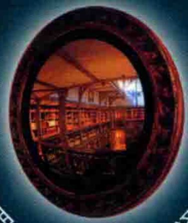


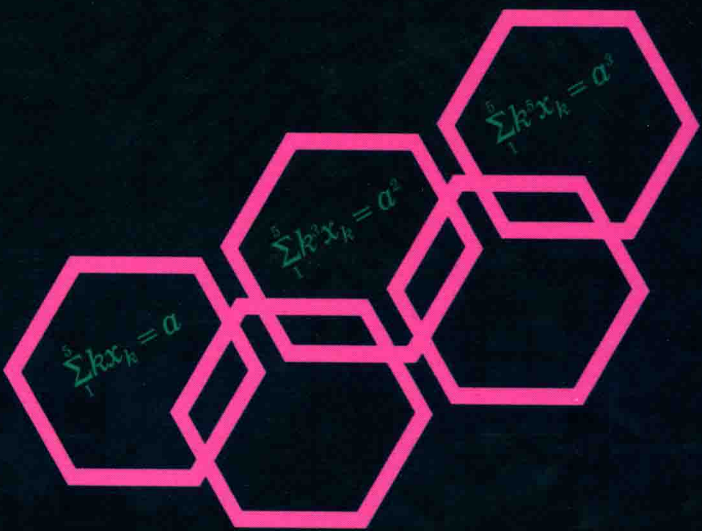
俄罗斯数学精品译丛

St.Petersburg Mathematical Olympics Problems

圣彼得堡数学奥林匹克试题集

● 科哈西 · 康斯坦丁　著

● 叶思源　译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

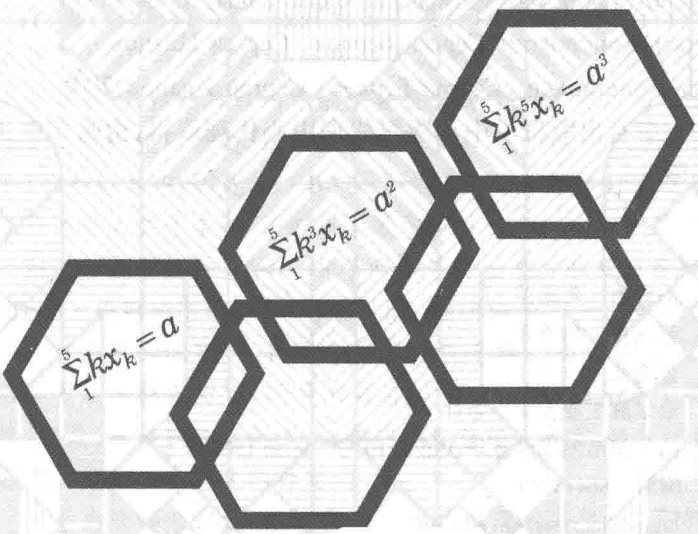
St.Petersbu
Mathematical Olympics
Problems

俄罗斯数学精品译丛

圣彼得堡数学奥林匹克试题集

● 科哈西 · 康斯坦丁　著

● 叶思源　译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权登记号 黑版贸审字 08－2015－004 号

内 容 简 介

本书为圣彼得堡数学奥林匹克试题集，全书收录了 1994～1999 年的奥林匹克试题，并附有试题参考答案. 由于涉及各种层次的竞赛题，因此书中题目难度波动较大，有相对简单的问题，也有相当令人费解的难题，读者不妨依个人情况自选习题解读.

本书适合初、高中学生，初高中数学竞赛选手及教练员使用.

图书在版编目（CIP）数据

圣彼得堡数学奥林匹克试题集/（俄罗斯）康斯坦丁著；叶思源译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.1

ISBN 978－7－5603－5093－6

Ⅰ.①圣… Ⅱ.①康… ②叶… Ⅲ.①中学数学课－竞赛题－试题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 303512 号

书名：Петербургские математические олимпиады：1994－1999

作者：Кохась Константин，Сергей Берлов，Сергей Иванов

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 单秀芹
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 20 字数 438 千字
版 次 2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978－7－5603－5093－6
定 价 38.00 元

序言

Д·B·福明的书《圣彼得堡数学奥林匹克试题集》在1994年出版,该书收集了1961年到1993年圣彼得堡奥林匹克的市区选拔赛的试题,在该书出版以前,只能在奥林匹克组织委员会每年小量发行的出版物中找到列宁格勒奥林匹克的试题.这些试题成为珍本,它们或收入在《量子》与《中学数学》的合订本中.因此,Д·B·福明的书为广大读者开发了独创而且美丽的试题的巨大文化宝藏.圣彼得堡数学奥林匹克以这些试题而著称于世.

