

Sommerfeld 理论物理学 (第二卷)



Mechanik Der Deformierbaren Medien

变形介质力学

I

〔德〕Arnold Sommerfeld/著

范天佑 李显方 廖日东 郭瑞平/译

范天佑 王国玉 李 植 缪劲松/校



科学出版社

Sommerfeld 理论物理学

(第二卷)

变形介质力学

〔德〕 Arnold Sommerfeld 著

范天佑 李显方 廖日东 郭瑞平 译

范天佑 王国玉 李 植 缪劲松 校

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本卷为 Sommerfeld 理论物理学的第二卷, 讨论变形介质力学, 从统一的观点分析流体力学、弹性理论、塑性与位错理论, 内容完整全面. 有些内容, 例如, 晶体位错理论、晶体低温比热的弹性理论基础, 等等, 是其他连续介质力学和理论物理学教程中所没有的, 它们是著者和他的学生的独创, 这是本书的一大特点. 同时著者对相关理论的发展历史, 追根溯源, 提供了极其珍贵的原始文献, 对研究物理学相关学科发展史, 极具参考价值.

本卷根据 *Mechanik der Deformierbaren Medien*, Ditrich Verlag Buchhandlung, Wiesbaden, 1943 年的德文版和它的英文版(*Mechanics of Deformable Bodies* Academic Press Inc, Publisher, New York, 1950 年)翻译, 同时根据 Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/M, 1992 年的德文增补版增补翻译了第九章塑性与位错, 第九章习题和习题解答, 以及 4 个附录.

本书适合高等院校物理专业、力学专业和数学专业的本科生、研究生和大学教师作为教材, 也可供相关专业教师和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

变形介质力学/(德)阿诺德·索末菲著; 范天佑等译. —北京: 科学出版社, 2018.3

(Sommerfeld 理论物理学; 第二卷)

书名原文: *Mechanik der deformierbaren Medien: Vorlesungen ueber Theoretische Physik, Band II*

ISBN 978-7-03-056946-2

I. ①变… II. ①阿… ②范 III. ①连续介质力学 IV. ①O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 049671 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 彭珍珍 樊雅琼

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2018 年 3 月第一次印刷 印张: 25 3/4

字数: 516 000

定价: 178.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

Sommerfeld 及其成就



Arnold Sommerfeld (1868—1951)

Sommerfeld 是德国伟大的理论物理学家、应用数学家、流体力学家、教育家、原子物理与量子物理的创始人之一。他对理论物理多个领域, 包括力学、光学、热力学、统计物理、原子物理、固体物理 (包括金属物理) 等有重大贡献, 在偏微分方程、数学物理等应用数学领域也有重要贡献。他引进了第二量子数 (角量子数)、第四量子数 (自旋量子数) 和精细结构常数, 等等。20 世纪最伟大的物理学家之一 Planck 在获得 1918 年度诺贝尔物理学奖的颁奖典礼的仪式上的演讲中指出: “Sommerfeld … 便可以得到一个重要公式, 这个公式能够解开氢与氦光谱的精细结构之谜, 而且现在最精确的测量 … 一般地也能通过这个公式来解释 … 这个成就完全可以和海王星的著名发现相媲美。早在人类看到这颗行星之前 Leverrier 就计算出它的存在和轨道。”

Sommerfeld 思想深刻, 研究成果影响深远。例如, 他去世后发展起来的数值广义相对论和新近崛起的引力波理论研究中, 还引用 “Sommerfeld 条件”, 该条件在求解中发挥了重要作用。这再次彰显了他的科学工作的巨大价值。

