高等教育"十三五"规划教材

微积分

（上册）

刚蕾 田春红 主编 / 蔡剑 沈仙华 朱晓颖 副主编

清华大学出版社

微积分

（上册）

刚蕾 田春红 主编

蔡剑 沈仙华 朱晓颖 副主编

清华大学出版社

北京

内容简介

全书以经济、管理和理工类学生易于接受的方式科学、系统地介绍高等数学的基本内容，本书强调概念和内容的直观引入及知识间的联系；强调数学思维和应用能力的培养；强调有关概念、方法与经济管理的联系，并适应现代经济、金融、管理学发展的需要.

本书分上、下两册出版. 上册包括：函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用. 书中例题习题较多，每章最后还有总复习题，书末附有部分习题答案与提示. 本书适合于高等学校经济管理类各专业的读者，也可作为理工类专业的教材.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售.
版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上册/刚蕾、田春红主编. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48007-5

Ⅰ. ①微…　Ⅱ. ①刚…　②田…　Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 205690 号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：11.75　　**字　　数**：286 千字
版　　次：2017 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2017 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：25.00 元

产品编号：075942-01

前言

经过多年的教学改革实践，随着高等院校本科教学质量工程的推进，民办高校和独立学院对高等数学的教学提出了更高的目标. 为满足新形势下培养高素质专门人材所必须具有的微积分知识的实际需要，迫切需要编写新的微积分教材以适应分类教学的要求. 本书是编者在多年本科教学的基础上，在经典教材的理论框架下按照突出数学思想和数学方法、淡化运算技巧、强调应用实例的原则编写而成的.

高等数学课程的教学与教材改革，一直是学院各级领导与教师们的工作重点. 为了更好地满足当前经管类各专业对微积分的实际需求及配合其专业课程教学，提高学生应用数学知识解决实际问题的能力，力求将经管类各专业的相关应用实例融入到高等数学的教材中，培养学生应用数学知识解决专业实际问题的能力. 本书体现了以下特色：

首先，适当降低了部分内容的深度和广度的要求，特别是淡化了各种运算技巧，但提高了数学思想和数学应用方面的要求，这样既能面对高等教育大众化的现实，又能兼顾学生的可接受性以及与中学数学教学的衔接.

其次，加强基本能力的培养，本书例题习题较多，每章最后还有总复习题，书末附有部分习题答案与提示，以帮助读者加强训练与检测学习效果，从而巩固相关知识.

《微积分》分上、下两册，均由具有丰富教学经验的一线教师编写完成. 本书的编写者在多年的本科教学中积累了丰富的经验，了解学生在学习高等数学中的困难与需求，所以尽最大努力从严密的数学语言描述中，保留反映数学思想本质的内容，摒弃非本质的内容，以提升学生运用数学思想和数学方法解决实际问题的能力.

本书为上册，包括：第 1 章函数与极限；第 2 章导数与微分；第 3 章微分中值定理与导数应用；第 4 章不定积分；第 5 章定积分及其应用. 上册由刚蕾、田春红主编，蔡剑、沈仙华、朱晓颖副主编，由刚蕾负责全书的统稿及修改定稿.

本书的编写采纳了同行们提出的一些宝贵意见和建议，本书的出版也得到了出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请广大同行、读者批评指正.

编　者

2017 年 4 月

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

函数与极限

第1章

初等数学研究的对象是常量,而高等数学研究的对象是变量.变量之间的依赖关系称为函数.极限概念是微积分的基本概念,极限是研究函数微分与积分的重要工具.本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本内容.

1.1 函数

1.1.1 预备知识

1. 数学归纳法

适用范围:只适用于证明与正整数 n 有关的命题.

证明步骤:

(1) n 取第一个可取值 n_0(例如 $n_0=1$ 或 $n_0=2$ 等)时,证明命题正确;

(2) 假设当 $n=k(k\in\mathbb{N}^+$ 且 $k\geqslant n_0)$时结论正确,证明当 $n=k+1$ 时结论也正确.

由这两个步骤,就可以断定命题对于从 n_0 开始以后的所有整数 n 都正确.

例 1 用数学归纳法证明:$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

证 (1) 当 $n=1$ 时,等式左边$=1^2=1$,右边$=\dfrac{1}{6}\times1\times2\times3=1$,等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时,等式成立,即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1),$$

那么当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}\text{左边}&=1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]\\&=\text{右边}.\end{aligned}$$

故当 $n=k+1$ 时,等式也成立. ■

综上可知,等式对任何 $n\in\mathbb{N}^+$ 都成立.

