

数字图像处理

■ 王延江 林 青 编著



DIGITAL IMAGE PROCESSING



TEACHING MATERIALS
FOR COLLEGE STUDENTS
高等学校教材

高等学校教材

王延江 林 青 编著

王延江 林 青 编著

[illegible][illegible]

图书在版编目(CIP)数据

数字图像处理/王延江,林青编著. —东营:中
国石油大学出版社,2016.11

ISBN 978-7-5636-5398-0

I. ①数… II. ①王…②林… III. ①数字图象处理
IV. ①TN911.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 262233 号

数字图像处理

王延江 林青 著

中国石油大学(华东)规划教材

书 名:数字图像处理

作 者:王延江 林 青

责任编辑:高 颖(电话 0532—86983568)

封面设计:赵志勇

出 版 者:中国石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)

网 址: <http://www.uppbook.com.cn>

电子信箱: shiyoujiaoyu@126.com

印 刷 者:青岛星球科教印刷有限公司

发 行 者:中国石油大学出版社(电话 0532—86981531,86983437)

开 本:185 mm×260 mm 印张:10 字数:236 千字

版 次:2016 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

印 数:1—1 000 册

定 价:20.00 元

中国石油大学出版社

前言

数字图像处理主要是应用数字信号处理理论与方法对图像进行采集、加工、变换、去噪、复原、增强、分割、编码、传输以及对图像内容进行理解和识别的一门技术学科,它在军事、农业、工业、气象、地质、生态、模式识别、版权保护、人机交互以及智能安全监控等众多领域都有广泛的应用。随着计算机技术、人工智能以及认知科学的迅猛发展,数字图像处理技术的发展日新月异。人们已经开始研究如何让计算机能够像人类一样对环境进行感知、解释和理解。目前已经可以借鉴人类视觉注意机制运用计算机对感兴趣的目标区域进行提取和定位,利用神经元的特性对图像进行编码表达,而有关人脑记忆的研究也开始应用于图像的存储、表达和分类中。随着认知科学、脑科学和智能科学的不断发展,相信在不久的将来,计算机对图像目标的理解和解释水平会发展到一个崭新的水平,而数字图像处理这一技术学科将为人类科技的进步和发展做出更大的贡献。

为了使电子信息类本科专业学生充分了解、学习和掌握数字图像处理技术,作者根据多年从事本课程教学和科研实践的体会,并参考国内外相关资料以及图像处理技术的最新发展编写了本书。本书共分7章,内容既涵盖了传统的图像处理方法,如图像增强、图像复原和图像编码,又增加了一些新的图像处理内容,如图像特征表达中的局部二值模式(LBP)、Gabor变换、尺度不变特征变换(SIFT)、快速鲁棒特征(SURF)、稀疏编码(Sparse Coding)以及运动图像处理中的混合高斯背景建模(GMM)和粒子滤波(Particle Filter)运动目标跟踪等。书中对每一种图像处理算法都给予理论介绍并给出相应的处理实例,以便于学生学习和应用。

本书由王延江、林青编著,其中王延江负责编写第1~4章和第6章,林青负责编写第5章以及全书的习题和算法验证,齐玉娟负责编写第7章,全书由王延江统稿。另外,实验室的刘宝弟博士,博士研究生邓立苗,硕士研究生牛萧然、杜宾和王付良等在本书的资料整理等各个方面都做了大量的工作,在此表示感谢!

北京交通大学阮秋琦教授和清华大学章毓晋教授对本书进行了审阅,并对部分章节内容提出了宝贵的建议,在此一并表示感谢!

限于作者的水平,书中不妥及错误之处在所难免,恳切希望读者给予批评指正。

作者

2016年8月

目 录

第1章 数字图像处理基础	1
1.1 图像与数字图像	1
1.2 数字图像处理	2
1.3 数字图像处理的应用和发展	3
思考题	5
第2章 正交变换	6
2.1 信号的正交分解	6
2.2 傅里叶变换	7
2.2.1 二维傅里叶定理	7
2.2.2 二维傅里叶变换的性质	7
2.2.3 二维离散傅里叶变换	9
2.3 离散余弦变换(DCT)	11
2.3.1 DCT 的定义	11
2.3.2 DCT 的计算	12
2.4 K-L 变换	14
2.4.1 K-L 变换的基本概念	14
2.4.2 K-L 变换原理	16
2.5 小波变换	18
2.5.1 引言	18
2.5.2 连续小波变换	18
2.5.3 连续小波变换的性质	21
2.5.4 小波反变换	23
2.5.5 离散小波变换	24
2.5.6 多分辨率分析与 Mallat 算法	25
2.6 本章小结	32

