



电磁分析中的预条件方法

陈如山 著



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

电磁分析中的预条件方法

陈如山 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要介绍了预条件方法的基本理论及其在电磁分析中的应用,包括计算电磁学中的主要数值方法、Krylov 子空间迭代方法、预条件技术、迭代算法的自适应加速技术、预条件技术的优化措施、基于物理模型的预条件技术、基于特征谱信息的快速迭代算法及预条件技术、高阶有限元及多重网格迭代法、高阶矩量法及多重网格方法、块迭代算法、并行预条件技术等,重点介绍了多种预条件技术在矩量法和有限元方法中的应用。

本书可作为高等院校电子、物理、数学等相关专业研究生和高年级本科生的参考教材,也可供从事电磁理论、计算电磁学、微波技术等相关领域研究的科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

电磁分析中的预条件方法/陈如山著. —北京:科学出版社,2018.5

ISBN 978-7-03-051509-4

I. 电… II. ①陈… III. 电磁学-分析 IV. O441

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 323302 号

责任编辑:陈 婕 纪四稳 / 责任校对:桂伟利

责任印制:师艳茹 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 5 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2018 年 5 月第一次印刷 印张:22 1/2

字数:440 000

定价:145.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

随着高性能计算机技术的发展,利用计算电磁学数值方法进行电磁仿真分析,已经成为电磁场与微波技术领域内重要的研究手段。在计算电磁学数值方法中,无论是积分方程类方法还是微分方程类方法,都要求解由数值方法离散积分方程或者微分方程导出的线性方程组。对该线性方程组的求解主要采用迭代方法进行。但是,随着电磁问题的复杂性和计算规模的增加,所得到的线性系统方程的系数矩阵性态变差,导致迭代方法在分析复杂电磁问题时收敛速度慢,甚至不收敛,难以有效获取电磁问题的解。而预条件技术的发展为解决该问题提供了一种有效的方法。通过构建预条件矩阵,将原始的线性系统转换为矩阵性态良好的等价线性系统,从而加速迭代方法的求解,在确保转换后的线性系统与原始的线性系统拥有相同的解的同时,提高复杂电磁问题的分析效率。

本书主要介绍计算电磁学中预条件方法的基本理论及其在电磁分析中的应用。全书共 12 章,主要内容包括:计算电磁学中的主要数值方法、Krylov 子空间迭代方法、预条件技术、迭代算法的自适应加速技术、预条件技术的优化措施、基于物理模型的预条件技术、基于特征谱信息的快速迭代算法及预条件技术、高阶有限元及多重网格迭代法、高阶矩量法及多重网格方法、块迭代算法、并行预条件技术研究等。

本书的撰写工作得到了丁大志博士、樊振宏博士、芮平亮博士的帮助,同时本书的部分研究内容得到了国家自然科学基金(项目编号:60271005、60325103、60871013、61271076、61431006)的资助。在本书出版之际,一并表示由衷的感谢。

由于作者水平有限,书中难免存在疏漏和不足,望读者批评指正、反馈意见,以便本书再版时补充及修改,邮箱: eerschen@njust.edu.cn。

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 计算电磁学发展现状	2
1.2 迭代解法和预条件技术	5
1.3 内容安排	9
参考文献	10
第 2 章 计算电磁学中的主要数值方法	26
2.1 有限元法	26
2.1.1 电磁场边值问题	27
2.1.2 伽辽金加权余量法与里茨变分法	27
2.1.3 有限元法的步骤	28
2.1.4 数值结果	31
2.2 矩量法	35
2.2.1 矩量法的离散化过程	35
2.2.2 积分方程的选取	36
2.2.3 散射场的计算	39
2.2.4 多层快速多极子方法	40
2.2.5 并行多层快速多极子方法	44
2.2.6 数值结果	47
参考文献	49
第 3 章 Krylov 子空间迭代方法	53
3.1 直接解法和迭代解法简介	53
3.2 迭代方法的分类	54
3.3 共轭梯度类迭代方法	55
3.4 广义最小余量迭代算法	56
3.5 常用 Krylov 子空间迭代算法的比较	58
3.6 常用迭代算法在体积分方程中的应用	58
3.7 常用迭代算法在表面积分方程中的应用	64
参考文献	68