Sommerfeld 非常重视教育, 他培养的博士生中有 Heisenberg, Debye, Pauli 和

Bethe 四人获诺贝尔物理学或化学奖, 博士后中有 Laue, Pauling 和 Rabi 三人获诺贝尔物理学或化学奖, 他的学生中还有数十位国际顶尖科学家, 如 Hopf, Meissner, Froehlich, Brillouin, Morse 等, 这在迄今所有作为研究生导师的科学工作者与教育工作者中是绝无仅有的. 这些学生中除了 Laue 的成就在晶体衍射, Hopf 等在流体力学, Morse 等在数学方法等领域之外, 绝大多数在量子物理与量子化学领域, 他被称为“量子理论之父”是当之无愧的. 当然其中有时代的条件, 他置身于经典物理向现代物理发展的关键时期: 20 世纪初, 德国是世界量子物理研究的中心, 而他所在的 Goettingen 大学和 Muenchen(Munich) 大学又是德国量子物理研究的中心, 他本人又居该中心的中心. 在年龄上, 他位于量子理论的开创者 Planck (1858—1947) 和集大成者 Schroedinger (1887—1961) 的中间, 承上启下. 这按中国话讲, 是“时势造英雄”. 除去客观条件外, 他本人的深邃的洞察力, 集数学物理和理论物理的才能于一身, 科学地组织讨论班, 发现人才, 提携后学, 等等, 也是他成功的原因之一. 1918 年起他担任德国物理学会主席, 1920 年创办和长期主持《德国物理学杂志》(*Zeitschrift fuer Physik*), 编委会决定任何一位有信誉的科学工作者的原始性研究论文, 不经审稿人审查就发表, 从稿件收到至发表最快仅两个星期, 这极大地推动了科学理论的发展, 其中包括使得 Heisenberg, Born 和 Jordan 等的矩阵量子力学的论文及时得以报道, 促进了量子力学在德国的发展. 他同时热诚地对奥地利青年科学家 Schroedinger 的波动量子力学给以崇高的评价, 热诚支持它的发展 (Schroedinger 的论文是由 Planck 主编的, 另一本德国物理杂志——《德国物理年鉴》(*Annalen der Physik*) 上得以及时报道的). 可见当时德国科学界伯乐不少, 办事公平和效率之高. 他本人当然是一位天才. Born 称赞他具有发现和发展天才的才能. Einstein 佩服他凝聚和造就了那么多青年天才. 他领导和大大推动了 1910—1930 年全世界原子结构与光谱学的研究, 这属于微观物理的领域. 同时在流体动力学等宏观领域也很有成就, 他指导 Hopf 与 Heisenberg 等在湍流方面的研究, 对后来的研究者, 包括取得很大成就的美籍中国科学家林家翘等都有重要影响, 等等. 按中国话说, 这又是“英雄造时势”.

Sommerfeld 一生的著述丰富, 其中之一是由他的讲课手稿整理的理论物理教程 (*Vorlesungen ueber theoretische Physik*), 共六卷, 包括: 第一卷力学 (*Mechanik*), 第二卷变形介质力学 (*Mechanik der deformierbaren Medien*), 第三卷电动力学 (*Elektrodynamik*), 第四卷光学 (*Optik*), 第五卷热力学与统计学 (*Thermodynamik und Statistik*), 第六卷物理学中的偏微分方程 (*Partielle Differentialgleichungen der Physik*). 迄今各国先后出版了各种理论物理教程, 那些著者都是有成就的科学家. 像 Sommerfeld 这样对教程所涉及的各个领域都有重要贡献的著者, 还不多见. 另外, 在所有理论物理的教程中含有内容极其丰富的《光学》单独一卷, 《物理学中的偏微分方程》单独一卷的, 这是唯一的一套, 因为 Sommerfeld 本人在这两个领域都有重要

贡献, 这又构成此教程的特点之一. 这套书既是教程, 又是科学专著, 包含他本人, 他的学生, 例如 Debye 对固体比热, Heisenberg 对湍流的原创性的贡献的详细讨论的珍贵资料, 等等, 它对物理学、物理学教学和物理学史都有重要意义. 这一教程早就译成英文、法文、俄文和日文等其他文种出版, 遗憾的是, 迄今尚未见中文译本. 其实, 前辈学者早就酝酿过翻译成中文工作, 由于当时条件的局限, 迟迟未能实现. 现在的译本可以说是为圆他们的梦而作的一点努力, 但是未必做得好. 不过该教程不包括量子力学. 为了弥补这一缺憾, 此套译本之外补充一卷 Sommerfeld 1929 年出版的《波动力学》(德文原名 *Atombau und Spektrallinien, Wellenmechanischer Ergänzungsband*——原子结构与光谱, 波动力学补编) 的译本, 当然不作为他的这套教程中的一本 (顺便指出, 他的《原子结构与光谱》, 共 1555 页, 是另一套伟大的科学巨著). 通过读这博大精深的七本书, 我们可以看到, Sommerfeld 对理论物理的各个领域, 从宏观力学到量子力学, 从物理到数学都有创造性贡献, 这在所有目前已经出版的各种理论物理教程的著者中可能是绝无仅有的.