思考题	32
第3章 图像增强	34
3.1 灰度变换	34
3.1.1 线性变换	34
3.1.2 分阶段线性变换	35
3.1.3 非线性变换	36
3.2 直方图修正	37
3.2.1 直方图	37
3.2.2 直方图均衡化	38
3.2.3 直方图规定化	41
3.3 图像平滑	44
3.3.1 图像噪声	44
3.3.2 邻域平均法	46
3.3.3 中值滤波	47
3.3.4 低通滤波	48
3.3.5 多图像平均法	51
3.4 图像锐化	51
3.4.1 微分法	51
3.4.2 拉普拉斯算子	54
3.4.3 高通滤波	56
3.5 本章小结	57
思考题	58
第4章 图像复原	59
4.1 图像复原基本理论	59
4.2 图像复原方法	60
4.2.1 逆滤波复原	60
4.2.2 维纳滤波复原	61
4.2.3 有约束最小二乘复原	61
4.2.4 L-R 复原	62
4.3 图像复原质量评价	63
4.4 图像复原实例	64
4.4.1 维纳滤波复原实例	64
4.4.2 最小二乘复原实例	65
4.4.3 L-R 复原实例	68
4.5 本章小结	70
思考题	70

第 5 章 图像压缩编码	71
5.1 基础知识	71
5.1.1 图像数据冗余	71
5.1.2 图像压缩模型	72
5.1.3 图像信源压缩编码分类	74
5.2 图像编码中的保真度准则	74
5.2.1 客观保真度准则	74
5.2.2 主观保真度准则	75
5.3 统计编码	75
5.3.1 单义可译码和非续长码	76
5.3.2 信源编码效率与冗余度	77
5.3.3 霍夫曼编码	77
5.3.4 算术编码	79
5.3.5 游程编码	80
5.3.6 比特平面编码	82
5.4 预测编码	84
5.4.1 无损预测编码	84
5.4.2 有损预测编码	85
5.4.3 运动补偿	87
5.5 块变换编码	88
5.5.1 变换选择	88
5.5.2 子图像尺寸选择	89
5.5.3 编码	89
5.5.4 JPEG	90
5.6 视频压缩编码国际标准	94
5.6.1 H.261 标准	95
5.6.2 MPEG-1 标准	99
5.7 数字图像水印技术	101
5.7.1 数字水印分类	101
5.7.2 数字水印评价标准	101
5.7.3 数字水印系统模型	102
5.7.4 一种基于 DWT 与 HVS 的盲水印算法	103
5.8 本章小结	105
思考题	105
第 6 章 图像分割与描述	107
6.1 图像分割	107
6.1.1 阈值分割	108

6.1.2	边缘检测	110
6.1.3	区域分割方法	111
6.2	图像描述	114
6.2.1	边缘描述	114
6.2.2	纹理描述	117
6.3	图像整体特征表达	121
6.3.1	局部二值模式	121
6.3.2	Gabor 特征	123
6.4	图像局部特征描述	125
6.4.1	尺度不变特征变换(SIFT)	125
6.4.2	快速鲁棒特征(SURF)	129
6.5	稀疏编码	131
6.5.1	稀疏编码原理	131
6.5.2	标准稀疏编码算法	132
6.6	本章小结	134
	思考题	134
第 7 章	运动图像处理	135
7.1	运动目标检测	135
7.1.1	常用运动目标检测方法	135
7.1.2	混合高斯模型	138
7.2	运动目标跟踪	141
7.2.1	目标跟踪方法分类	141
7.2.2	粒子滤波	142
7.3	本章小结	146
	思考题	146
附 录		147
参考文献		151

第 1 章 数字图像处理基础

1.1 图像与数字图像

图像(Image)是指用镜头或成像设备得到的物体的一种描述或再现,它不同于人工描绘的图画(Picture),也不同于一般的几何图形(Graphics)或图案(Pattern)。