本书为读者提供1994~1999年圣彼得堡奥林匹克的各种试题,本书也是Д·B·福明的书的延伸,与Д·B·福明的书不同之处在于本书收集了各轮奥林匹克的试题(包括第一轮即区级竞赛),也包括了239中学(物理—数学贵族学校NO239)的奥林匹克试题,这些试题不属于城市奥林匹克试题,但是,从参加者的组成、试题的特征与定位来看,这些试题都是城市奥林匹克试题的非常漂亮的补充.

本书由三部分组成.第一部分列出了试题的条件.为了方便读者,一些试题的条件伴有插图,虽然奥林匹克试题本身没有插图(除非试题的条件就在图中).按惯例,我们根据解答的困难程度递增的方案来安排试题,不过,"解答的困难程度"的概念是很主观的.本书的第二部分给出了全部试题的解答和一些评述,我们常常对一个试题给出几种解法.考虑到没有受培训的读者,我们对第一轮比赛的试题给出了详细的解答,其他轮比赛的试题,

有时可能使专业人员也感到困难，有时我们在解答后面作出记号◆，在这个记号之后列出对所解答试题的评价或推广，这些对于第一次阅读来说不是必要的．本书的备用试题资料是辅助性的，在那里综合了在第一轮比赛的第二套不同的解决方法和统计的资料，读者可以将它们与自己的成果或自己的学生的成果相对照，然后判断奥林匹克的不同解决方法或个别试题的复杂性．这一部分还为读者提供了五个研究性的问题，这些问题没有远离奥林匹克的选题范围，读者可以做一些学术研究．

本书是将1994年至1999年历年的“圣彼得堡数学奥林匹克试题”进行加工和补充的成果，我们感谢Г·И·切列德尼琴科与圣彼得堡国立大学出版社的其他编辑，他们精心地审阅了本书的原稿．除了本书的作者之外，参与本书编写的还有Д·В·福明(1994)等．如果没有圣彼得堡数学奥林匹克的同事们齐心协力与富有成效的工作，那就不可能编成这一本书．这些年来参加这项工作的有Ю·М·巴洛夫、С·В·伊万诺夫等同事．

С·Л·别尔洛夫
С·В·伊万诺夫
К·П·科哈西

⊙ 简 介

圣彼得堡数学奥林匹克的突出特点在于它所提出的问题都是崭新的.这些问题不是从旧书中或早已不用的书中抄出来的,也不是年代久远的奥林匹克试题的变体.评委会对每一轮比赛都尽力收集新的、以前任何地方都没有遇见过的问题.有些时候这是办得到的.评委会的成员特地为奥林匹克拟出问题,并将它们交给自己的同事"尝鲜",任何一个问题,即使只有评委会的一个成员认为是旧题,或者在某本书中或在某次数学竞赛中遇到过,这个问题立即被毫不客气地从题目清单中删除.在俄罗斯许多地方的奥林匹克、青少年数学爱好者的联欢或竞赛以及其他的比赛的工作中都利用圣彼得堡数学奥林匹克的资料.这些奥林匹克的组织者不仅将奥林匹克的资料看作是鲜为人知的试题收藏品,而且将它们看作是现代数学奥林匹克竞赛水平的客观标志.在这个意义上,圣彼得堡奥林匹克是我国奥林匹克运动的"示范的楷模"之一.虽然,数学奥林匹克已经成为普遍的现象,但是与优秀的高级时装设计师的样品一样,在时装展示会上所展出的服装也很少适合日常的穿着.我们的奥林匹克的最后一轮试题一直都是远远地超过中学平时测验的水平.在利用本书进行活动时应当考虑到第二轮和选拔轮比赛的试题毕竟是只顾及到全国在奥林匹克方面最强的城市的最擅长的学校,而239中学的奥林匹克的水平更高.