习近平主席 2016 年在全国高等学校思想政治工作会议上指出, 只有培养出世界一流人才的大学才能成为世界一流大学. 培养优秀人才, 需要优秀教材和优秀科学专著. Sommerfeld 这套培养出 7 位诺贝尔物理奖或化学奖的理论物理教程, 会提供我们借鉴和学习的一个良好材料.

这套书能译成中文, 应该感谢德国已故物理学家 Prof. H. G. Hahn (他属于 Sommerfeld 最后一波的学生) 多年前的建议, 当时他得知 Sommerfeld 的《理论物理学》尚无中文译本, 建议今后能出中文译本, 认为它会有益于中国青年学者和学生. 也感谢德国 Stuttgart 大学理论物理研究所前所长 Prof. H-R Trebin, 他从德国寄来这套书的德文版的第四卷和第五卷, 帮助了翻译和校对工作.

最后简单介绍一下原著和翻译的情况. 原书写于 1942 年, 是第二次世界大战最激烈的时期, 结束于 1951 年, 他不幸死于车祸, 第五卷尚未完稿, 后来由他的学生继续完成. 当时情况困难, 写出一卷, 就出版一卷, 出版社很分散. 第二次世界大战之后, 德国分裂为德意志民主共和国 (东德) 和德意志联邦共和国 (西德), 它们分别出版 Sommerfeld 的理论物理学, 出版社更加分散, 书一版再版. 其间, 他的学生们对一些卷的内容作了增补和修订, 其中第二卷增补最大, 增加了一章 (第九章)——塑性有位错. 它从物理学观点分析位错, 并且把晶体变形与宇宙时间 - 空间弯曲做了类比, 也就是和 Einstein 广义相对论做了类比, 这一思想很新颖. 包括这一章的习题和习题解答以及四个附录在内, 超过 80 页, 相当于原书的四分之一的篇幅. 第三卷增补了广义相对论和引力波的内容, 等等. 1991 年两德统一前后, 由 Harri Deutsch 出版社统一出版, 现在我们采用的作为最终校对的就是这一版本.

该书首卷 1943 年出版后, 美国首先出版了英文译本, 其中许多译者是过去在德国留学的 Sommerfeld 的学生, 翻译得很出色, 这些英文译本成为我们现在翻译

的有力的资料。鉴于这些英文译本出版时间比较早,而且还存在许多错误,甚至有的德文词句未能翻译,德文版后来的增补和修订版的内容在英文翻译版中没有,只能按照德文版翻译。现在的中文翻译稿是按照德文原版和英文版翻译的结果,因为我们德文水平的局限,也只能这么做。做的不好之处,请读者多多批评指正。

此书中文译本的出版,得到北京理工大学物理学院、爆炸科学与技术国家重点实验室和教务处以及某些译者个人的资助。

总 序

因受到以前学生的鼓励和出版社的多次邀请,我决定出版一本关于理论物理学课程的书,这也是我在 Muenchen 大学教授了长达三十二载的课程。

该课程属于基础课程,听课的学生有的来自 Muenchen 大学和理工学院物理专业,有的来自数学和物理学专业,也有的来自天文学和物理化学专业,他们大部分都是大三、大四的学生。该课程每周四次课,并辅以两小时的答疑时间。本书并未涉及现代物理学的专业课程。专业课程的讨论主要集中在我的论文和其他专著中,虽然在研究背景和文献综述中有提及量子力学,但这些课程的核心依然是经典物理学。