2. 一些常用的三角函数公式

(1) 同角三角函数间的关系:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\quad \tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha;$$

$$\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha;\quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};\quad \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha};$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

(2) 三角函数的积化和差公式:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

当 $\alpha=\beta$ 时,即为倍角公式:

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

(3) 三角函数的和差化积公式:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(4) 三角函数的万能公式:

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};\quad \tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

1.1.2 区间和邻域

1. 区间

定义 1 设实数 a 和 b,且 $a<b$,则称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\};$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

类似地，$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**.
而称数集

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

为**半开半闭区间**.

以上区间都称为**有限区间**，**区间长度**为 $b-a$.

除了有限区间外，还有**无限区间**，无限区间有：

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\};\quad [a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\};\quad (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}.$$

全体实数的集合$\mathbb{R}$也可记作$(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

2. 邻域

定义 2 设 δ 是任一正实数，则开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为**点 a 的δ 邻域**，记为

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

数集

$$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为**点 a 的去心δ 邻域**，如图 1-1 所示，记作$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

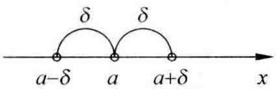


图 1-1

1.1.3 函数的定义

定义 3 设 D 是$\mathbb{R}$ 的非空子集，则从 D 到$\mathbb{R}$ 的对应关系 f 称为定义在 D 上的函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，记为 D_f. 集合 $R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数 f 的值域，R_f 也记成 $f(D)$.

在平面直角坐标系下，点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)(x\in D)$的**图像**.

下面举几个函数的例子.

例 2 函数

$$y=3$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{3\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-2 所示.

例 3 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-3 所示. 这个函数称为**绝对值函数**.

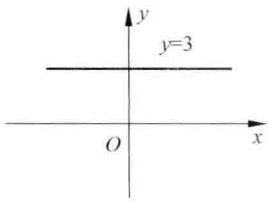


图　1-2

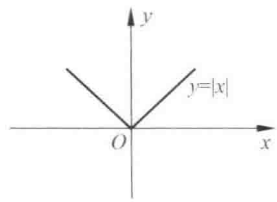


图　1-3

例 4　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为**符号函数**，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图像如图 1-4 所示，对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

例 5　取整函数

$$y=[x]$$

表示不超过 x 的最大整数，它的图像如图 1-5 所示，如

$$[1.35]=1,\quad [-3.4]=-4,\quad [-2]=-2.$$

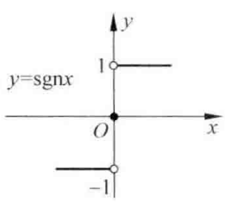


图　1-4

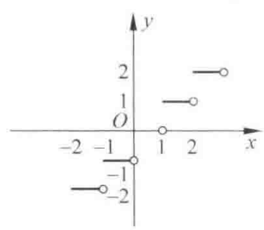


图　1-5

有时一个函数要用几个式子来表示，这种在自变量的不同变化范围中，对应关系用几个不同式子表示的函数，称为**分段函数**. 需要注意的是分段函数是一个函数，不是几个函数.

1.1.4　函数的性质

1. 奇偶性

定义 4　设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$为**偶函数**；如果对于任意的 $x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

容易证明，两个奇(偶)函数之和仍是奇(偶)函数，两个奇(偶)函数之积是偶函数；一个

奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

例 6 判断函数 $f(x)=\begin{cases}2+3x, & x\leqslant 0,\\ 2-3x, & x>0\end{cases}$ 的奇偶性.

解 由于

$$f(-x)=\begin{cases}2+3(-x), & -x\leqslant 0,\\ 2-3(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}2-3x, & x\geqslant 0,\\ 2+3x, & x<0\end{cases}=f(x),$$

故 $f(x)$是偶函数.

2. 周期性

定义 5 设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在一个正数 T,使得对于任意的 $x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**周期函数**,T 称为 $f(x)$的**周期**. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

例如函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,函数 $y=\tan x$,$y=|\sin x|$是以 π 为周期的周期函数.

例 7 求函数 $y=\cos(3x+5)$的周期.

解 因为如果存在 $T>0$,使得对于任意 $x\in\mathbb{R}$ 有

$$\cos[3(x+T)+5]=\cos(3x+5+3T)=\cos(3x+5),$$

则最小的正 T 应满足 $3T=2\pi$,即 $T=\dfrac{2\pi}{3}$,所以该函数的周期为 $T=\dfrac{2\pi}{3}$.

3. 单调性

定义 6 设函数 $f(x)$的定义域为 D,对于 D 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,如果恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在定义域 D 上是**单调增加**的; 如果恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在定义域 D 上是**单调减少**的.

