工科研究生数学必修课程辅导用书

数值分析试题解析

曹婉容　杜　睿
吴宏伟　孙志忠　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

数值分析试题解析

曹婉容　杜　睿
吴宏伟　孙志忠　编著

东南大学出版社
·南京·

内容简介

本书对东南大学 1999 — 2016 学年工科硕士研究生和工程硕士研究生学位课程“数值分析”考试试题、工科博士研究生入学考试“数值分析”试题以及理学博士研究生入学考试“高等数值分析”试题，按误差分析、非线性方程数值解法、线性方程组数值解法、多项式插值、函数最佳逼近、数值积分与数值微分、常微分方程数值解法、偏微分方程数值解法等 8 个章节进行归类，然后给出了详细的解答.

本书可作为理工科研究生、本科生学习数值分析课程或计算方法课程的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数值分析试题解析/曹婉容等编著. — 南京：东南大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-5641-7348-7

I. ①数… II. ①曹… III. ①数值分析-研究生-题解 IV. ①O241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 187920 号

东南大学出版社出版发行
（南京四牌楼 2 号 邮编：210096）
出版人：江建中
全国各地新华书店经销 南京京新印刷有限公司印刷
开本：700mm×1000mm 1/16 印张：12.75 字数：250 千
2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷
定价：29.80 元
（因印装质量问题，可直接与营销部联系，电话：025 — 83791830）

前 言

计算机的迅速发展为人类提供了强有力的计算工具. 使用计算机进行科学计算已成为科学研究、工程设计等领域中越来越不可缺少的一个环节, 它有时甚至代替或超过了实验所起的作用. 因此, 科学计算应成为高级科技人员的一个基本技能. 作为科学计算的核心 —— 数值分析 (Advanced Numerical Analysis) 课程或计算方法 (Elementary Numerical Analysis) 课程, 已成为许多理工科研究生、本科生的必修课程.

本书对东南大学 1999 — 2016 学年工科硕士研究生和工程硕士研究生学位课程"数值分析"考试试题、工科博士研究生入学考试"数值分析"试题以及理学博士研究生入学考试"高等数值分析"试题, 按误差分析、非线性方程数值解法、线性方程组数值解法、多项式插值、函数最佳逼近、数值积分与数值微分、常微分方程数值解法、偏微分方程数值解法等 8 个章节进行归类, 然后给出了详细的解答.

本书是东南大学出版社出版的《数值分析》和《计算方法与实习》两本教材的配套参考书. 虽然本书内容选自东南大学考试试卷, 但对所有学习这门课程的学生都有重要的参考价值.

工科硕士研究生学位课程"数值分析"考试试题是由承担这门课程的所有教师共同讨论制定的, 除了本书的四名署名作者外, 还包括江风、石佩虎、李铁香、李元庆等老师.

作者衷心期望使用本书的老师、同学以及广大读者对本书提出宝贵意见和建议. 电子邮箱: zzsun@seu.edu.cn.

孙志忠
2017 年 6 月

目　录

第 1 章　误差分析

1.1　内容提要

本章主要介绍了误差的基本概念、算法的数值稳定性和数值计算应遵循的基本原则. 误差的基本概念中包括误差的来源、绝对误差（限）和相对误差（限）的定义、有效数字与有效数、数据误差对函数值的影响等; 算法的数值稳定性是指初始数据具有小的误差时, 算法的计算结果也只产生小的误差（这是一个优秀的数值算法应具有的重要特征）; 数值计算应遵循的基本原则主要包括防止两个相近的数相减、防止大数吃小数、减少计算次数、简化计算步骤等.

