Matroid 理论及应用

（二）

马仲蕃　刘振宏

中国科学院数学所

1978.10.

目　录

§1 引言

在第一部分中，我们介绍了拟阵的基本性质和它在组合最优化问题中的应用。求最大权独立集的Greedy算法是组合最优化方法中最简单的一个方法。对两个拟阵 $M_1=(E,\mathcal{J}_1)$，$M_2=(E,\mathcal{J}_2)$ 及权函数 $w(e)$，求：

$$\max\left\{\sum_{e\in I} w(e) \,\middle|\, I\in \mathcal{J}_1\cap \mathcal{J}_2\right\}$$

的问题就是所谓最大权交问题。这一部分主要介绍对这问题的有效算法。

求拟阵交的算法类似于偶图对集的交错链方法，在第3节中，将引进有关拟阵的交错链定义，第4节叙述求"基数"最大交的算法，同时也建立了拟阵交的对偶定理。它是偶图对集中König－Egervary定理的推广。

对最大权交问题，我们将介绍一个原始一对偶算法。以它作为理论根据，最后介绍了原始方法。

§2. 拟阵交的例子

最"

让我们先看一些拟阵交的例子

偶图对集

设 $G=(S,T,A)$ 是一偶图。让 π_1 表示边集合 A 的如下一个剖分：两条边，当且仅当关联于 S 中同一点时，分到同一部分。类似地，让 π_2 表示由T中点的关联关系所确定的剖分。让 $M_1=(A,\mathcal{J}_1)$。$M_2=(A,\mathcal{J}_2)$ 表示由剖分 π_1，π_2 所确定的两剖分拟阵。则子集 $I\subseteq A$，为图 G 的一对

集的充要条件为 $I \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$。

矩阵的拟阵交

设C 是 $m \times n$ 矩阵，画一水平线，横穿过矩阵 C，使得有 m_1 行在线的上面，有 m_2 行在线的下面。对一矩阵的列的子集，假如线上的线下的部分分别都线性独立，则称此列的的子集线性独立。任何这样的列的独立子集，便是两个矩阵拟阵的交。

公共代表系

一集合，若它是两子集簇中每一个的不同代表系，则称其为两子集簇的公共代表系。显然，计标公共代表系的问题，便是求两个代表系型拟阵交的问题。

定向支撑树

让 $G=(N, A)$ 为一定向图。每一弧有一长度。一弧的子集I，若是定向支撑树，则必须满足如下两条件：第一，I 不包含圈。因此 I是图型拟阵的独立集（这里不考虑弧的方向）。第二，对每一点，I 中最多含有一条入弧。因此，I 是一剖分拟阵（将指向同一点的弧剖分到同一部分）的独立集。定向支撑树便是上述两拟阵的含有 $n-1$ 个元素的交（其中 n 为图的点数）。而最小定向支撑树便是含有 $n-1$ 个元素的最小权交。

货郎问题

在给定的图 G 中，要求 *Hamiltonian* 回路。先增加一个点 $n+1$，将每一指向点 1 的弧改为指向 $n+1$，则 *Hamiltanian* 回路等价于從 1 到 $n+1$ 的 *Hamiltonian* 路。

在增加了点 $n+1$ 后的图中，让 M_1 表示图型拟阵；M_2 表示一剖分拟阵，在它的独立集中，对图中任何点，最多包含一条入弧。M_3 表示另一剖分拟阵，在它的独立集中，对图中每一点，最多包含一个出弧。那末，Hamitonian 回路就等价于 M_1，M_2，M_3 的含有 n 个元素的交。

因此，货郎问题可以形成为 M_1，M_2，M_3 的带权交问题。不幸得很，对三个或三个以上的拟阵交问题，现在还不知道是否有好的算法。

§3 交错序列

偶图对集算法实际上就是两个剖分拟阵交的算法，这一算法，可以推广到求任意两个拟阵的交，首先，我们需要推广交错链的概念。

对拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$，让 SP 表示 M 的支撑映象，设 I 为 M 的一独立集。对 $e_i\in E\setminus I$，若 $I+e_i\notin\mathscr{I}$，即 $e_i\in SP(I)$，则让 C_i 表示 $I+e_i$ 中的唯一的圈。设 $S=(e_1, e_2, \cdots e_{2p})$，是不同元素的序列，若满足条件：

(i) 对任何奇数 i，有 $e_i\in E\setminus I$，$e_{i+1}\in I$，而 $e_i\in SP(I)$

(ii) 对任何奇数 i，有 $e_{i+1}\in C_i$；而对任何奇数 $k>i$，则有 $e_{i+1}\notin C_k$，则我们有如下性质：

引理一：$I\triangle S\in\mathscr{I}$，且 $SP(I\triangle S)=SP(I)$.