课程顺序安排如下:

1. 力学
2. 变形介质力学
3. 电动力学
4. 光学
5. 热力学和统计学
6. 物理中的偏微分方程

力学课程由我和另一位数学专业的同事轮流讲授。流体动力学、电动力学和热力学则由较为年轻的老师讲授。矢量分析会在单独的课程中讲授,本系列课程将不会涉及。

本书将会基本沿用我上课的风格,我不会拘泥于数学论证,而是将主要精力用来解决物理问题。我希望通过适当的数学和物理学角度,为读者展现物理学的生动性和趣味性。因此,若本书在系统论证和公理结构部分留有空白,我也不会过于苛求。我不希望读者被冗长繁琐的数学论证和错综复杂的逻辑推理所吓倒,进而分散了物理学本身的趣味性。这种风格在课堂教学中颇有成效,故而被运用到本书的撰写中。Planck 的课程在理论框架部分是无可挑剔的,但我相信我可以提出更广泛的题材并能更灵活地使用数学方法解决问题。此外,我很乐意更全面更彻底地向读者介绍 Planck 的理论知识,尤其是热力学和统计学。

各卷末收集的问题是对正文的补充。这些问题是学生的课下作业,并在课堂答疑环节进行了讨论。基础的数学问题并未收录在书末的附录内。问题按章节进行了排序。每个小节、每个方程都有编号。因此,通过给出小节和方程的编号,便可找到每卷内引用的方程。为了便于查询和翻阅,每个页面左上角都标有章节号。

回顾多年的教学生涯,我由衷感谢伦琴和菲利克斯·克莱因.伦琴不仅为我的学术活动创造了外部条件,让我得以享受优厚待遇,并且多年陪伴在我左右,致力于拓宽我的研究范围.在我职业生涯早期,菲利克斯·克莱因向我传授了最适合于教学的实践方法;他深谙教学之道,对我的教学方式产生了强烈而又潜移默化的影响.值得一提的是,当我在 Goettingen 大学任指导教授时,我的课程虽不如现在的六卷那么全面,但是却在听众中引起了很大的共鸣.后期,当我重新讲授这门课程时,我的学生经常向我反馈;他们只有在这里才真正掌握了数学结果的处理和应用,例如傅里叶方法、函数理论的应用和边界值问题.

最后,由衷希望这本书能激发读者对物理学的兴趣,同时,也希望本书带给读者的是身临其境的听课体验.

Arnold Sommerfeld

Muenchen, 1942 年 9 月

第一、二卷序

因受到以前学生的鼓励和出版社的多次邀请,我决定出版一本关于理论物理学课程的书,这也是我在 Muenchen 大学讲授了长达三十二载的课程。

该课程属于基础课程,听课的学生有的来自 Muenchen 大学和理工学院物理专业,有的来自数学和物理学师范专业,也有的来自天文学和物理化学专业,他们大部分都是大三、大四的学生。该课程每周四次课,并辅以两小时的答疑时间。本书并未涉及现代物理学的专业课程。专业课程的讨论主要集中在我的论文和其他专著中。虽然在研究背景和文献综述中有提及量子力学,但这些课程的核心依然是经典物理学。

课程顺序安排如下:

1. 力学
2. 变形介质力学
3. 电动力学
4. 光学
5. 热力学和统计学
6. 物理学中的偏微分方程

力学课程由我和另一位数学专业的同事轮流讲授。流体动力学、电动力学和热力学则由较为年轻的老师讲授。矢量分析会在单独的课程中讲授,本系列课程将不会涉及。

本书将会基本沿用我上课的风格,我不会拘泥于数学论证,而是将主要精力用来解决物理学问题。我希望通过适当的数学和物理学角度,为读者展现物理学的生动性和趣味性。

因此,若本书在系统论证和公理结构部分留有空白,我也不会过于苛求。我不希望读者被冗长繁琐的数学论证和错综复杂的逻辑推理所吓倒,进而分散了物理学本身的趣味性。这种风格在课堂教学中颇有成效,故而被运用到本书的撰写中。Planck 的课程在理论框架部分是无可挑剔的,但我相信我可以提出更广泛的题材并能更灵活地使用数学方法解决问题。此外,我很乐意更全面更彻底地向读者介绍 Planck 的理论知识,尤其是热力学和统计学。