1.2　试题解析

1. 设 $x \approx 80.128$, $y \approx 80.115$ 均具有 5 位有效数字, 试分别估计由这些数据计算如下两表达式的绝对误差限并指出相应的有效位数:

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2+80.115^2), \tag{①}$$

$$\frac{1}{2}(x^2-y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2-80.115^2). \tag{②}$$

解　由条件得 x 和 y 的精确值分别为

$$x_1 = 80.128, \quad y_1 = 80.115$$

$$|e(x)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3}, \quad |e(y)| \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3},$$

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2+80.115^2) = 6419.4548045,$$

$$\frac{1}{2}(x^2-y^2) \approx \frac{1}{2}(80.128^2-80.115^2) = 1.0415795.$$

算法①: 由

$$e\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right) \approx \frac{1}{2}e(x^2+y^2) \approx \frac{1}{2}[e(x^2)+e(y^2)]$$

$$\approx xe(x)+ye(y),$$

知

$$\left|e\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\right| \approx |xe(x)+ye(y)| \leqslant x|e(x)|+y|e(y)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 80.128 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 80.115 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} \\
&= 160.243 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \times 10^{0},
\end{aligned}
$$

所以算法①至少具有 4 位有效数字.

算法②: 由

$$
e\left(\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right) \approx \frac{1}{2}e(x^2-y^2) \approx xe(x) - ye(y),
$$

知

$$
\begin{aligned}
\left|e\left(\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)\right| &\approx |xe(x)-ye(y)| \leqslant x|e(x)| + y|e(y)| \\
&\leqslant \frac{1}{2} \times 10^{0},
\end{aligned}
$$

所以算法②至少具有 1 位有效数字.

2. 设 $x_1 = 1.21$, $x_2 = 3.65$, $x_3 = 9.71$ 均是具有 3 位有效数字的近似值, 试估算 $x_1x_2 + x_3$ 的相对误差限.

解 由条件得

$$
|e(x_1)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \quad |e(x_2)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \quad |e(x_3)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2},
$$

因为

$$
e(x_1x_2 + x_3) \approx e(x_1x_2) + e(x_3) \approx x_2e(x_1) + x_1e(x_2) + e(x_3),
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|e(x_1x_2 + x_3)| &\approx |x_2e(x_1) + x_1e(x_2) + e(x_3)| \\
&\leqslant x_2|e(x_1)| + x_1|e(x_2)| + |e(x_3)| \\
&\leqslant 3.65 \times \frac{1}{2} \times 10^{-2} + 1.21 \times \frac{1}{2} \times 10^{-2} + \frac{1}{2} \times 10^{-2} \\
&= 2.93 \times 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

又因为

$$
e_r(x_1x_2 + x_3) = \frac{e(x_1x_2 + x_3)}{x_1x_2 + x_3},
$$

所以

$$
\begin{aligned}
|e_r(x_1x_2 + x_3)| &= \left|\frac{e(x_1x_2 + x_3)}{x_1x_2 + x_3}\right| \leqslant \frac{2.93 \times 10^{-2}}{1.21 \times 3.65 + 9.71} \\
&= 0.2074 \times 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

3. 设有一长方体的水池, 由测量知其长为 (50 ± 0.01)m, 宽为 (25 ± 0.01)m, 深为 (20 ± 0.01)m. 试按所给数据求出该水池的容积, 并分析所得近似值的绝对误差和相对误差, 给出绝对误差限和相对误差限.

解　由条件可得

$$L = 50,\ |e(L)| \leqslant 0.01; W = 25,\ |e(W)| \leqslant 0.01; H = 20,\ |e(H)| \leqslant 0.01,$$

容积为

$$V(L, W, H) = LWH = 50 \times 25 \times 20 = 25000(\mathrm{m}^3).$$

由

$$\begin{aligned} e(V) =& V(L^*, W^*, H^*) - V(L, W, H) \\ \approx& \frac{\partial V(L, W, H)}{\partial L}(L^* - L) + \frac{\partial V(L, W, H)}{\partial W}(W^* - W) + \frac{\partial V(L, W, H)}{\partial H}(H^* - H) \\ =& WHe(L) + LHe(W) + LWe(H), \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} e(V) \approx& |WHe(L) + LHe(W) + LWe(H)| \\ \leqslant& WH|e(L)| + LH|e(W)| + LW|e(H)| \\ \leqslant& 25 \times 20 \times 0.01 + 50 \times 20 \times 0.01 + 50 \times 25 \times 0.01 = 27.50(\mathrm{m}^3), \end{aligned}$$