（其中"$\triangle$"表示对称差算子）

证明：对任何偶数 $i\leqslant 2p$，定义：

$S_i=(e_1, e_2, \cdots e_i)$。显然有 $I\triangle S_2\in\mathscr{I}$，且

$SP(I\triangle S_2)=SP(I)$，现设 $I\triangle S_{i-2}\in\mathscr{I}$，且 $SP(I\triangle S_{i-2})=SP(I)$。则由假设（ii），可推得：$C_{i-1}\subseteq(I\triangle S_{i-2})+e_{i-1}$，因此，$I\triangle S_i=[(I\triangle S_{i-2})+e_{i-1}]-e_i\in\mathscr{I}$，且 $SP(I\triangle S_i)=SP(I)$。这就归纳地证明了引理。

设 $M_1=(E,\mathscr{I}_1)$，$M_2=(E,\mathscr{I}_2)$ 是两给定的拟阵。SP_1，SP_2 是 M_1，M_2 的支撑映象。设 I 是 M_1，M_2 的任一交。$S=(e_1,e_2,\cdots e_s)$ 是不同元素的序列；对偶数 i，有 $e_i\in I$。对奇数 i，有 $e_i\in E\backslash I$。若 $I+e_i\notin\mathscr{I}_1$，则让 $C_i^{(1)}$ 表示 $I+e_i$ 中关于 M_1 的唯一的圈。若 $I+e_i\notin\mathscr{I}_2$，则让 $C_i^{(2)}$ 表示 $I+e_i$ 中关于 M_2 的圈。序列 S，若满足下述条件，则称 S 为关于 I 的交错序列：

(a) $s=|S|$ 为奇数，$I+e_1\in\mathscr{I}_1$，$I+e_s\in\mathscr{I}_2$，对任何其余的奇数 j $(1<j<s)$，$I+e_j$ 中既含圈 $C_j^{(1)}$，也含圈 $C_j^{(2)}$。

(b) 对所有的奇数 $j<s$，有 $e_{j+1}\in C_j^{(2)}$

对所有的奇数 $j>1$，有 $e_{j-1}\in C_j^{(1)}$

(c) 对元素 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{s-1}\}$，可重新排列成如下形式：$\{e_{j_1},e_{j_1+1},e_{j_2}e_{j_2+1},\cdots,e_{j_r}e_{j_r+1}\}$（其中所有的 j_k 皆为奇数），使得：当 $k<h$ 时，$e_{j_k+1}\notin C_{j_h}^{(2)}$。

(D) 对元素 $\{e_2, e_3, \cdots e_s\}$ 可重新排列如下：

$\{e_{i_1} e_{i_1+1}, e_{i_2} e_{i_2+1}, \cdots, e_{i_r} e_{i_r+1}\}$（其中所有的 i_k 皆为偶数），使得：当 $k < h$ 时 $e_{i_k} \notin C^{(1)}_{i_h+1}$.

引理二．若 S 是关于交 I 的交错序列，则

$$I \triangle S \in \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$$

证明：对 M_2 的独立集 I，序列 $\tilde{S} = (e_{j_1} e_{j_1+1}, e_{j_2} e_{j_2+1} \cdots$
$\cdots e_{j_r} e_{j_r+1})$ 满足引理一中的条件（i）和（ii），因此，$I \triangle \tilde{S} \in \mathcal{J}_2$ 且 $SP_2(I \triangle \tilde{S}) = SP_2(I)$。又由 $I + e_s \in \mathcal{J}_2$ 则得 $I \triangle S = (I \triangle \tilde{S}) + e_s \in \mathcal{J}_2$。对 M_1 的独立集 I，序列 $\bar{S} = (e_{i_1+1}, e_{i_1}, e_{i_2+1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r+1}, e_{i_r})$ 满足引理一中的条件（i）和（ii），因此 $I \triangle \bar{S} \in \mathcal{J}_1$ 且 $SP_1(I \triangle \bar{S}) = SP_1(I)$。又由 $I + e_1 \in \mathcal{J}_1$，则得：$I \triangle S = (I \triangle \bar{S}) + e_1 \in \mathcal{J}_1$．