圣彼得堡数学奥林匹克分两轮进行.第一轮在城市的所有区同时以城

市奥林匹克评委会所编的试题进行比赛. 这一轮的筹备工作由区的教学法办公室的工作人员完成. 这是很大规模的奥林匹克,有一万至一万五千所中学的6~11年级的学生参加,然后按照第一轮的结果确定参加第二轮的成员. 在第二轮中,每个年级大致上有100所中学参加. 6~8年级在以А·И·赫尔岑命名的俄罗斯国立师范大学进行,9~11年级在圣彼得堡大学进行. 这一轮确定圣彼得堡奥林匹克的优胜者. 选拔轮只是为了组成参加全俄奥林匹克的城市团队. 在第二轮中表现突出的9~11年级学生参加选拔轮,每个年级从10人到30人. 239中学参加奥林匹克的共有100~150人,这是一个开放的奥林匹克,常常有其他中学的学生参加,这些学生有时也获得好成绩.

圣彼得堡奥林匹克的第一轮是3个小时的笔试,这一轮的试题按以下的考虑选出:让大多数学生应用中学教学大纲的知识已经能够解答它们,而且可以足够简单地写出答案.

圣彼得堡数学奥林匹克的第二轮、选拔轮以及239中学的奥林匹克都是口试. "口试"这个词并不意味着学生们必须在心里解题. 奥林匹克的"口头陈述"只在于说明解答的方法. 如果学生解出了问题,那么他应当向评委会的众多成员之一讲述答案. 因此,学生可以不必将时间花费在解答的精心书写上,而是与进行评审的数学家交谈(当然,有时会当场发现疏漏),弄清楚某个证明或反例,在自己的解答中所利用的复杂的、难以解释的结构,在讲述的时间里有可能直接修正自己的解答. 一般情况下,如果错误不是很重大,那么,解答者便得以在不长的时间内(大约几分钟)弥补解答中的破绽. 如果没能改正错误,那就记为缺点. 而比赛规则规定:任何一个问题的解答,只有当在其中出现了第三个缺点时才降低学生所得分数. 在做总结时,不考虑参赛者的缺点的数量. 与笔试的奥林匹克不同,口试的每一个问题的结果只有两种形式:"解答"或"没有解答". 有益的想法和不完全的解答等都是不合格的.

在第二轮开始时,将4个各种问题的已知条件交给参赛者(六年级的这4个试题来自6个问题,其他年级的试题来自7个问题). 在3个小时内能够解答三个试题的参赛者(如果试题比较复杂,要求能够解两个试题)将转移到另一个教室,在那里,将其他试题的已知条件交给他们,并且要求在1个小时内解答. 在选拔轮,一开始就将全部8个各种试题发给参赛者,这一轮的比赛时间是5小时. 239中学的奥林匹克竞赛时间也是5个小时. 奥林匹克以口试解答的目标,以及239中学的奥林匹克的参赛者并非随机组成,都使得有可能在条件的文本中包含思想上充实的问题.

正如奥林匹克的选拔轮那样,239中学的奥林匹克只由独创的问题所组成. 与政府办的奥林匹克不同,这个奥林匹克严格定位于专业的范围内. 在挑选问题时,不是考虑使题目既容易做出又十分美妙,而是在解答中可以利用下列材料:它们超出中学大纲的范围,但是在数学活动小组的标准的教材之中.

我们注意到:本书所提供的问题的全部解答并非都满足评委会检查第一轮活动的成员的要求. 如果本书的作者们在真正的奥林匹克活动中写下这些解答(例如,参看问题97.97的解),那么,他们可能没有机会进入下一轮活动. 但是,对于阅读本书问题解答的读者来说,他的主要目的不是"揭穿作者",而是要认识一些新的观念和例子,满足好奇心,学点什么东西,或者最低限度得到中学知识的一次提升. 考虑到深思熟虑的读者,我们在解答中作了不同的简化或省略. 与奥林匹克活动的创作者不同,本书作者有理由顾及读者的聪明才智. 此外,省略细节往往是不明智的,而写出解法的思想是更为合理的.