由 $e_r(V) = \dfrac{e(V)}{V}$, 得

$$|e_r(V)| \leqslant \frac{27.50}{25000} = 1.1 \times 10^{-3} = 0.11\%.$$

或由

$$e_r(V) \approx e_r(L) + e_r(W) + e_r(H),$$

得

$$\begin{aligned} |e_r(V)| \leqslant& |e_r(L)| + |e_r(W)| + |e_r(H)| \\ \leqslant& \frac{0.01}{50} + \frac{0.01}{25} + \frac{0.01}{20} = 0.11\%. \end{aligned}$$

4. 已知 $x = 1.231$ 和 $y = 0.5122$ 是由四舍五入法得到的近似值, 试估计计算函数 e^{xy} 的绝对误差限和相对误差限.

解　根据题意, 可知

$$|e(x)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3}, \quad |e(y)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

则

$$|e(\mathrm{e}^{xy})| \approx |y\mathrm{e}^{xy}e(x) + x\mathrm{e}^{xy}e(y)| \leqslant \mathrm{e}^{xy}(y|e(x)| + x|e(y)|) \leqslant 0.5967 \times 10^{-3},$$

$$|e_r(\mathrm{e}^{xy})| = \left|\frac{e(\mathrm{e}^{xy})}{\mathrm{e}^{xy}}\right| \leqslant y|e(x)| + x|e(y)| \leqslant 0.31765 \times 10^{-3}.$$

5. 已知 x 和 y 是两个近似值, 其相对误差限分别为 ε_1 和 ε_2, 试估计计算函数 $u = \sin(xy)$ 的绝对误差限和相对误差限.

解 由条件得

$$|e_r(x)| \leqslant \varepsilon_1, \quad |e_r(y)| \leqslant \varepsilon_2,$$

所以有

$$|e(x)| \leqslant |x|\varepsilon_1, \quad |e(y)| \leqslant |y|\varepsilon_2,$$

从而得

$$\begin{aligned}
|e(u)| &\approx |\cos(xy)[ye(x) + xe(y)]| \\
&\leqslant |\cos(xy)|(|y|\,|e(x)| + |x|\,|e(y)|) \\
&= |\cos(xy)| \cdot |x|\,|y|(|e_r(x)| + |e_r(y)|) \\
&\leqslant |x|\,|y|\,|\cos(xy)|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \\
|e_r(u)| &= \left|\frac{e(u)}{u}\right| \leqslant \frac{|x||y||\cos(xy)|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{|\sin(xy)|} \\
&= |xy|\,|\cot(xy)|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).
\end{aligned}$$

6. 设测量一个长方体的长、宽、高的相对误差限都为 ε, 由测量的数据计算该长方体的体积 V, 所得结果的相对误差限为多少?

解 设长方体的长、宽、高分别为 a, b, c, 则 $V = abc$. 由条件知

$$|e_r(a)| \leqslant \varepsilon, \quad |e_r(b)| \leqslant \varepsilon, \quad |e_r(c)| \leqslant \varepsilon,$$

又

$$\mathrm{d}V = bc\mathrm{d}a + ac\mathrm{d}b + ab\mathrm{d}c, \quad \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}a}{a} + \frac{\mathrm{d}b}{b} + \frac{\mathrm{d}c}{c},$$

$$e_r(V) \approx e_r(a) + e_r(b) + e_r(c),$$

所以

$$\begin{aligned}
|e_r(V)| &\approx |e_r(a) + e_r(b) + e_r(c)| \leqslant |e_r(a)| + |e_r(b)| + |e_r(c)| \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

7. 设准确值 $x_1^* = \sqrt[3]{2011}$, $x_2^* = \sqrt[3]{2010}$, 它们的近似值分别是 $x_1 = 12.6223$, $x_2 = 12.6202$. 已知 x_1 和 x_2 具有 6 位有效数字, 考察下面两种算法:

$$x_1^* - x_2^* \approx x_1 - x_2 = 0.0021, \tag{1}$$

$$x_1^* - x_2^* = \frac{1}{(x_1^*)^2 + x_1^* x_2^* + (x_2^*)^2} \approx \frac{1}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2} = 0.00209254\cdots. \quad ②$$

试分析上述两种算法所得结果具有几位有效数字, 并估计它们的相对误差限.