引理证毕。

§4. 基数交算法

对给定的交 I，构造偶图 $G_I(E \setminus I, I, A)$：对点 $e_i \in E \setminus I$，若存在 $C^{(2)}_i$，则对每一元素 $e_j \in (C^{(2)}_i \setminus e_i)$，作定向弧 (e_i, e_j)；若存在 $C^{(1)}_i$，则对每一元素 $e_j \in (C^{(1)}_i \setminus e_i)$，作定向弧 (e_j, e_i)。点 $e_i \in E \setminus I$，若 $I + e_i \in \mathcal{J}_1$（即偶图 G_I 中入次为零），则称其为"发点"；若 $I + e_i \in \mathcal{J}_2$

（即出次为零），则称其为"收点"。

不难验证，任何从其发点到其收点的定向最短（弧数最少）路便是一交序列。下面我们将要介绍的基数交标法，完全相当于在图 G_I 中寻找从发点到收点的路的标号标法。

现在，我们叙述构成交错序列的标号过程。开始，将 $E-SP_1(I)$ 中的每一元素都标以 Φ^+，（若不存在，则显然 I 已是基数最大交）。符号"Φ"，标缀任何交序列的第一个元素，"+"标缀要加到 I 的元素，"—"标缀要从 I 中减去的元素。随着"检查"各已标号的元素，其他元素也渐々得到了标号。当检查某标有"+"的元素 e_i 时，首先判别 $I+e_i$ 是否为 M_2 的独立集，若是，则已找到了一个以 e_i 为终点的交错序列，从而可使交的元素个数增加一。若 $I+e_i \in \mathscr{I}_2$，则对 $C_i^{(2)}$ 中每一未标号的元素，都标以"i—"。当检查每标有"—"的元素 e_i 时，对每一元素 e_j，使得 $e_i \in C_j^{(1)}$，且还未标号的都标以"i+"。

标号过程终止时，或者已发现交错序列，或者已无元素可继续标号，但还未发现交错序列。对每个交错序列，我们可通过对标号追踪返回来得到。例如，若最终的元素 e_i 的标号为"j+"，那末倒数第二个元素为 e_j。若 e_j 的标号为"k—"，那末序列的倒数第三个元素为 e_k，等々。当标号终止时，未发现交错序列，则我们将在下一节中证明已获基数最大交。

<u>基数交换法</u>

步骤 0（开始）

让 I 是任一 M_1 和 M_2 的交。可能为空集。所有元素都未

标号。

步骤1（标号）

1.0. 对每一元素 $e_i \in E \setminus I$，找出 $C_i^{(1)}$，$C_i^{(2)}$，（假如存在的话）。对每一元素 $e_i \in E - SP_1(I)$，都标以"Φ+"。

1.1，若所有已标号的元素都经过了"检查"，则转到步骤3。否则，可找到一已标号但未检查的元素 e_i，若 e_i 的标号为"+"，则转到步骤1.2；若 e_i 的标号为"−"，则转到步骤1.3。

1.2. 检查带有标号"+"的 e_i.

若 $I + e_i \in \mathcal{J}_2$，则转到步骤2，否则对 $C_i^{(2)}$ 中每一未标号的元素，都标以"$i-$"，然后转到步骤1.1。

1.3. 检查带有标号"−"的 e_i

对每一使得 $e_i \in C_j^{(1)}$ 的，且未曾标号的 e_j，都标以"$i+$"，然后转到步骤1.1.

步骤2.（增广交）

以 e_i（发现在步骤1.2中）为最后元素的交错序列 S 可通过追踪返回找出。用 $I \triangle S$ 代替原来的 I，抹掉所有的标号，转到步骤1.0.