一般情况下,善于解题与书写解答的能力是完全不同的两回事. 许多中学生大概在第一

轮就感觉到了.通常,对评委会十分不满.因为通过第二轮的评判准则似乎是表示“多于两题”那样的随便.这就意味着“两题与其余一题的有效的想法”.“有效的想法”(但是没有必要的说明)可能是正确的答案.从某几种情形中选择一种是很粗疏的解答——这是指数学上的粗疏而不是写法意义上的粗疏(评委会的成员力求客观地评估粗疏的做法,因为合适意味着数学的才能和良好的表述,这些都是独立的素质).评委会开会审议作出奥林匹克的评价:应当认为哪种想法是有益的,而哪种想法不是有益的.最后的措辞可能是很不明确的.因此,必须在纸上明确地说明自己的见解,这是书面的奥林匹克令人烦恼的特点,也是书面的奥林匹克基本的短处之一.一般情况下,在低年级更是这样.

众所周知,为了清楚地理解问题的解答,最好是亲自去解这个问题,或者至少是尝试去做一做,琢磨出它的解决方法,自然需要检验.怎样辨别解答是否正确呢(“从奥林匹克评委会的观点来看”,因为评委会自然认为它的评判标准是唯一可能的)?

可以认为,为了检验解答,只需将它与本书第二部分的叙述作简单的“核对”.但是,特别是对于复杂的问题,这样做远不是较好的办法.首先,常见的是在书中所说的是完全不同的解答.奥林匹克的问题常常有多种解答方法,即使它只有一个答案,实质上也可以用各种完全不同的方法去说明答案.如果解答方法与书中所写的不相同,也不意味着前者是不对的.

其次,虽然各种各样的解答可能与书中给出的答案类似,但是解答是不正确的.因为答案中最重要的是逻辑基础.好像答案有某些公式的事实本身并不表示解答还不错(例如在大型的奥林匹克中总有这样的学生,他猜测答案,并将猜测随意写成算术运算的组合而得到解答,他并不关心这些运算与问题是否有任何联系.在考虑答案是否合乎规则时,这些“解答”是被排除在外的.重要的不仅仅在于正确地进行计算——在奥林匹克的问题中几乎不可能有复杂的计算——关键在于理解了什么,然后才计算什么).

最后,书中所写的解答同样需要验算!不仅仅是为了找出其中的错误,而是为了更好地认识清楚答案.解答中的许多中间结论是没有注释的,将它们作为结果或只作简要的说明,这些结论并不是不需要证明而信以为真的.应当懂得,其中每一个结论为什么成立并且它们是从哪里得出来的(有时,为此要解决一个较小的问题).一个解答只有满足下列要求才被认为是通过检查的:它的所有细节都是有根据的,在必要时,可以对解答作出充分符合需要的详细的说明.顺带提及,奥林匹克口试的准则是:解题的回答无需先琢磨答案的哪些细节应当详细地说明,但是应当准备好回答对应的问题.

其实,说明细节很少引起困难,而在第一轮中(如果解答的话!)对解答并不要求有特别详细的说明.更多的不愉快的事情起源于各种各样的逻辑错误.遗憾的是常常表现为对最重要的——“解题”是什么缺乏理解(指对一般的问题而不是各种标准化试题).因此,在着手解题之前,首先应理解这个问题所要求的是什么?

数学的任何问题都是“以证明为基础”的问题,这就是说,解答中出现的任何结论,无论是问题的答案或辅助的事实都必须是有根据的(已经证明的).问题的解答本身不是什么别的东西,而是证明某个结论——或者是在条件中已经清楚地表达出来的结论(求证……);或者是回答习题的问题的各个结论.实际上,对词“解答”的理解就是证明(不过,在某些问题中,只要举出某一个例子就足够了.如对低年级的益智题和“是不是有……”类型的问题就是属于这一类的题目.当然,只限于答案是肯定性的问题.这时,同样应当验证举出的例子

确定是合适的).

大部分数学问题包括叙述"条件",并且假设满足这些条件(例如:"数 x 满足……";"已知……"等).这些问题实质上要求证明下列类型的结论:"当 x 满足给定条件时,在所有可能的情况下证明……是正确的".选出一个具体的例子,它满足问题的条件,但任何时候都不是解.即使这样的例子实际上只有一个,同样需要证明"唯一性"的这个事实.作者认为,最不好的情形只有一种,就是审查这种常见的错误.