解　根据题意, 可知

$$|e(x_1)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad |e(x_2)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

$$\begin{aligned}|e(x_1 - x_2)| &\approx |e(x_1) - e(x_2)| \leqslant |e(x_1)| + |e(x_2)| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 10^{-4} < \frac{1}{2} \times 10^{-3},\end{aligned}$$

所以算法 ①具有 1 位有效数字, 且

$$|e_r(x_1 - x_2)| = \left|\frac{e(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqslant 0.47619 \times 10^{-1}.$$

又由题意得

$$\begin{aligned}\left|e\left(\frac{1}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}\right)\right| &\approx \left|-\frac{1}{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)^2}[(2x_1 + x_2)e(x_1) + (x_1 + 2x_2)e(x_2)]\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)^2}[(2x_1 + x_2)|e(x_1)| + (x_1 + 2x_2)|e(x_2)|] \\ &\leqslant 1.65795 \times 10^{-8} < \frac{1}{2} \times 10^{-7},\end{aligned}$$

所以算法 ②所得结果具有 5 位有效数字, 且

$$\left|e_r\left(\frac{1}{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}\right)\right| \leqslant 7.923 \times 10^{-6}.$$

8.　设 $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, 求 $f(30)$ 的值. 若开平方用 6 位函数表, 有

$$\ln(30 - \sqrt{30^2 - 1}) = \ln(30 - 29.9833) = -4.092347,$$

则所得结果具有几位有效数字? 若改用另一等价公式, 有

$$\ln(30 - \sqrt{30^2 - 1}) = -\ln(30 + \sqrt{30^2 - 1}) = -\ln(30 + 29.9833) = -4.094066,$$

则所得结果具有几位有效数字?

解　设 $x^* = \sqrt{30^2 - 1}$, $x = 29.9833$, 则

$$|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

$$\ln(30 - x^*) - \ln(30 - x) \approx \frac{-1}{30 - x}[(30 - x^*) - (30 - x)] = \frac{x^* - x}{30 - x},$$

$$\begin{aligned}|\ln(30 - x^*) - \ln(30 - x)| &\leqslant \frac{|x^* - x|}{30 - x} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-4}}{30 - 29.9833} \\ &= 0.299401 \times 10^{-2} < \frac{1}{2} \times 10^{-2},\end{aligned}$$

所以第一种算法至少具有 3 位有效数字.

又

$$\ln(30+x^*)-\ln(30+x)\approx\frac{-1}{30+x}[(30+x^*)-(30+x)]=-\frac{x^*-x}{30+x},$$

$$|\ln(30+x^*)-\ln(30+x)|\leqslant\frac{|x^*-x|}{30+x}\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times10^{-4}}{30+29.9833}<\frac{1}{2}\times10^{-5},$$

所以第二种算法至少具有 6 位有效数字.

9. 测得等腰三角形底边长为 152cm, 腰长为 251cm. 已知测量误差为 0.5cm, 试给出由所测数据计算该三角形面积时的绝对误差限和相对误差限.

