 $x(x+2)=35$。

(2)用 4 个长为 $(x+2)$、宽为 x、面积为 35 的矩形和一个边长为 2 的正方形构造一个大正方形，则大正方形的面积为 $35\times4+2^2$。

(3)图中大正方形的面积还可以表示为 $(x+x+2)^2$，则 $(x+x+2)^2=35\times4+2^2$，解得 $x_1=x_2=5$。

同学们还可以试着用几何解法解方程 $x^2+bx=c$。

数学文化

一元二次方程的研究

在历史上，一元二次方程曾是代数学的中心问题之一，对它的研究也是人们扩张数域的动力因素之一。古埃及、古巴比伦、古代中国、古印度、古希腊等国家的数学文献中都含有一元二次方程的问题。

一、古巴比伦

古巴比伦人的代数知识比较丰富，许多泥板书中载有一次和二次方程的问题。早期巴比伦代数的一个基本问题，是求出一个数，使它与它的倒数之和等于已知数，由此可以得出一个二次方程。一元二次方程及其解法最早出现在公元前 2000 年左右的古巴比伦，主要研究 $x^2+bx=c$，$x^2=bx+c$（字母都是正数）这两种类型的方程，并且给出了完整的算法。他们解决一元二次方程问题的过程与现代用公式解这类方程的过程一致，但他们只求正根。有趣的是，对于有两个正根的形如 $x^2+c=bx$ 的方程，也被古巴比伦人忽略了。尽管能把方程写成这种形式的问题的确存在，但单个方程能使同一未知量获得两个不同的值，是古巴比伦人始料未及的。方程 $x^2+c=bx$ 只在 $(\frac{b}{2})^2=c$ 这个唯一特殊的情况下求解过，因为在这种情形下方程只有一个解。此外，他们还讨论了某些三次方程和含多个未知量的一次方程组的问题。

泥板书中的“方程”是用语言表述的，偶尔用记号表示未知量。

图 1-8　古巴比伦泥板书

二、古埃及

非洲东北部的尼罗河流域，是人类文明的发祥地之一。生活在尼罗河两岸的埃及人在长期的生产实践和与自然斗争的过程中，积累了丰富的数学知识。但是，现存的古埃及文献并不多，目前对古埃及数学的了解，主要源自两种用僧侣文写成的纸草书。一种称为“莫斯科纸草书”，由俄罗斯收藏者于 1893 年购得，现收藏于莫斯科普希金造型艺术博物馆；另一种称为“莱因德纸草书”，由英国收藏者于 1858 年购得，现收藏于伦敦大英博物馆。

纸草书里含有数学问题和解答，从中我们可以看出，古埃及人已经能解决一些属于一次方程和最简单的二次方程的问题，还有一些关于等差数列和等比数列的计算问题。

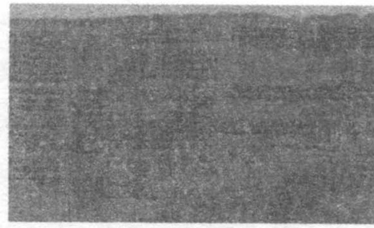


图 1-9　莱因德纸草书

古埃及人需要计算尼罗河每年因泛滥而流失或者增加的土地面积，对土地重新进行分配，在实际的需要中产生了几何学。在纸草书中，我们发现许多结合农业建筑和土地大小，求面积或体积的几何问题，而二次方程的出现源于解决面积的相关问题，如古埃及纸草书中“已知长方形面积以及长和宽之比，求长和宽”的问题。