如果问题要求做某种寻找,那么除了解答原来的问题以外,还应证明不可能有其他的答案.当然,对于中学的一般问题,这些证明就是从条件出发经一系列逻辑推导得出答案.而在下列情形就不必解问题了:利用"似然推理"已经想出答案,或很容易猜到答案,而且证明了这个答案是唯一可能的,那么已经解决问题,这时,重要的不是从条件出发的逻辑推导,而"寻找"答案的过程可能与证明没有任何共同点.想出答案比寻找(推测)答案更复杂.应当记住,问题可能有几个答案,尽管不多,那就必须找出全部答案.简单地说,如果问题需要回答,那么在解答中要列出所有可能的答案并证明没有其他的答案(高年级学生可能认为这类似于"解方程").如果有几个答案,那就应当证实它们全部确实都是合适的.其实,在答案是唯一的情况下,这样做也是有益的.

如果在问题的条件中对某一个量引入记号,假定为 n,那么答案可能与这个量有关,例如,答案是含有 n 的表达式.

与条件相对应,第一步应区分正确的解答与错误的解答(准确地说,是将解答与不是解答区分开来).检查解答,首先应当证实其中的证明正是问题所需要的.其次,对解答的进一步的要求是使解答真正得到证明,即答案有完整的正确的逻辑推理.只有在书面的奥林匹克中才出现证明不完备的问题,或者是"不充分的论证"(这是更准确的说法"完全没有解答"的客气的同义语).典型的"没有充分论证的解答"大概如下:

"已知[重抄问题的条件],就是说[问题的结论的原文].须知,如果[问题的结论]不成立,那么[条件的原文]是不可能的.因此,从[条件的原文]得出[问题的结论],这就是所要证明的."

显然,这样的文本完全不是解答.虽然这样,在其中没有任何"错误"(不正确的结论).还有更复杂的例子,其中逻辑的不对应性一般情况下隐藏在论证的不充分性的后面.比如说,先证明了一个辅助的结论,然后解题者似乎是利用它,但却完全是用了别的.一般情况下,问题的解答在于它的结论是从很简单的、显然的或众所周知的事实推导出来的.如果发现某个"显然的"结论的证明一点也不比问题的全部的解答更简单,那么,这正好是"没有充分论证"的情形.

无解的问题还有一个特征标志:这就是过分普遍的论断.如果同样程度的推理适用于这个问题,又似乎适用于任何不正确的说法,那么当然什么也没有证明(顺带提及,在本书对某些问题的解答的评论中,会举出这样的例子,它的条件与问题的条件接近,但结论是不正确的).特别地,如果解答不利用条件中的某一个,而没有这个条件问题的结论显然是不对的.这正是解答有逻辑错误或不完备的明显标志,因此,查明以下一点总是有益的:题目的某些条件是本质的吗?如果是,那么在解答中是如何运用这些条件的.

至于推导中的逻辑错误,这样的例子如此之多并且形式多样,我们不再一一列举它们.避免这种错误最好的方法就是在解答中注意使所有的结论都有清晰而且唯一的含义,无论

如何解答都不能根据完全说不清楚的“当然的”定理,也不能利用并不知道它们的确切的定义的数学概念. 这也适用于标准的记号与运用表达式的规则——如果将解答无中生有地表示为某些手册的公式的组合结果,那么,它最可能是毫无意义的(此外,以下述方法解答总是危险的:在分式$\frac{\sin x}{x}$中以 x 去除或者从公式中颠三倒四地鼓捣出一个答案来).

还有最后的说明,在阅读解答时,常常会产生一些困惑:“怎样才能想到这些?”不要难过,在大多数情况下,这种困惑完全是合理的. 问题在于,解答的表述与寻找解答的过程并不是对应的. 解答应当回答下列问题:“习题的结论为什么是正确的”,而不是“当我解习题时,我有什么想法”.