解 记底边长为 x, 腰长为 y, 则高为 $\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}$. 由题意知

$$x=152,\quad y=251,\quad |e(x)|\leqslant\frac{1}{2},\quad |e(y)|\leqslant\frac{1}{2},$$

三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}x\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\times152\times\sqrt{251^2-\frac{152^2}{4}}=18180.52805,$$

且

$$S_x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}+x\cdot\frac{-\frac{1}{2}x}{2\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}}\left(y^2-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}}=107.53604,$$

$$S_y=\frac{1}{2}x\frac{2y}{2\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}}=\frac{xy}{2\sqrt{y^2-\frac{x^2}{4}}}=79.74334.$$

绝对误差限: 因为 $e(S)\approx S_xe(x)+S_ye(y)$, 所以

$$\begin{aligned}|e(S)|\approx&|S_xe(x)+S_ye(y)|\\ \leqslant&|S_x|\cdot|e(x)|+|S_y|\cdot|e(y)|\\ \leqslant&107.53604\times\frac{1}{2}+79.74334\times\frac{1}{2}=93.63969.\end{aligned}$$

相对误差限: 因为 $e_r(S)=\frac{e(S)}{S}$, 所以

$$|e_r(S)|=\frac{|e(S)|}{S}\leqslant\frac{93.63969}{18180.52805}=0.5151\times10^{-2}.$$

10. (1) 设测量圆柱体的底面半径 R 和高 h 的相对误差均不超过 10^{-3}, 试估计计算该圆柱体体积的相对误差;

(2) 当 $|x|$ 很小时, 为了提高计算

$$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x}$$

的精度, 应将该表达式如何处理?

解 (1) 设圆柱体体积为 V, 则 $V=\pi R^2 h$. 由条件可知

$$|e_r(R)|\leqslant 10^{-3},\quad |e_r(h)|\leqslant 10^{-3},$$

得

$$\begin{aligned}|e_r(V)|&\approx\left|\frac{2\pi R^2 h}{V}e_r(R)+\frac{\pi R^2 h}{V}e_r(h)\right|=|2e_r(R)+e_r(h)|\\&\leqslant 2|e_r(R)|+|e_r(h)|\leqslant 3\times 10^{-3}.\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x}=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x}}$.

11. 分别取

$$x_1^*=\sqrt{2000}\quad 和\quad x_2^*=\sqrt{1999}$$

的具有 n 位有效数字的近似值 x_1 和 x_2.

(1) 若要得到 $x_1^*x_2^*$ 的具有 7 位有效数字的近似值, 则 n 的值至少应为多少?

(2) 若要得到 $x_1^*-x_2^*$ 的具有 7 位有效数字的近似值, 则 n 的值至少应为多少?

解 由 $x_1^*=\sqrt{2000}$, $x_2^*=\sqrt{1999}$ 可知 $x_1=44.72\times\times\times$, $x_2=44.71\times\times\times$. 设

$$|e(x_1)|\leqslant\varepsilon,\quad |e(x_2)|\leqslant\varepsilon.$$

(1) 由 $x_1^*x_2^*\approx x_1x_2$, 可得

$$1999.\times\times\times=44.72\times 44.71\leqslant x_1x_2\leqslant 44.73\times 44.72=2000.\times\times\times,$$

$$e(x_1x_2)\approx x_2e(x_1)+x_1e(x_2),$$

$$|e(x_1x_2)|\approx|x_2e(x_1)+x_1e(x_2)|\leqslant(x_1+x_2)\varepsilon.$$

当

$$(x_1+x_2)\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3}\qquad ①$$

时, 有

$$|e(x_1x_2)|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3},$$

由①, 有

$$(44.72+44.71)\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3},$$

解得

$$\varepsilon \leqslant \frac{\frac{1}{2}\times 10^{-3}}{44.72+44.71} = 0.01118\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} = 0.1118\times\frac{1}{2}\times 10^{-4},$$

即当 $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-5}$ 时, 有

$$|e(x_1x_2)| \leqslant (x_1+x_2)\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-3},$$

所以当 x_1 和 x_2 取 7 位有效数字时, 可得 $x_1^*x_2^*$ 具有 7 位有效数字的近似值.

(2) 方法 1: 因为

$$x_1^*-x_2^* \approx x_1-x_2 \approx 44.72135955-44.71017781 = 0.01118174,$$

$$e(x_1-x_2) \approx e(x_1)-e(x_2),$$

$$|e(x_1-x_2)| \approx |e(x_1)|+|e(x_2)| \leqslant 2\varepsilon,$$

要使 x_1-x_2 具有 7 位有效位数, 即只需 $2\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-8}$，解得

$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 10^{-8},$$

即当 $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-9}$ 时, 有

$$|e(x_1-x_2)| \leqslant 2\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-8},$$

所以当 x_1 和 x_2 具有 11 位有效数字时, x_1-x_2 具有 7 位有效数字.