各卷末收集的问题是对文本的补充。这些问题是学生的课下作业,并在课堂答疑环节进行了讨论。基础的数学问题并未收录在书末的附录内。问题按章节进行了排序。每个小节、每个方程都有编号。因此,通过给出小节和方程的编号,便可找到

每卷内引用的方程。

第二卷给出了部分数学方法完善的推演过程。这些方法通常是在理论物理学入门课程中进行阐述的；本书将其合并第二卷，故而，第二卷内容较为庞杂。但是第二卷的核心内容是具有无限自由度系统的力学，因此，在本卷中，常微分方程（控制具有有限自由度系统的力学）被偏微分方程所取代，矢量代数被矢量分析取代，这些内容在第一章略有涉及。另外，张量分析是弹性固体和黏性流体理论中不可或缺的工具，也是本卷的重要内容。这部分内容在笛卡儿坐标中已经被证明并且其中一部分可以推广到正交曲线坐标。

本卷中所提及的部分观点比同级别教科书更为完善。第一章第2节证明了涡旋是一个轴向矢量（或反对称张量）。第二章第10节涉及两个相似的定律和两个相应的不变量，除了通常的 Reynolds 数之外，还有表示压力依赖性的无量纲数 S 。第三章第15节讨论了准弹性体（陀螺乙醚）；它在连续介质中的逻辑位置与第一章第1节中形变基本定理相当。其目的是在讨论中展示电动力学与力学的基本差异，而不是用机械模型来解释 Maxwell 方程组。第五章第27节和第28节探讨了圆形波和船行波的相关问题。应用固定相位法得到完整的计算过程，它是最速下降法的简化。第六章讨论了板和射流问题。在整个计算过程中，板的尺寸和孔口的尺寸等作为参数。这种分析形式可能比通常采用无量纲数量的分析方法更有吸引力。根据 Maue 的做法，推广了 Kármán 的涡街（第32节）使得包括不平行于涡街的非对称情况。第七章第36节对轴颈轴承的流体动力理论进行了简要论述。第37节讨论了 Riemann 的冲击波理论，特别是关于 Bechert 在某些初等可积的情况下得到的结果。第38节是较难的湍流问题的历史和现状报告，并介绍了 Burgers 的湍流数学模型。第八章第43节阐释了螺旋弹簧的问题，并以弯扭组合为例。第44节讨论了振动平行六面体的边界条件和固体比热的量子理论热力学基础*。

很明显，本书中所涉及的专题在短短一个学期的课程中并不能全部涉及，因此，上述提到的部分专题是在本书中特意添加的。

第二卷补充了限于三维和正交线元素的一般张量微积分的表示方法。对于书中所涉及的例子分析，简单的矢量解析公式即可，张量微积分的用处不大（参见附录IV），但是由于它在广义相对论中十分重要，若想用数学方法完整阐述理论物理学，这一部分不能完全省略。

关于湍流问题的讨论，在第一版中已经出现了很大的困难，必须对 CF von Weizsaecker 和 W. Heisenberg 未发表的作品进行修改。依我之见，CF von Weizsaecker 和 W. Heisenberg 所研究的“各向同性湍流”的特殊案例，推翻了长期以来将 Navier-Stokes 方程整合为非线性形式来解释湍流的做法。正如气体的动力学理论一样，在

* 即固体低温比热 Debye 量子理论，这一结果非常重要，声子概念由此而诞生，后来发展成固体物理学和凝聚态物理学重要分支——晶格动力学。——译者注

这一案例中, 统计方法具有相对的优越性. 当然, 本书不可能对新的结果进行详细的回顾, 但是以前的表述必须按照新的观点加以纠正.