为了更好地领悟这是完全不同的两件事,我们介绍关于某个典型的恒等式或不等式的证明过程. 通常是这样开始的:从要证明的表达式入手,利用已知的变换法则将它转化为某一个显然的真命题. 这里有某些奇异之处,它是从还未被证明的,从而不能认为是成立的结论开始推导的(顺带说及,在粗心地应用这种方法时,实际上可能弄错因果关系). 从结果开始的下列解答看来是“逻辑上完美无缺的”;这就是它从一些显然正确的结果开始,从这些结果依次地推导出其他的结果,然后得到所要证明的. 但是,要想出“从结果开始”这样的解答常常是很复杂的. 例如,在解答的过程中需要解开括号,接着在左右两端消去某些项,那么,从结果出发就表现为:在两端加上“某些”项,然后将它们分解因式. 尝试猜想! 正是这样,奥林匹克问题的最“神秘的”解答其实完全可以自然地想出来. 这里还有一个道理:自己独立地思考问题的解答,比阅读和检验别人的解答更为重要,更为有益.

C · Л · 别尔洛夫
C · B · 伊万诺夫
K · П · 科哈西

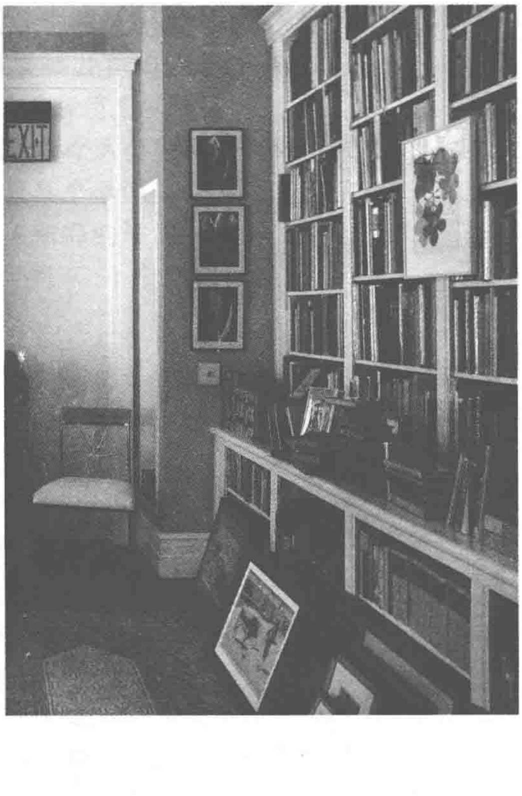
目录

第一编　试题

第二编　解答

第一编

试题



1994 年奥林匹克试题

第一轮

6 年级

94.01. 请在 4×4 方格表中放置 10 个 1(每个方格中至多只能放一个 1),使得在每一列中都有偶数个 1,而每一行中都有奇数个 1.

94.02. 在十进制的十位自然数中,能被 9 整除,并且各位数字都是 0 或 5 的自然数有多少个?

94.03. 在某次数学竞赛中,有若干道简单题和难题,每解出一道简单题得 2 分,每解出一道难题得 3 分. 此外,对于每道未能解出的简单题要扣去 1 分. 罗曼解出了 10 道题,一共得了 14 分. 请问:该次数学竞赛中一共有多少道简单题?

94.04. 甲、乙、丙三个人做游戏,每个人分别写出 100 个单词,然后比较每人所写的单词. 如果某个单词至少被两个人写出,那么,就将这个单词从这三个人所写的单词中删去. 请问:最后是不是会出现下列情形:甲只剩下 54 个单词,乙只剩下 75 个单词,而丙只剩下 80 个单词?

7 年级

94.05. 请将数 14,27,36,57,178,467,590 和 2 345 放置在圆周上,使得每两个相邻的数都有相同的数字.

94.06. 如图 1 所示,矩形 $ABCD$ 被分成一些正方形. 已知边 $AB=32$(cm),试求边 AD 的长度.

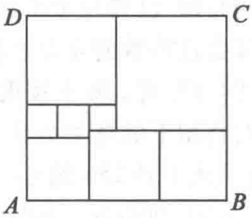


图 1

94.07. 芭芭娅迦和科谢伊各采了一些蛤蟆菌. 芭芭娅迦采的蛤蟆菌上的斑点数目是科谢伊采的蛤蟆菌上的斑点数目的 13 倍. 而当芭芭娅迦将自己的斑点数目最少的一个蛤蟆菌送给科谢伊以后,她的蛤蟆菌上的斑点数目就仅仅是科谢伊的蛤蟆菌上的斑点数目的 8 倍了. 证明:芭芭娅迦一共采了不多于 23 个蛤蟆菌.