步骤3（得交错标号树）

无交错序列，I是基数最大交，步骤终止。

§5. 对偶理论

若 E_1，E_2 是 E 的一对子集，使得：

$E_1 \cup E_2 = E$，则称 E_1，E_2 为 E 的一<u>复盖</u>，记作 $\mathcal{E}=(E_1, E_2)$。对于给定的拟阵 M_1，M_2，设其秩函数分别为 r_1，r_2。我们定义：

$$r(\mathcal{E}) = r_1(E_1) + r_2(E_2)$$

称为复盖 $\mathcal{E}=(E_1, E_2)$ 的<u>秩</u>。

<u>定理 5.1</u>　对任何复盖 $\mathcal{E}$，和任何交 I，有 $r(\mathcal{E}) \geq |I|$。

证明：设 $I_1 = I \cap E_1$，$I_2 = I \cap (E_2 \setminus E_1)$，则

$$|I_1| \leq r_1(E_1),\quad |I_2| \leq r_2(E_2)，因此，$$

$$|I| = |I_1| + |I_2| \leq r(\mathcal{E}).$$

<u>定理 5.2</u>　（拟阵交对偶）

对任何两拟阵 M_1，M_2，交的最大基数等于复盖的最小秩。

即 $$\max_{交 I} |I| = \min_{复盖 \mathcal{E}} r(\mathcal{E})$$

证明：由定理 5.1，复盖的秩不能小于交的基数。然而，由基数交标法，我们可构造出一个秩等于交的基数的复盖。

在标法终止时（即步骤 3），设 I_L 为 I 中所有已标号的元素所成的子集，I_U 为 I 中所有未标号元素所成的子集。则 $E_1 = SP_1(I_U)$，$E_2 = SP_2(I_L)$ 便是我们所希望的复盖。下面，我们证明 $\mathcal{E}=(E_1, E_2)$ 确是一个复盖。设 e 为不属于 $SP_2(I_L)$ 的任一元素，由步骤 1.2 可知，e 必是未标号元素。

若$e\in I$，则$e\in sp_1(I_U)$。若$e\in E\setminus I$，则由e是未标号，必有$e+I\notin \mathcal{I}_1$，因此，存在圈$C_e^{(1)}$，使得$e\in C_e^{(1)}$，且$C_e^{(1)}-e\subseteq I$。由步骤1.3可知，$C_e^{(1)}-e\subseteq I_U$，因为，否则e就可得到标号。因此，$e\in sp_1(I_U)$。这就证明了$\mathcal{E}=(E_1, E_2)$是一复盖。定理证毕。

由定理5.2，我们立即可得如下的推论：

<u>推论5.3</u>　对拟阵M_1，M_2，设I_p，I_{p+1}是分别含有p+$p+1$个元素的交，则存在一关于I_p的交错序列$S\subseteq I_p\triangle I_{p+1}$

<u>推论5.4</u>　一个交是基数最大交的充要条件为无交错序列。

<u>推论5.5</u>　对任一交I，必存在一基数最大交I^*，使得$sp_1(I)\subseteq sp_1(I^*)$，$sp_2(I)\subseteq sp_2(I^*)$，

定理5.2是网络流中的"max flow－min cut"定理，以及König－Egervary定理的推广。

§6　拟阵多面体

为了将带权交问题形成为一个线性规划问题，我们首先考虑一个拟阵$M=(E,\mathcal{I})$的独立集的条件形式。显然，若I是独立集，则

$$|I\cap S|\leqslant r(S) \tag{6.1}$$

对任何子集$S\subseteq E$都成立；（特别是对任何闭子集S都成立，所谓闭子集是指$S=sp(S)$）。

让 A 表示所有闭子集和E中元素之间的关联矩阵。也就是说，A 的每一行 i 对应于拟阵 M 的一个闭子集（至于闭子集的排列次序是可以任意的），A 的每一列 j 对应于元素 e_j。让：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } e_j \text{ 属于闭集 } i\\ 0, & \text{相反}\end{cases}$$

让 $r=(r_1, r_2, \cdots, r_m)^T$ 是一列向量，其中 r_i 是闭集 i 的秩。我们将证明：凸多面体

$$AX \leq r, \qquad X \geq 0$$

的顶点与拟阵 M 的独立集之间，有一一对应关系。这就是说，若 X 是一个顶点，那末，每一分量 x_j 或者为 0，或者为 1；由分量 $x_j=1$ 的元素 e_j 所组成的集合，便是对应于顶点 X 的独立集。