Arnold Sommerfeld
Muenchen, 1946 年 7 月

目 录

Sommerfeld 及其成就

总序

第一、二卷序

第一章 变形介质运动学	1
1. 运动学基本定理	1
2. 矢量分析回顾	8
3. Gauss, Stokes 和 Green 定理	16
4. 张量分析概要	21
第二章 变形介质静力学	31
5. 应力的概念, 变形介质的一般分类	31
6. 不可压缩流体的平衡 (流体静力学)	34
7. 可压缩流体静力学	41
8. 弹性固体的应力状态	46
9. 应变-应力关系, 弹性常数, 弹性势	51
10. 黏性压力和耗散, 尤其在不可压缩流体中	60
第三章 变形介质动力学	69
11. 理想不可压缩流体的 Euler 方程	69
12. 根据 Hamilton 原理推导 Euler 方程 压力 Lagrange 乘子	74
13. 理想可压缩流体的 Euler 方程及其在声学中的应用	78
14. 弹性体动力学	88
15. 作为以太模型的准弹性介质	90
16. 黏性流体动力学 流体力学和水力学 湍流的 Reynolds 准则	94
17. 关于毛细管现象的几个要点	102
第四章 涡旋理论	108
18. Helmholtz 涡旋理论	108
19. 二维和三维势流	114
20. 矢量分析的基本定理	124
21. 直的与平行的涡丝	129
22. 圆形涡环	136

第五章 波动理论	142
23. 深水中的平面重力波	142
24. 浅水与中度深水中的平面重力波	146
25. 平面毛细波和毛细-重力组合波	152
26. 群速度概念	156
27. 圆形波	161
28. 船行波 (Kelvin 极限角和 Mach 角)	169
第六章 给定边界的流动	175
29. 平板绕流	175
30. 尾区的问题, 间断面	182
31. 用保角映射求解自由射流问题	189
32. Karman 涡街	195
33. Prandtl 边界层	202
第七章 所选择流体动力学问题的补充注释	205
34. Lagrange 方程	205
35. Stokes 阻力定律	207
36. 润滑的流体动力学理论	213
37. Riemann 激波, 描述可压缩一维流动 Euler 方程的一般积分	221
38. 湍流	227
第八章 弹性理论增补	240
39. 晶体弹性	240
40. 梁的弯曲	244
41. 扭转	250
42. 螺旋弹簧的弯曲扭转	256
43. Debye 比热的弹性理论基础	261
44. 弹性半空间的表面波	270
第九章 塑性与位错	279
45. 引论	279
46. 塑性的实验结果	282
47. 位错	287
48. 晶体缺陷场论	301
49. 连续介质塑性理论	332
习题	343
习题解答	352

附录	386
附录 I 在正交曲线坐标系中矢量与张量分析, 一阶微分的表示	386
附录 II 附录 I 的结果在柱坐标和球坐标中的应用	389
附录 III 二阶微分表示, 在柱坐标和球坐标中的应用	391
附录 IV 与广义相对论的联系	393

第一章 变形介质运动学

1. 运动学基本定理

在关于涡旋运动的论文开篇, Helmholtz 建立了下列定理^①: 一个可变形介质(非刚体)上充分小单元的最普通运动可以表示为如下几项之和

- (1) 平移;
- (2) 旋转;
- (3) 在三个相互正交方向上的膨胀/拉伸(收缩).

该定理可通过两个相邻点 P 和 O 在原始坐标差值基础之上的相对位移的 Taylor 展开式进行证明.