94.08. 在 10×10 方格表中放置跳棋子,每个方格中至多放置 1 枚跳棋子. 为了使各列中的棋子数目各不相同,而且各行中的棋子数目也各不相同,在该方格表中一共可以放置多少枚跳棋子?请给出所有可能不同的答案,并证明此外再没有其他答案.

8 年级

94.09. 同问题 94.07.

94.10. 如图 2 所示,在等腰$\triangle ABC$的底边AC上取一点D,在AD的延长线上取(除点C之外的)一点E,使得$AD=CE$. 证明:$BD+BE>AB+BC$.

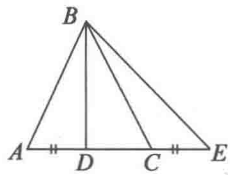


图 2

94.11. 在黑板上按照递增顺序写出从 1 到 10 000 的所有自然数,然后,擦去所有既不能被 4 整除,也不能被 11 整除的数. 最后,排在第 1 994 个位置上的数是什么?

94.12. 奥林匹克循环赛的规则规定:在每一轮竞赛中都把参赛者每两个人分为一组,组内两人比赛,淘汰败者,胜者进入下一轮比赛,直至决出一名冠军. 现有 512 名运动员参加奥林匹克循环赛,他们的编号分别为 1 号到 512 号. 如果分在同一组中的两个人的编号之差大于 30,我们就把这个组称为“乏味的”. 请问:能不能在整个赛程中不出现乏味的组?

9 年级

94.13. 同问题 94.07.

94.14. 已知自然数A,B与C满足:以B去除A所得的商大于以B去除A所得的余数的 2 倍. 而以C去除B所得的商大于以C去除B所得的商的 2 倍. 证明:以C去除A所得的商大于以C去除A所得余数的 2 倍.

94.15. 如图 3 所示,在$\triangle ABC$的中线BM上取一点D,过点D作平行于边AB的直线,过点C作平行于中线BM的直线,所得的两条直线相交于点E. 证明:$BE=AD$.

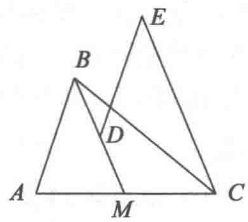


图 3

94.16. 已知若干个给定的正整数之和等于它们的平方之和,那么这些数的立方之和与它们的四次方之和哪一个较大?

94.17. 有 256 人按奥林匹克赛制进行比赛(即在每一轮比赛中,将留下的选手分为若干队,并且让失败者出局). 将每一个选手从 1 到 256 编号,如果某一场比赛中两个选手编号之差不大于 21,则称这一场比赛是有趣的. 设每场比赛都是有趣的,证明:1 号选手获胜不超过 2 场.

10 年级

94.18. 同问题 94.04.

94.19. 求满足下式的所有的四个自然数k,l,m,n,即

$$(2^k+2^l)^2=2^m+2^n$$

94.20. 同问题 94.16.

94.21. 如图 4 所示,在锐角$\triangle ABC$中作高AE与CD,在边AC上有两个不同的点F与G,使得$DF /\!/ BC$且$EG /\!/ AB$. 证明:四边形$DEFG$是圆内接四边形.

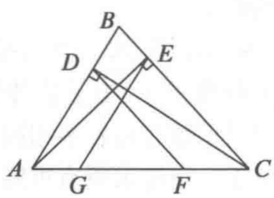


图 4

94.22. 同问题 94.17.

11 年级

94.23. A,B,C,D 和 E 进行国际象棋比赛,并且每两个选手恰好都互相比赛一次. 在比赛结束后得知:A 恰好赢了 2 盘,B 全部都是平局,C(按结果)只输给总分最后的一名选手,而 D 比 E 多得 0.5 分. 请确定整个象棋比赛的结果(在国际象棋比赛中,胜方得 1 分,平局各得 0.5 分).

94.24. 同问题 94.15.

94.25. 同问题 94.16.

94.26. 求满足下列条件的全部十进制三位数 n:

①它们被自己的数字之和加 1 后所除得的余数为 1;

②以同样的数字按相反的顺序所写成的三位数也具有性质①.