不难验证；系统：

$$AX \leq r, \qquad x_j=0 \text{ 或 } 1$$

的允许解与独立集之间是一一对应的。然而，惊奇的是，当形成为一个线性规划问题时，变量的（0，1）限制可以去掉，线性规划的最优解自动保证了变量的奇数性。

<u>定理 6.1</u>

对任何拟阵 M，由不等式系统：

$$AX \leq r, \qquad X \geq 0$$

所定义的凸多面体的所有顶点，其分量都是奇数。而且顶点和拟阵独立集之间有一一对应关系。

证明：对多面体的任一顶点，我们总可找到一适当的元素

权的集合，使其对应的线性规划问题以此顶点为唯一的最优解。因此，我们只要证明以下的事实就足够了。对任意的元素权集合：$W=(W_1, W_2, \cdots W_n)$，线性规划问题：

$$\max\{Wx \mid Ax \le r,\ x \ge 0\}$$

必有一整数最优解。

对于任何给定的权集合，我们在第一部分中已经看到，利用 Greedy 标法，可以找到一个最大权独立集。即在权为正数的元素中，首先选取具有最大权的元素，然后是次大权的元素，等等，遇到与已选取的元素将构成相关集时，则跳过此元素，继续往后选。假如我们证明了用 Greedy 标法所得到的最大权独立集，是线性规划问题的一个最优解，那末定理也就得证。

对偶线性规划问题为：

$$\min\{ru \mid A^T u \ge W,\ u \ge 0\}$$

保证最优的松紧关系为：

$$x_j > 0 \Longrightarrow (A^T u)_j = W_j$$

$$u_i > 0 \Longrightarrow (Ax)_i = r_i$$

不失一般性，假设用 Greedy 标法所选取的元素为 $e_1, e_2, \cdots, e_K$，而 $W_1 \ge W_2 \ge \cdots \ge W_k$；设 $u_1, u_2, \cdots, u_K$ 为对应于闭集：

$$S_1 = sp(\{e_1\}),\ S_2 = sp(\{e_1, e_2\}),\ \cdots,$$

$$S_K = sp(\{e_1, e_2, \cdots, e_K\}).$$

的对偶变量。我们将证明：

$$\begin{cases} x_j = 1, & (j=1,2,\cdots,k) \\ x_j = 0, & (j=k+1,\cdots n) \end{cases}$$

是一个最优（原始）解。

从"Greedy"算法的性质，显然有：

$$r(S_i) = i = (AX)_i = r_i \quad .$$

因此，对 $i=1,2,\cdots,k$，允许 $u_i>0$。置：

$$u_k = W_k,\quad u_{k-1} = W_{k-1} - u_k \cdots,\quad u_i = W_i - \sum_{l=i+1}^{k} u_l$$

$$\cdots,\ u_1 = W_1 - \sum_{l=2}^{K} u_l, \qquad \text{其余的 } u_j = 0.$$

则根据"Greedy"算法的性质，上述的 u 满足：

$$(A^T u)_j = W_j \qquad (j=1,2,\cdots k)$$

而 $\quad A^T u \geq W.$

因此，用 Greedy 算法所得的最大权独立集确是线性规划问题的一个最优解，这就证明了每一多面体的顶点对应于一独立集。

反之，对每一独立集，我们只要取一适当地元素权集合，使其成为唯一的最大权独立集，因此，它对应于多面体的一顶点。定理证毕。

给定拟阵 $M_1=(E,\mathcal{I}_1)$，$M_2=(E,\mathcal{I}_2)$，让 A，B 分分别表示 M_1，M_2 的闭集关联矩阵。让 r，S 分别表示联系于这两拟阵的秩向量。