数字图像(Digital Image)是指把一幅图像转换成适合计算机或数字设备处理的数字信号。这一过程主要包括图像获取、光电转换和数字化等几个步骤。通常图像获取的方法包括摄像机(Video Camera)、数码相机(Digital Camera)、飞点扫描器(Flying Point Scanner)、扫描鼓(Scanning Drum)、多光谱扫描仪(Multispectral Scanner, MSS)等。

一般地,一幅动态三维空间图像可表示为:

$$I = f(x, y, z, t) \quad (1-1)$$

式中, x, y, z 是空间坐标变量; t 是时间; I 是图像的强度。实际上除可见光(波长 $0.38 \sim 0.8 \mu\text{m}$)外,可成像的射线有很多种,如:

γ 射线 $0.003 \sim 0.03 \text{ nm}$

X 射线 $0.03 \sim 3 \text{ nm}$

紫外线 $3 \sim 300 \text{ nm}$

红外线 $0.8 \sim 300 \mu\text{m}$

微波 $0.3 \sim 100 \text{ cm}$

这些射线均可成像。因此,一幅图像又可表示为:

$$I = f(x, y, z, \lambda, t) \quad (1-2)$$

式中, λ 是波长。 λ 不同,物体的入射、反射或吸收也不同,因此所得到的图像亦不同。

如果一幅图像是静止、平面、单色的,则其表示可以简化为:

$$I = f(x, y) \quad (1-3)$$

如果 x, y 为整数,则 $f(x, y)$ 表示一幅数字图像,每一点 (x, y) 表示一个像素(Pixel)。

如果一幅图像为 2^k 级灰度,如 $k=8$,即有 256 级灰度,其中 $0 \leq I \leq 255$,“0”表示纯黑色,“255”表示纯白色,像素值由小到大表示从黑到白的过渡色,则该图像称为灰度图像,如图 1-1(a)所示。

如果一幅图像只有两个灰度级,即 0 或 1,其中“0”表示黑色,“1”表示白色,则该图像称为单色图像(二值图像),如图 1-1(b)所示。二值图像是灰度图像的一种特例。

如果一幅图像为 RGB 彩色图像,则图像中的每一个像素由 R,G,B 三个颜色分量构成;如果每种颜色分量都用 8 位二进制表示,则一幅 RGB 彩色图像中的每个像素均需 24 位二进制表示,也就是说 RGB 彩色图像的存储空间量是对应灰度图像所需空间量的 3 倍。



(a) 灰度图像 (b) 单色图像(二值图像) (c) 彩色图像

图 1-1 图像案例

1.2 数字图像处理

一般来讲,一个基本的数字图像处理系统应包括一台图像数字化仪(Image Digitizer)、一台计算机(Computer)、一台图像显示器(Display Device)以及相应的数字图像处理算法,如图 1-2 所示。



图 1-2 数字图像处理系统

图像数字化仪用于将一幅模拟图像转化为一个图像矩阵,其中的每一个元素称为一个像素,它的大小表示相应图像位置的亮度或颜色值。

图像显示器用于将一幅图像显示、打印或绘制出来,如 CRT(Cathode Ray Tube)显示、激光打印或绘图仪绘制等。

计算机主要用于对输入的图像进行存储、处理和输出,它可以是微型计算机,也可以是工作站,或是有并行处理功能的大型机。

数字图像处理的目的是对输入图像进行加工或变换,改善图像的效果,从而能够更好地使用图像或更有效地传输图像。数字图像处理的主要内容包括几何处理(Geometric Operations)、算术处理(Algebraic Operations)、图像增强(Image Enhancement)、图像复原(Image Restoration)、图像编码(Image Coding)、图像分割(Image Segmentation)、图像识别(Image Recognition)和图像理解(Image Understanding)。

(1) 几何处理。

几何处理主要包括空间坐标变换,灰度插值(Interpolation),图像的放大(Zoom in)、缩小(Zoom out)、移动(Shift)、旋转(Rotation)、变形(Morphing)、校正(Rectification)和配准(Registration)等。

(2) 算术处理。

算术处理主要包括图像像素的加(Sum)、减(Subtraction)、乘(Product)和除(Quotient)运算。如多幅图像平均去噪、运动检测中的背景减除(Background Subtraction)、图像掩膜处理(Masking)以及多光谱(Multispectral)图像中的比值处理(消除阴影)等。