94.27. 如图 5 所示,棱锥 $S-ABC$ 的底面是 $\triangle ABC$,其中 $AB=17$,$AC=10$,$BC=9$. 棱锥的高为 20,这个高的垂足是线段 BC的中点. 求棱锥的满足下列条件的平面截面的面积:截面过点 A,平行于直线 BC,而且截面将棱锥的高从顶点 S 计算分为 4:1.

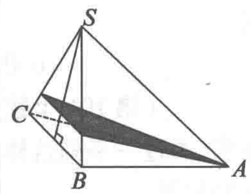


图 5

第二轮

6 年级

94.28. 现有 5 枚面值分别为 1,2,3,5 和 10 皮亚斯特(拉丁美洲国家旧时货币名称)的硬币,其中有一枚假币,即它的质量的克数与它的面值数不相等,怎样利用一台没有砝码的天平找出这枚假币?

94.29. 国际象棋棋盘是一个 8×8 的方格表,现在将棋子"车"放在这个方格表的方格中,每个方格中至多放 1 枚棋子. 已知每行、每列中都刚好有一枚棋子"车". 如果将棋盘分为 4 个 4×4 的正方形,证明:右上正方形中的棋子数目等于左下正方形中的棋子数目.

94.30. 现有 11 张卡片,在每一张卡片上各写上一个不大于 5 的自然数,米沙将这些卡片排成一行,得到一个十一位数,米沙再将它们按另一种顺序排成一行,又得到另一个十一位数. 证明:这些十一位数的任两个之和中至少有一个数是十进制表达式中的偶数.

94.31. 在柠檬亲王的宫廷中供职的有大公、伯爵和男爵. 在亲王开始执政时,宫廷中共有 1 994 人供职. 但是,每一天都有一个人在决斗中杀死另一个人,并且大公只杀死伯爵,伯爵只杀死男爵,男爵只杀死大公. 而且没有人在决斗中取胜过两

次,最后,只剩下男爵阿佩利西一个人还活着. 请问:第一个被杀死的人的身份是什么?

94. 32. 在一副骨牌中有 222 块菱形牌◇,333 块正三角形牌△和 444 块梯形牌⏢,其中每一个正三角形的边长为 1. 证明:用所有这些骨牌不能拼成一个周长为 888 的多边形. 在拼接时,骨牌与骨牌之间没有空隙.

94. 33. 在黑板上将 101 个自然数写成一行. 现在做如下操作:每一次允许将任意两个相邻的数各减去 1. 已知,经过一系列这样的操作后得到数组

$$\{1,0,0,\cdots,0,0,0\}$$

(第 1 个数为 1,其余的数都是 0)

和数组

$$\{0,0,0,\cdots,0,0,1\}$$

(第 101 个数为 1,其余的数都是 0)

证明:通过一系列这样的操作,可以从 101 个自然数的数组得到下列数组

$$\{0,0,0,\cdots,0,1,0,\cdots 0,0,0\}$$

(第 51 个数为 1,其余的数都是 0)

7 年级

94. 34. 同问题 94. 31.

94. 35. 有三个两位数,其中任何两个数的和都等于将第三个数的两个数字交换位置后所得的数. 请问:这三个数之和可能是什么数?

94. 36. 在 10×10 方格表的方格中填入 0 和 1. 已知任何四行中都有某两行数填得完全一样. 证明:该方格表中一定有两列数填得完全一样.

94. 37. 现有 100 枚面值分别为 $1,2,\cdots,100$ 皮亚斯特的硬币,其中有不多于 20 枚假币. 假币是指它的质量的克数不等于其面值数. 怎样利用一台没有砝码的天平确定面值为 10 皮亚斯特的硬币是不是假币?

94. 38. 在平面上有没有这样的点:它到某个正方形的四个顶点的距离分别为 1,4,7 和 8?

94. 39. 在火星上,某种语言共有 k 个字母. 如果两个单词的字母个数相等,并且只有一个字母不同(例如 ТРИСК 与 ТРУСК),则称它们是相似的. 证明:可以将该语言的所有单词划分为 k 个组,使得每个组内任何两个单词都不相似.

94. 40. 在一张正方形纸上用铅笔画线段,将该正方形划分为 n 个矩形. 证明:只需画不多于 $n-1$ 条线段,就能够在正方形