4. 有界性

定义 7 设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在数 M_1,使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$f(x)\leqslant M_1,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有**上界**,M_1 称为函数 $f(x)$在 D 上的一个上界. 如果存在数 M_2,使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$f(x)\geqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有**下界**,M_2 称为函数 $f(x)$在 D 上的一个下界. 如果存在正数 M,使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上**有界**. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$在 D 上**无界**.

例如,$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界; $y=2^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界,但如定义域取有限区间,则它也是有界的. 可见,函数的有界性与讨论的区间 D 有关.

1.1.5 初等函数

1. 反函数

定义 8 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 $R_f=f(D)$. 若对 R_f 中每一值 y_0，D_f 中必有唯一一个值 x_0，使 $f(x_0)=y_0$，则令 x_0 与 y_0 相对应，便可在 R_f 上确定一个函数，称此函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in R_f.$$

习惯上，总是将自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以 $y=f(x)(x\in D_f)$ 的反函数常写成

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in R_f.$$

对每个 $y\in R_f$，只能有一个 $x\in D_f$ 使得 $y=f(x)$，从而可以确定新的函数 $x=f^{-1}(y)$. 因此，由反函数定义不难证明单调函数必有反函数. 但反之不然，即有反函数的函数不一定是单调的.

一般说来，并非每个函数都可以唯一确定一个反函数.

例 8 $y=x^2(x\in\mathbb{R})$，它在定义域 D 上不单调，对于给定的 $y>0$，有两个 x 与之对应，即 $x=\pm\sqrt{y}$. 所以不能确定一个反函数. 但在 $(-\infty,0)$ 上 $y=x^2$ 单调减少，在 $(0,+\infty)$ 上 $y=x^2$ 单调增加. 所以

$$y=x^2(x\in(-\infty,0))\text{ 有反函数 }y=-\sqrt{x}(x\in(0,+\infty));$$

$$y=x^2(x\in(0,+\infty))\text{ 有反函数 }y=\sqrt{x}(x\in(0,+\infty)).$$

如果把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一坐标平面上，这两个图像关于 $y=x$ 对称. 如图 1-6 所示.

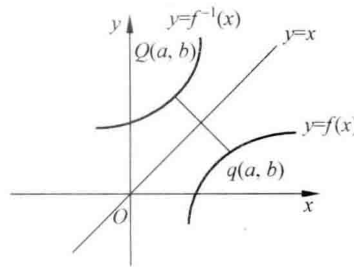


图 1-6

2. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 其主要性质归纳如下：

(1) 常数函数

$$y=C\quad (C\text{ 为常数}).$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图像是一条平行于 x 轴，且在 y 轴上的截距为 C 的直线.

(2) 幂函数

$$y=x^\alpha\quad (\alpha\text{ 为常数}).$$

幂函数的定义域要视 α 而定，例如，当 $\alpha=\frac{1}{3}$ 时，其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，其定义域是 $[0,+\infty)$. 但不论 α 是什么值，它在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，并且图像总是过点 $(1,1)$，如图 1-7 所示.

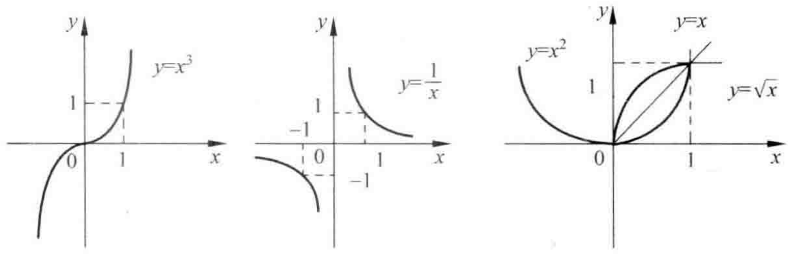
(3) 指数函数

$$y=a^x\quad (a>0\text{ 且 }a\neq 1).$$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，其图像总是在 x 轴的上方，且过点 $(0,1)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. 如图 1-8 所示.

(4) 对数函数

$$y=\log_a x\quad (a>0\text{ 且 }a\neq 1).$$



(a) (b) (c)

图 1-7

它的定义域是$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$，其图像总是过点$(1,0)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少. 如图 1-9 所示. 对数函数与指数函数互为反函数.