(3) 图像增强。

图像增强的主要目的是改善图像的视觉效果,突出图像中感兴趣的信息,提高图像的清晰度和对比度,以便更好地区分或解释。常用的方法包括直方图增强、灰度变换、图像锐化以及彩色处理等。

(4) 图像复原。

图像复原的主要目的是去除干扰和模糊,恢复退化了的图像的本来面目。如去除雾霾图像中的雾霾,校正成像过程中图像的非线性畸变以及遥感图像中大气层的遮挡等,都属于图像复原。常用的方法包括维纳滤波、逆滤波以及同态滤波等。

(5) 图像编码。

图像编码的主要目的是为了解决因图像数据量比较大而影响图像信息的存储和传输的问题,利用图像信号的统计特性、人类视觉的生理学及心理学特性对图像进行高效编码,从而实现对图像的压缩。常用的方法包括行程编码、LZW 编码、霍夫曼编码、变换编码、分形编码、模型基编码等。

(6) 图像分割。

图像分割的主要目的是将图像分成一些有意义的独立区域,以便于感兴趣目标的换取、识别以及场景的理解。常用的方法包括直方图阈值分割、边缘跟踪、Hough 变换、颜色特征提取等。

(7) 图像识别。

图像识别属于模式识别(Pattern Recognition)范畴,常用的方法是基于统计学的方法,主要包括特征提取(Feature Extraction)和分类学习算法,如神经网络(Neural Network)或支持向量机(Support Vector Machine, SVM)。

(8) 图像理解。

图像理解又称为景物理解(Scene Understanding),其主要目的是对输入的图像内容依据客观世界的知识进行分析、解释和说明。图像理解与其他图像处理方法不同,它输入的是一幅图像,但输出的却是一种描述。

数字图像处理主要是利用计算机编程实现上述各项处理算法,以达到改善图像质量,提高图像传输效率以及理解图像内容等目的。

1.3 数字图像处理的应用和发展

数字图像处理最早出现于 20 世纪 20 年代,当时通过海底电缆从英国伦敦到美国纽约

传输了一幅照片,由于它采用了数字压缩技术,使得其传输时间由一个星期降到仅仅 3 h。数字图像处理作为一门学科大约形成于 20 世纪 60 年代初期。1959 年,苏联“月神 1 号”发回了一张月球背面照片;1966 年,美国“探测 1 号”(Surveyor 1)成功着陆月球表面并传回 11 237 张月球表面照片;1969 年,全世界见证了人类登上月球的奇迹(美国登月宇宙飞船“阿波罗 11 号”成功实现人类登上月球的伟大梦想)以及从火星探测传来的火星照片。这些宇宙探测活动极大地促进了图像处理技术的发展,特别是对图像编码、图像传输以及图像重建技术提出了挑战。在医学领域,图像处理技术同样取得了巨大的成就。1972 年,英国 EMI 公司工程师 Hounsfield 发明了用于头颅诊断的 X 射线计算机轴向断层术,简称 CT (Computerized Tomography)。CT 是用 X 射线束对人体某部位一定厚度的层面进行扫描,由探测器接收透过该层面的 X 射线,转变为可见光后,由光电转换变为电信号,再经 A/D 转换器变为数字量,形成人体该检查部位的断面或立体的图像,根据这些图像就可发现体内任何部位的细小病变。1979 年,这项无损诊断技术获得诺贝尔奖。另一种断层成像技术——磁共振成像(Magnetic Resonance Imaging, MRI)在 20 世纪 80 年代开始应用于医疗诊断,相比于 CT 或超声 PET 等其他成像技术, MRI 的方式更加多样,成像原理更加复杂,所获得的信息也更加丰富。因此,磁共振成像成为医学领域中的一个热门的研究方向,并于 2003 年获得诺贝尔奖。

从 20 世纪 80 年代开始,数字图像处理发展迅速,且日新月异,一些标准测试图像的出现极大地促进了图像处理算法的发展。选取这些测试图像是因为它们包含了丰富的视觉特征,如纹理、阴影和颜色。图 1-3 给出了三幅常用的标准测试灰度图像。