<u>定理 6.2</u>（拟阵多面体交的整数性）

多面体：$\{AX \leq r,\ BX \leq S,\ X \geq 0\}$ 的所有顶

点，其分量都是在故。而且，顶点和交之间有一一对应关系。

正如 Greedy 标法提供了定理 6.1 的构造性证明一样，下一节中，将要介绍的代权交标法，也提供了定理 6.2 的构造性证明。

§7. 原始——对偶方法的描述

对任意给定的权 $W=(W_1, W_2, \cdots, W_n)$，称线性规划问题：

$$\max\{Wx \mid Ax=r,\ Bx\le s\quad x\ge 0\}\cdots\cdots \quad (7.1)$$

为原始问题。它的对偶问题为：

$$\min\{ru+sv \mid A^Tu+B^Tv\ge W,\ u\ge 0,\ v\ge 0\} \quad (7.2)$$

其中每一对偶变量 u_i 对应于 M_1 的一个闭集；v_k 对应于 M_2 的一个闭集。

一对允许的原始、对偶解是最优的充要条件为：

$$x_j>0 \Longrightarrow (A^Tu+B^Tv)_j=w_j \quad (7.3)$$

$$u_i>0 \Longrightarrow (Ax)_i=r_i \quad (7.4)$$

$$v_k>0 \Longrightarrow (Bx)_k=s_k \quad (7.5)$$

标法开始于原始允许解 $x_j=0$，$j=1,2,\cdots,n$.（即 $I=\phi$），以及对偶允许解：

$$u_E=\max\{w_j\} \quad \text{（对应于闭集 E 的变量）}$$

其余的 $u_i=v_k=0$.

因此，这时只有一个松紧关系：

$$u_E>0 \Rightarrow |I|=r(E) \quad (7.6)$$

没有满足。

在标法进行过程中，或者通过交错序列来改进原始允许解，或者改进对偶允许解。而且，自始至终，除了松紧关系（7.6）外，其余的松紧关系始终保持。经有限步后，（步数的上界是E中元素个数的多项式函数），条件（7.6）也必然得到满足，这时所处的原始、对偶解便是最优解。

对于一个给定的原始、对偶解，为了增进原始解，我们可以利用基数交标法中的标号过程，求交错序列。但是，这就不能保证保持（除（7.6）外）满足松紧关系。因此，这里必须对原标号过程作适当的修改。

假如，（修改后的）标号过程未发现交错序列，那末，改进对偶解。自然，要求改进后的对偶解与原始允许解之间还保持（除（7.6）外）松紧关系。

由于计标过程中，只有一个松紧关系（7.6）没有满足，因此，我们可得如下的结论：

在计标过程的任何步骤，若当时所处的交为 I，则它是所有元素数目不超过 |I| 的交中，使权达到最大的交。

为了看清这一点，我们只要用条件：

$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq |I|$ 代替原来的 $\sum_{j=1}^{n} x_j \leq r(E)$ 即成。

在计标过程中，非零对偶变量数目始终不超过 $2n$。除 u_E 外，这些非零变量分别对应于 I 的两子集簇：$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$，其中：

$$\mathcal{U} = \{U_0, U_1, \cdots, U_p\}$$

$$\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \cdots, V_q\}$$

而 $U_0=\Phi$， $U_i \subseteq$ $_{i+1}$， $U_p=I$

$V_0=\Phi$， $V_k \subseteq V_{k+1}$， $V_q=I$ 。

对应于闭集 $SP_1(U_i)$ 的对偶变量为 u_i；对应于闭集 $SP_2(V_k)$ 的对偶变量为 v_k。

假定对反始允许解I，我们发现了交错序列：

$S=(e_1, e_2, \cdots e_s)$。当增进I时，我们也必须同时修改相应的子集簇 $\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$。修改的方式为：

(i) 修改 U_i ($i=1,2,\cdots p$)。对 $j=3,5,\cdots,S$，若 $e_{j-1}\in U_i$，则在 U_i 中，用 e_j 代替 e_{j-1}。最后，若 $u_p=0$，则再将 e_1 加入 U_p，即置 U_p 等于增进后的 I；若 $u_p>0$，则在簇 $\mathcal{U}$ 中，增添子集 $U_{p+1}=I$（增进后）。当然，这时对应的对偶变量 $u_{p+1}=0$。

(ii) 修改 V_k ($k=1,2,\cdots,q$)。对 $j=1,3,\cdots$，$S-2$；若 $e_{j+1}\in V_k$，则在 V_k 中，用 e_j 代替 e_{j+1}。最后，若 $v_q=0$，则再将 e_s 加入 V_q，即置 V_q 等于增广后的I；若 $v_q>0$，则在簇 $\mathcal{V}$ 中，增添 $V_{q+1}=I$（增进后）。自然，这时对应的对偶变量 $v_{q+1}=0$。

假如S是一般的交错序列，那末，用上述方式修改 U_i，V_k 时，随着会引起某些相应的闭集 $SP_1(U_i)$，$SP_2(V_k)$ 也发生了变化。这样，原来对偶变量 u_i，v_k，与闭集