三、古希腊

古希腊文明是人类历史上最宏伟的文明之一，对现代西方文化的发展影响极大。尽管西方文明认为希腊在文学、艺术和建筑方面没有突出的贡献，但广义地说，作为现代数学的基

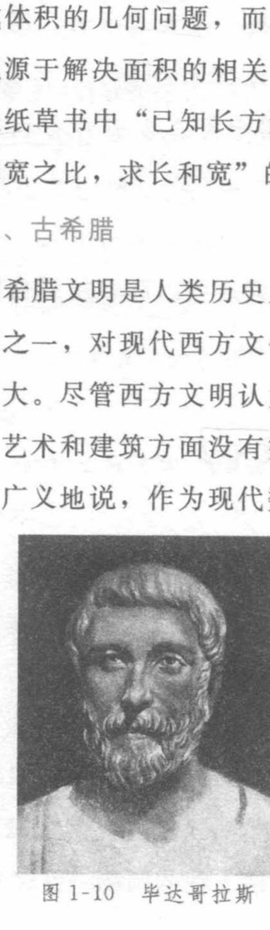


图 1-10　毕达哥拉斯

础和现代技术文明的基石的数学证明思想却归功于希腊。

古希腊人对一元二次方程的研究，最早可以追溯到毕达哥拉斯学派。毕达哥拉斯学派以发现勾股定理闻名于世，并由此导致不可公度量（不可通约量）的发现。这一发现迫使毕达哥拉斯学派放弃他们“万物皆数”的基本哲学，是整个数学史上一项重大的发现。事实上，如果正方形的边长为1，那么它的对角线的长就是一元二次方程 $x^2=2$ 的一个根，该问题的出现是古希腊人研究二次方程的根源。

古希腊数学家丢番图的代表作《算术》是一部脱离几何形式的代数著作，其中提到了一元二次方程的问题。在古希腊数学家欧几里得的著作《几何原本》中，含有二次方程的几何解法。


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS

图 1-11　《算术》

古希腊人对数学似乎有特别大的兴趣，尤其是在几何学方面。这在一定程度上应当归功于毕达哥拉斯和柏拉图，他们都是数学的崇拜者和鼓吹者。据说，在柏拉图创办的学园门口用希腊语刻着一句铭文，大意是“不懂几何者不得入内”。由此可见，数学在柏拉图学派中占据了重要的地位。

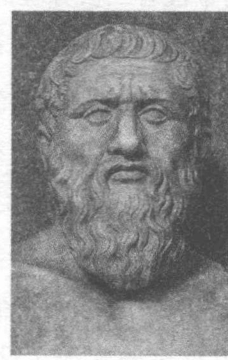


图 1-12　柏拉图

四、古代中国

中国在数千年前已经有了高度的文化。和其他古国一样，由于农业、畜牧业生产的需要，逐渐有了数学。中国数学家精于求解多种代数问题，许多方法起源于对几何问题的思考，后来演变为纯粹的代数程序。

一元二次方程是古代中国数学家研究的课题之一，在《九章算术》《孙子算经》《周髀算经》《杨辉算法》等著作中均有涉及。

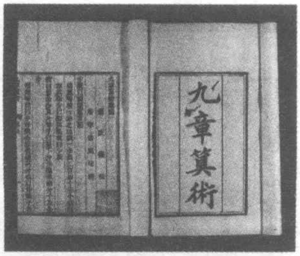


图 1-13 《九章算术》

在数学专著《九章算术》中，详细讨论了求解完全平方方程的一般解法，还举出了混合二次方程的例子。

古代数学家赵爽在注《周髀算经》时所作的《勾股圆方图注》中有这样一段话："以差实减弦实，半其余，以差为从法，开方除之，复得勾矣。"

利用现代符号形式，我们很容易得到与之相对应的式子。设勾为 a，股为 b，弦为 c，$b-a$ 为勾股差，可得下列方程式：$a^2+(b-a)a=\frac{c^2-(b-a)^2}{2}$，解方程便可求得 a。此阶段具体代数演算过程无法表现，只能以图形关系来体现。

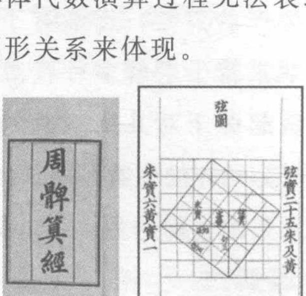


图 1-14 《周髀算经》与赵爽弦图

在秦九韶所著《数学九章》(1247) 中，中国数学家已掌握了形如 $x^2\pm px\pm q=0(p,q>0)$ 的二次方程的解法。秦九韶系统地总结和发展了高次方程数值解法和一次同余组解法，提出了相当完备的"正负开方术"和"大衍求一术"，达到了当时世界数学的最高水平。

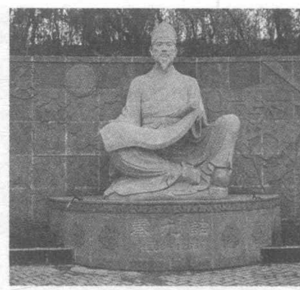


图 1-15 秦九韶塑像

在数学家杨辉现存的著作《详解九章算法》(1261) 和《杨辉算法》中，包含二次方程的内容。杨辉详细地给出了解二次方程的方法，也用含有正方形和矩形的几何图示来说明所用的各种数值方法。

图 1-16 杨 辉