方法 2: 因为

$$x_1^*-x_2^* = \frac{1}{x_1^*+x_2^*} \approx \frac{1}{x_1+x_2} \approx 0.01118\times\times\times,$$

$$e\left(\frac{1}{x_1+x_2}\right) \approx -\frac{e(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)^2} \approx -\frac{e(x_1)+e(x_2)}{(x_1+x_2)^2},$$

$$\left|e\left(\frac{1}{x_1+x_2}\right)\right| \approx \frac{|e(x_1)+e(x_2)|}{(x_1+x_2)^2} \leqslant \frac{2\varepsilon}{(x_1+x_2)^2},$$

要使 $\frac{1}{x_1+x_2}$ 具有 7 位有效数字, 即要求 $\frac{2\varepsilon}{(x_1+x_2)^2} \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-8}$, 解得

$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4},$$

故当 x_1 和 x_2 取 6 位有效数字时, x_1-x_2 具有 7 位有效数字.

12. 已知

$$(10-\sqrt{99})^6 = \frac{1}{(10+\sqrt{99})^6},$$

且 $\sqrt{99}$ 的 6 位有效数为 9.94987, 分析如下两种算法各具有几位有效数字:

(1) $(10-\sqrt{99})^6 \approx (10-9.94987)^6 = 0.158703399 \times 10^{-7}$;

(2) $\dfrac{1}{(10+\sqrt{99})^6} \approx \dfrac{1}{(10+9.94987)^6} = 0.158620597 \times 10^{-7}$.

解　设 $x^* = \sqrt{99}$, $x = 9.94987$, 则 $|e(x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \times 10^{-5}$.

(1) 记 $u(x) = (10-x)^6$, 则

$$u'(x) = -6(10-x)^5,$$
$$u(x) = (10-9.94987)^6 = 0.158703399 \times 10^{-7}.$$

由

$$e(u) \approx u'(x)e(x) = -6(10-x)^5 e(x),$$

得

$$\begin{aligned}|e(u)| &\approx 6(10-x)^5|e(x)| \leqslant 6(10-9.94987)^5 \times \frac{1}{2} \times 10^{-5}\\ &\approx 0.95 \times 10^{-11} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 10^{-7},\end{aligned}$$

所以 $u(x)$ 至少具有 3 位有效数字.

(2) 记 $v(x) = \dfrac{1}{(10+x)^6}$, 则

$$v'(x) = -\frac{6}{(10+x)^7},$$
$$v(x) = \frac{1}{(10+9.94987)^6} = 0.158620597 \times 10^{-7}.$$

由

$$e(v) \approx v'(x)e(x) = -\frac{6}{(10+x)^7}e(x),$$

得

$$\begin{aligned}|e(v)| &\approx \frac{6}{(10+x)^7}|e(x)| \leqslant \frac{6}{(10+9.94987)^7} \times \frac{1}{2} \times 10^{-5}\\ &\approx 0.238 \times 10^{-13} \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times 10^{-7},\end{aligned}$$

所以 $v(x)$ 至少具有 6 位有效数字.

13.　设 $x = 9.1234$, $y = 10.468$ 均具有 5 位有效数字, 试分析 $x-y$ 和 x^3+y^3 的绝对误差限和相对误差限.