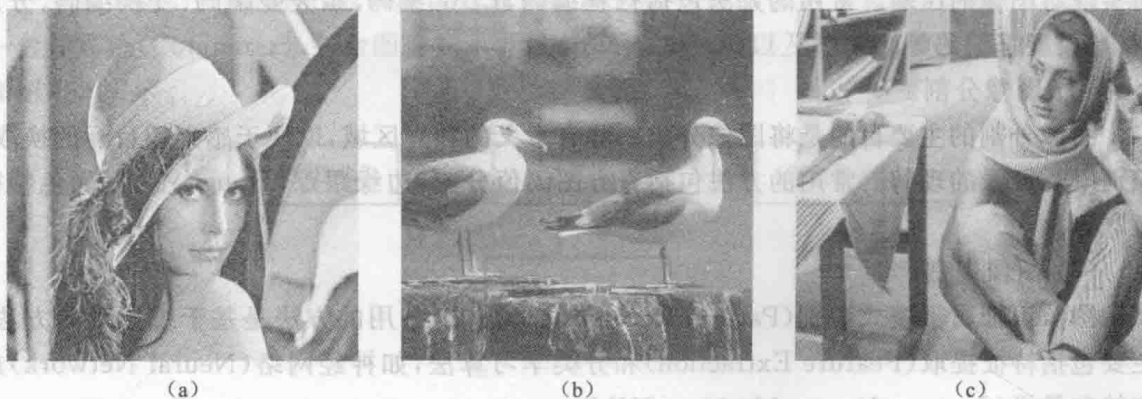


图 1-3 标准测试灰度图像示例

此外,在 20 世纪 80 年代取得的主要成就是静态图像数字压缩格式标准 JPEG (Joint Photographic Experts Group) 以及后来出现的动态图像压缩标准 MPEG,这两项技术的发明极大地促进了图像的存储和传输效率,并成功应用到消费电子技术领域,如 VCD (Video Compact Disc), DVD (Digital Versatile Disc) 和 HDTV (High Definition Television)。到 20 世纪 90 年代,图像处理技术发展更加迅猛,新方法、新技术层出不穷。

此外,数字图像处理在军事、农业、工业、气象、地质、生态、安全监控等众多领域的应用成就同样令人瞩目,特别是利用红外线、微波遥感技术可以侦察到隐藏的军事设施,军事目标的远程跟踪及精确打击系统和基于视频图像序列分析的安全监控以及感兴趣目标的提取识别与跟踪,指纹、虹膜及人脸等生物特征的识别与认证等,对国家和人民生命财产的安全

都至关重要。

随着计算机技术和人工智能以及认知科学的迅猛发展,数字图像处理向更高、更深层次发展。人们已经开始研究如何让计算机能够像人类一样对环境进行感知、解释和理解。目前已经可以借鉴人类视觉注意机制运用计算机对感兴趣的目标区域进行提取和定位,利用神经元的特性对图像进行编码表达,而有关人脑记忆的研究也开始应用于图像的存储、表达和分类中。随着认知科学、脑科学和智能科学的不断发展,相信在不久的将来,计算机对目标的理解和解释将发展到一个崭新的水平,而数字图像处理这一技术学科将为人类科技的进步和发展做出更大的贡献。

思考题

- 1-1 存储一幅 256×256 大小 8 级灰度图像需要多少字节的存储量? 如果是一幅 RGB 的彩色图像呢?
- 1-2 数字图像处理的主要内容包括哪几个方面? 它们有什么相同或不同之处?
- 1-3 什么是二值图像? 存储时每个像素需占多大空间?
- 1-4 简单说明数字图像处理在医学上的应用。
- 1-5 谈谈对数字图像处理的认识和感受。

2.2 傅里叶变换

2.2.1 傅里叶变换

傅里叶变换在信号与系统以及数字信号处理等课程中已经有很详细的分析和介绍,本章重点介绍二维傅里叶变换。

假设二维函数 $f(x, y)$ 满足式 (2-1) 的收敛条件, 则其傅里叶变换存在, 且

$$(2-1) \quad 2.1 \quad \text{二维傅里叶定理} \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty \\ & \int_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)| du dv < \infty \end{aligned} \right.$$

如果二维函数 $f(x, y)$ 满足狄里赫利条件, 则有如下二维傅里叶定理存在:

$$(2-2) \quad F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$(2-3) \quad f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