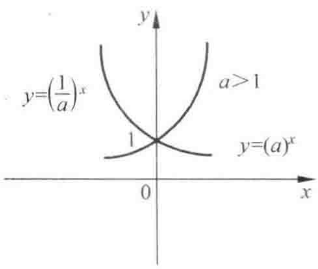


图 1-8

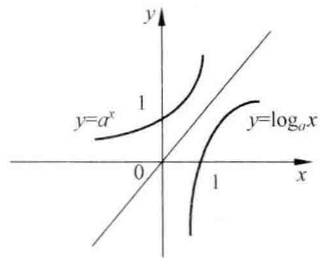


图 1-9

(5) 三角函数

三角函数共有六个，它们是：

正弦函数 $y=\sin x$(图 1-10)；余弦函数 $y=\cos x$(图 1-11)；

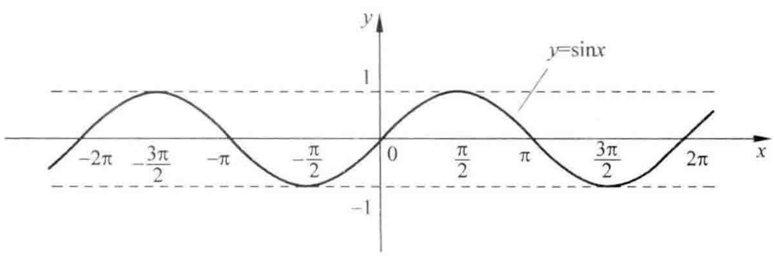


图 1-10

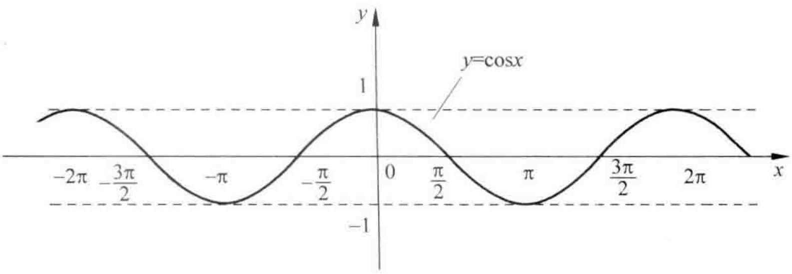


图 1-11

正切函数 $y=\tan x$(图 1-12)；余切函数 $y=\cot x$(图 1-13)；

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

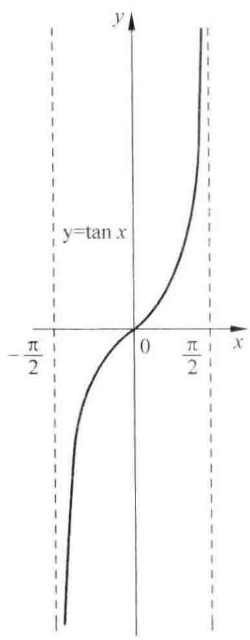


图　1-12

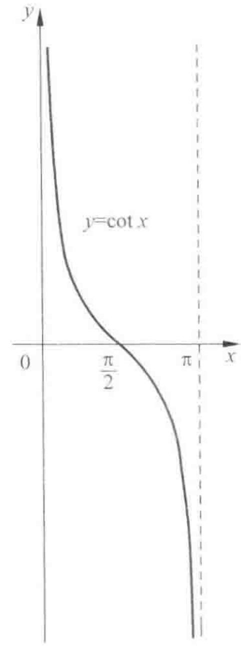


图　1-13

正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,值域都是$[-1,1]$；它们都是以 2π 为周期的周期函数；正弦函数 $\sin x$ 是奇函数,余弦函数 $\cos x$ 是偶函数.

正切函数 $\tan x$ 和余切函数 $\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数,它们都是奇函数. 正切函数 $\tan x$ 的定义域是$\left\{x \mid x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}, n\text{ 是整数}\right\}$；余切函数 $\cot x$ 的定义域是$\{x \mid x\neq n\pi, n\text{ 是整数}\}$,它们的值域都是$(-\infty,+\infty)$.

正割函数 $\sec x$ 和余割函数 $\csc x$ 的性质通常借助余弦函数 $\cos x$ 和正弦函数 $\sin x$ 去理解,不作专门讨论.

(6) 反三角函数

常用的反三角函数有反正弦函数 $y=\arcsin x$,反余弦函数 $y=\arccos x$,反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

反正弦函数 $\arcsin x$ 是正弦函数 $\sin x$ 在主值区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数,因此,反正弦函数的定义域是$[-1,1]$,值域是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. 反正弦函数是单调增加的奇函数. 如图 1-14 所示.

反余弦函数 $y=\arccos x$ 是余弦函数 $\cos x$ 在主值区间$[0,\pi]$上的反函数,因此,反余弦函数的定义域是$[-1,1]$,值域是$[0,\pi]$. 反余弦函数是单调减少的. 如图 1-15 所示.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com