解　根据题意可得

$$|e(x)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad |e(y)| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3},$$
$$e(x-y) \approx e(x) - e(y),$$

$$
\begin{aligned}
|e(x-y)| \approx & |e(x)-e(y)| \leqslant |e(x)|+|e(y)| \\
\leqslant & \frac{1}{2}\times 10^{-4}+\frac{1}{2}\times 10^{-3}=0.00055,
\end{aligned}
$$

$$e(x^3+y^3)\approx e(x^3)+e(y^3)\approx 3x^2e(x)+3y^2e(y),$$

$$
\begin{aligned}
|e(x^3+y^3)| \approx & |3x^2e(x)+3y^2e(y)| \leqslant 3x^2|e(x)|+3y^2|e(y)| \\
\leqslant & 3\times 9.1234^2\times\frac{1}{2}\times 10^{-4}+3\times 10.486^2\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} \\
= & 0.17742.
\end{aligned}
$$

又

$$e_r(x-y)=\frac{e(x-y)}{x-y},$$

$$|e_r(x-y)|=\left|\frac{e(x-y)}{x-y}\right|\leqslant\frac{0.00055}{|9.1234-10.468|}=4.0904\times 10^{-4},$$

$$e_r(x^3+y^3)=\frac{e(x^3+y^3)}{x^3+y^3},$$

$$|e_r(x^3+y^3)|=\left|\frac{e(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\right|\leqslant\frac{0.17742}{|9.1234^3+10.468^3|}=9.3062\times 10^{-5}.$$

14. (1) 设 $x_1=5.1074, x_2=80.119$ 均具有 5 位有效数字, 试估计由这些数据计算 x_1x_2 具有几位有效数字;

(2) 利用秦九韶算法计算多项式 $p(x)=8x^5-6x^4+4x^3-2x^2+3x+1$ 在 $x=2$ 处的值.

解 (1) 根据题意, 可得

$$|e(x_1)|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-4},\quad |e(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{-3},$$

$$e(x_1x_2)\approx x_2e(x_1)+x_1e(x_2),$$

$$
\begin{aligned}
|e(x_1x_2)| &\approx |x_2e(x_1)+x_1e(x_2)|\leqslant |x_2e(x_1)|+|x_1e(x_2)|=x_2|e(x_1)|+x_1|e(x_2)| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\times 80.119\times 10^{-4}+\frac{1}{2}\times 5.1074\times 10^{-3} \\
&= \frac{1}{2}\times 0.131193\times 10^{-1}<\frac{1}{2}\times 10^{-1},
\end{aligned}
$$

$$x_1x_2=5.1074\times 80.119=409.1997806,$$

所以 x_1x_2 具有 4 位有效数字.

(2) 根据题意, 可得

	8	-6	4	-2	3	1
$x=2$		16	20	48	92	190
	8	10	24	46	95	191

即 $p(2)=191$.

15. 设序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系:

$$\begin{cases} y_n = 5y_{n-1} - 5, \quad n = 1, 2, \cdots, \\ y_0 = 1.732, \end{cases}$$

若 y_0 是具有 4 位有效数字的近似值, 试估计 y_{10} 的绝对误差限和相对误差限.

解　根据题意, 有

$$|e(y_0)| \leqslant 0.5 \times 10^{-3},$$

又

$$e(y_n) = 5e(y_{n-1}) = 5^n e(y_0),$$

所以

$$|e(y_{10})| = 5^{10}|e(y_0)| \leqslant 5^{10} \times 0.5 \times 10^{-3} = 4882.8125.$$

又因为

$$y_n = 5^n y_0 - (5 + 5^2 + \cdots + 5^n) = 5^n y_0 - \frac{5(1-5^n)}{1-5} = 5^n y_0 + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \times 5^{n+1},$$

$$y_{10} = 5^{10} \times 1.732 + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \times 5^{11} = 4707032.5,$$

所以

$$|e_r(y_{10})| = \left|\frac{e(y_{10})}{y_{10}}\right| \leqslant \frac{4882.8125}{4707032.5} = 0.001037344.$$

16. 讨论算法

$$\begin{cases} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \cdots, \\ y_0 = 1,\ y_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

的数值稳定性.

解　设 $\tilde{y}_i$ 是 y_i 的近似值, 记 $e_i = y_i - \tilde{y}_i$, 则

$$e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

即

$$e_{i+1} - e_i = e_i - e_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots,$$