其中 u, v 为空间频率, 单位是 $1/\text{cm}$ 。式 (2-2) 和式 (2-3) 分别称为二维傅里叶变换的正变换和反变换。由式 (2-2) 和式 (2-3) 可知, 二维傅里叶变换具有互易性, 即

$$(2-4) \quad F(u, v) = F_v(v, u)$$

二维傅里叶变换可用二次一维傅里叶变换实现, 即可先对变量 x 做傅里叶变换, 再对变量 y 做傅里叶变换, 反之亦然。

证明:

$$(2-5) \quad F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx \right] e^{-j2\pi vy} dy$$

第2章 正交变换

图像处理的主要目的是改善图像质量或对图像信息进行压缩传输。传统的空间域处理方法无法观测到图像的频域特征和能量分布。因此,为了更好地处理图像,必须对图像进行正交变换,然后在变换空间中对图像进行处理,处理完后再变回图像空间中。这种变换域的处理方法能够更加有效地获取图像特征,广泛应用于图像增强、图像复原、图像编码及图像识别中。本章将详细讨论目前常用的几种正交变换,如傅里叶变换、离散余弦变换、小波变换等。

2.1 信号的正交分解

记 L_2 为绝对平方可积的函数空间,即

$$L_2 = \{x: \|x\|_2 < \infty\} \quad (2-1)$$

若存在一组函数系:

$$\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \dots\} \quad (2-2)$$

其中, $\varphi_i(t) \in L_2, t \in [a, b]$, 且 $\varphi_i(t)$ 满足条件:

$$\int_a^b \varphi_m(t) \varphi_n^*(t) dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (2-3)$$

则称该函数系为区间 $[a, b]$ 上的标准(归一化)正交函数系。例如: $e^{in\omega t}, \omega = 2\pi/T, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 是区间 $[-T/2, T/2]$ 上的标准正交函数系。如果所有相互正交的函数都在 $\{\varphi_n(t)\}$ 中, 则称该函数系为完备正交函数系。如果 $\forall x(t) \in L_2, t \in [t_1, t_2]$, 则 $x(t)$ 可由正交函数系表示为:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \quad (2-4)$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ 称为 $x(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 上的正交分解。其中:

$$a_n = \int_a^b x(t) \varphi_n^*(t) dt = \langle x(t), \varphi(t) \rangle \quad (2-5)$$

为第 n 项的展开系数,也称为函数 $x(t)$ 在各个函数向量 $\{\varphi_n(t)\}$ 上的投影,符号“ $\langle \rangle$ ”表示内积。

由上述定义可知,正交变换是无损变换,即变换前后信号的能量不变。证明如下:

$$\begin{aligned}\|x(t)\|^2 &= \langle x(t), x(t) \rangle \\ &= \int_a^b x(t) x^*(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m^* \varphi_m^*(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n \cdot a_m^* \int_a^b \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt\end{aligned}\quad (2-6)$$

由 $\{\varphi_n(t)\}$ 的正交性知 $\int_a^b \varphi_n(t) \cdot \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$, 所以有:

$$\|x(t)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n a_n^* = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|a\|^2 \quad (2-7)$$

即信号的二范数等于展开系数的二范数,所以正交变换是保范变换,也即满足 Parseval 定理。

常用的正交变换包括傅里叶变换(Fourier Transform, FT)、离散余弦变换(Discrete Cosine Transform, DCT)、K-L 变换、小波变换(Wavelet Transform, WT)以及沃尔什(Walsh Transform)变换、斜变换(Slant Transform)和哈尔变换(Haar Transform)等。本章重点介绍前面几种正交变换。

2.2 傅里叶变换

一维傅里叶变换在信号与系统以及数字信号处理等课程中已经有很详细的分析和介绍,本节重点介绍二维傅里叶变换。

2.2.1 二维傅里叶定理

如果二维函数 $f(x, y)$ 满足狄里赫利条件,则有如下二维傅里叶定理存在:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2-8)$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2-9)$$