设 P 是所考虑的体积单元上一点, 其笛卡儿坐标为 x, y, z , 坐标原点 O 位于单元内. 在通常介质运动中, 点 P 和 O 关于固定空间坐标系都经历位置变化, 其位移可以分别用 ξ, η, ζ 和 ξ_0, η_0, ζ_0 来表示. 对点 P 的位移来说, 其 Taylor 展开式为

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 + \frac{\partial \xi}{\partial x}x + \frac{\partial \xi}{\partial y}y + \frac{\partial \xi}{\partial z}z + \cdots \\ \eta = \eta_0 + \frac{\partial \eta}{\partial x}x + \frac{\partial \eta}{\partial y}y + \frac{\partial \eta}{\partial z}z + \cdots \\ \zeta = \zeta_0 + \frac{\partial \zeta}{\partial x}x + \frac{\partial \zeta}{\partial y}y + \frac{\partial \zeta}{\partial z}z + \cdots \end{cases} \quad (1)$$

引入简记

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a_{11}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = a_{12}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = a_{21}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = a_{22}, \quad \cdots \quad (2)$$

把每个量 a_{ik} 写成一个“奇”项和一个“偶”项之和的形式:

$$a_{ik} = \frac{a_{ik} - a_{ki}}{2} + \frac{a_{ik} + a_{ki}}{2}$$

“奇”和“偶”表示下标交换的奇偶性.

于是, 式 (1) 可以写为下列形式:

$$\xi = \xi_0 + \left(0 + \frac{a_{12} - a_{21}}{2}y + \frac{a_{13} - a_{31}}{2}z \right)$$

^① Ueber Integrable der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelles J. 55,25(1858).

$$\begin{aligned}
 & + \left(a_{11}x + \frac{a_{12} + a_{21}}{2}y + \frac{a_{13} + a_{31}}{2}z \right) \\
 \eta = & \eta_0 + \left(\frac{a_{21} - a_{12}}{2}x + 0 + \frac{a_{23} - a_{32}}{2}z \right) \\
 & + \left(\frac{a_{21} + a_{12}}{2}x + a_{22}y + \frac{a_{23} + a_{32}}{2}z \right) \\
 \zeta = & \zeta_0 + \left(\frac{a_{31} - a_{13}}{2}x + \frac{a_{32} - a_{23}}{2}y + 0 \right) \\
 & + \left(\frac{a_{31} + a_{13}}{2}x + \frac{a_{32} + a_{23}}{2}y + a_{33}z \right) \quad (3)
 \end{aligned}$$

式中省略了高阶项, 并引入符号 s 表示点 P 的位移, 式 (3) 中的分隔括号说明位移 s 是由三个分运动 s_0, s_1, s_2 构成的, 即

$$s = s_0 + s_1 + s_2 \quad (4)$$

对一个体积元的所有点 P 来说, 位移 s_0 的坐标分量 ξ_0, η_0, ζ_0 是相同的, 因而是平移.

式 (3) 中的中间部分 s_1 是旋转. 引入矢量 φ 和位置矢量 $OP = r$, 其中 φ 的分量为

$$\varphi_x = \frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \quad \varphi_y = \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \quad \varphi_z = \frac{a_{21} - a_{12}}{2} \quad (5)$$

可以得到

$$s_1 = \varphi \times r \quad (6)$$

上述位移在刚体运动学中是众所周知的 (Vol. I^①, Eq. 22.3), 它相当于由 $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ 给出旋转轴和大小的无穷小旋转 φ (更恰当的标记应该是 $\delta\varphi$)^②.

从严格意义上来说, 无穷小旋转不是矢量, 它和描述平移位移的极矢量不同. 然而, 我们仍然用通常的矢量符号体系来表示它, 此时极矢量 φ 指向旋转轴方向并且长度等于无穷小旋转角. 关于轴矢量的更多内容可参考本章第 2 节.

当然, 矢量 OP 的长度并没有因为位移 s_1 而发生变化. 从刚体运动学的观点来考虑 s_1 是显而易见的, 这里我们会独立地给出证明. 距离 $\overline{OP}$ 的平方为

$$\overline{OP^2} = |r + s_1|^2 = |r|^2 + 2r \cdot s_1 + |s_1|^2$$

① A. Sommerfeld, Vorlesungen ueber Theoretische Physik, Akademische Verlags-gesellschaft, Leipzig, 1944, Bd.I, quoted henceforth as Vol.I. English translation in press (Academic Press Inc., New York).

② 参见 J. L. Synge and B.A.Griffith, Principles of Mechanics, Mcgraw-Hill, New York, 1942 Sec. 10.5.