其中, u, v 为广义频率变量。

2.2.2 二维傅里叶变换的性质

1) 可分性

$$F(u, v) = F_y \{F_x[f(x, y)]\} \quad (2-10)$$

一个二维傅里叶变换可用二次一维傅里叶变换来实现,即可先对变量 x 做傅里叶变换,再对变量 y 做傅里叶变换,反之亦然。

证明:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} e^{-j2\pi vy} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx \right] e^{-j2\pi vy} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \{F_x[f(x, y)]\} e^{-j2\pi vy} dy \\
 &= F_y\{F_x[f(x, y)]\}
 \end{aligned}$$

2) 线性

傅里叶变换属于线性变换,即满足叠加原理:

$$\begin{aligned}
 F[a_1 f_1(x, y) + a_2 f_2(x, y)] &= a_1 F[f_1(x, y)] + a_2 F[f_2(x, y)] \\
 &= a_1 F_1(u, v) + a_2 F_2(u, v)
 \end{aligned} \quad (2-11)$$

3) 共轭对称性

若 $f(x, y)$ 的傅里叶变换为 $F(u, v)$, 则 $f(-x, -y)$ 的傅里叶变换为 $F(-u, -v)$, 且满足:

$$F(u, v) = F^*(-u, -v) \quad (2-12)$$

证明:

$$F[f(-x, -y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x, -y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

令 $x_1 = -x, y_1 = -y$, 则:

$$\begin{aligned}
 F[f(-x, -y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1) e^{j2\pi(ux_1+vy_1)} dx_1 dy_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1) e^{-j2\pi[(-u)x_1+(-v)y_1]} dx_1 dy_1 \\
 &= F(-u, -v)
 \end{aligned}$$

假设 $f(x, y)$ 为偶函数, 则:

$$F^*(-u, -v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy = F(u, v)$$

所以, $F(u, v)$ 是共轭对称的。

4) 旋转性

如果二维函数 $f(r, \theta)$ 在空间域旋转角度 θ_0 , 则在变换域中其傅里叶变换也同样旋转角度 θ_0 , 即

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(R, \varphi + \theta_0) \quad (2-13)$$

式中, f 与 F 用极坐标表示, $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, u = R \cos \varphi, v = R \sin \varphi$ 。

证明:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

用极坐标表示为:

$$\begin{aligned}
 F(R, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-j2\pi R r \cos(\varphi - \theta)} \cdot r dr d\theta \\
 F(R, \varphi + \theta_0) &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-j2\pi R r \cos[\varphi - (\theta - \theta_0)]} \cdot r dr d\theta
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_{-\theta_0}^{2\pi-\theta_0} f(r, \theta) e^{-j2\pi R r \cos[\varphi - (\theta - \theta_0)]} \cdot r dr d\theta$$

由 $f(r, \theta) = f(r, \theta + 2\pi)$ 得:

$$F(R, \varphi + \theta_0) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} f(r, \theta + \theta_0) e^{-j2\pi R r \cos(\varphi - \theta)} \cdot r dr d\theta$$

5) 比例交换

设 $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$, 则有:

$$F[f(ax, by)] = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (2-14)$$

6) 帕斯维尔(Parseval)定理

设 $f(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)$, 则有:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)|^2 du dv \quad (2-15)$$

该性质证明了变换前后能量不变, 所以帕斯维尔定理又称为能量守恒定理。

7) 卷积(Convolution)定理

二维函数 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 的卷积为:

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \cdot g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (2-16)$$

式中, 符号“*”表示卷积。由一维傅里叶卷积定理知: 时域卷积对应频域乘积, 频域卷积对应时域乘积。对于二维傅里叶变换, 该性质同样满足, 即

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G(u, v) \quad (2-17)$$

$$f(x, y) \cdot g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v) \quad (2-18)$$

8) 相关定理

二维函数 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 的相关为:

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \cdot g(x + \alpha, y + \beta) d\alpha d\beta \quad (2-19)$$

式中, 符号“ $\circ$ ”表示相关运算。类似于卷积定理, 二维傅里叶变换同样满足相关定理, 即

$$f(x, y) \circ g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G^*(u, v) \quad (2-20)$$

$$f(x, y) \cdot g^*(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot G(u, v) \quad (2-21)$$

式中, 上标“*”表示共轭运算。

2.2.3 二维离散傅里叶变换

1) 正变换

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad (2-22)$$

$$u = 0, 1, \dots, M-1$$

$$v = 0, 1, \dots, N-1$$