第 4 章 预条件技术	70
4.1 预条件技术概述	70
4.2 稠密矩阵的稀疏化	71
4.3 预条件广义最小余量迭代算法	72
4.4 对角预条件技术	73
4.5 对称超松弛预条件技术	74
4.6 不完全 LU 分解预条件技术	74
4.7 稀疏近似逆预条件技术	75
4.8 几种常用预条件技术性能的比较	77
参考文献	82
第 5 章 迭代算法的自适应加速技术	84
5.1 GMRES 迭代算法收敛性分析	84
5.2 基于 GMRES 迭代算法的自适应加速技术概述	86
5.3 Krylov 子空间扩大技术	87
5.3.1 扩大子空间的广义最小余量迭代算法	87
5.3.2 松散的广义最小余量迭代算法	90
5.4 特征谱重复循环技术	92
5.4.1 隐式循环的广义最小余量迭代算法	92
5.4.2 显式循环的广义最小余量迭代算法	95
5.5 特征谱预条件的广义最小余量迭代算法	97
5.6 内外迭代技术	99
5.6.1 灵活的广义最小余量迭代算法	99
5.6.2 嵌套的广义最小余量迭代算法	102
5.7 几种加速技术性能的比较	103
5.8 其他迭代加速技术	107
参考文献	111
第 6 章 预条件技术的优化措施	114
6.1 对称超松弛预条件技术的有效实现	114
6.2 不完全 LU 分解预条件技术中的扰动技术	117
6.2.1 对角线扰动技术	117
6.2.2 MFIE 主值项扰动技术	120
6.3 多层快速多极子方法中一种有效的稀疏近似逆预条件技术	125
6.4 混合预条件技术	129
6.4.1 双步混合预条件技术	129
6.4.2 SSOR 预条件技术与 GMRESR 及 FGMRES 结合算法	134

6.5 多重预条件技术	138
6.5.1 多重预条件共轭梯度算法	138
6.5.2 多重预条件广义最小余量算法	139
6.6 预条件矩阵插值	142
6.6.1 基于有理函数模型的阻抗矩阵插值技术	142
6.6.2 基于有理函数模型的稀疏近似逆预条件矩阵插值技术	145
参考文献	149
第7章 基于物理模型的预条件技术	151
7.1 电场矢量有限元方程的病态特性	151
7.2 基于 $A-V$ 场的预条件技术	153
7.2.1 $A-V$ 场有限元公式	153
7.2.2 数值结果与分析	155
7.3 基于转移 Laplace 算子的预条件技术	158
7.3.1 转移 Laplace 算子的预条件	158
7.3.2 数值结果与分析	160
7.4 基于吸收边界条件的预条件技术	167
7.4.1 快速多极子结合有限元方法理论及公式	167
7.4.2 利用吸收边界条件构造预条件矩阵	170
7.4.3 数值结果与分析	173
参考文献	177
第8章 基于特征谱信息的快速迭代算法及预条件技术	180
8.1 改进的扩大子空间广义最小余量迭代算法	180
8.1.1 GMRESE 迭代算法基本原理	180
8.1.2 GMRESE 迭代算法的收敛性能	182
8.1.3 GMRESE 迭代算法的性能随参数变化情况	186
8.1.4 GMRESE 迭代算法在单站 RCS 计算中的应用	189
8.2 基于特征谱信息的代数多重网格迭代算法	192
8.2.1 基于特征谱信息的代数多重网格迭代算法基本原理	192
8.2.2 SMG 迭代算法的收敛性能	195
8.2.3 SMG 迭代算法的性能随参数变化情况	197
8.2.4 SMG 迭代算法在单站 RCS 计算中的应用	199
8.2.5 SMG 性能随未知量变化情况	201
8.3 基于特征谱信息的多步混合预条件技术	203
8.3.1 基于特征谱信息的双步混合预条件技术的基本思想	203
8.3.2 基于特征谱信息的双步混合预条件技术的性能	205

8.3.3 基于特征谱信息的多步混合预条件	208
8.3.4 多步混合预条件技术在单站 RCS 计算中的应用	211
8.3.5 基于等级基函数的双步谱预条件技术	216
参考文献	222
第 9 章 高阶有限元及多重网格迭代法	224
9.1 高阶等级基函数	225
9.2 p -型多重网格预条件技术	229
9.2.1 p -型多重网格算法	229
9.2.2 数值结果与分析	231
9.3 Schwarz 预条件技术	238
9.3.1 Schwarz 算法概述	238
9.3.2 数值结果与分析	239
9.4 有限元的辅助空间预条件技术	243
9.4.1 ASP 的基本原理	243
9.4.2 算例分析	246
参考文献	250
第 10 章 高阶矩量法及多重网格方法	253
10.1 基于高阶单元的 Calderón 算子预条件技术	253
10.1.1 基于 Calderón 算子的积分方程建立	254
10.1.2 构造基于高阶单元的 Calderón 算子预条件技术	256
10.1.3 数值结果与分析	261
10.2 基于网格细分的多分辨基函数及预条件技术	269
10.2.1 基于 CRWG 基函数构造的多分辨基函数	270
10.2.2 多分辨预条件及其改进	274
10.2.3 多分辨预条件与快速多极子算法的结合	276
10.2.4 多分辨基函数及预条件的数值算例与分析	276
10.3 新型多重网格预条件技术研究	280
10.3.1 粗网格基函数的构造及粗网格矩阵构造	280
10.3.2 多重网格预条件的构造	282
10.3.3 数值算例分析与讨论	284
参考文献	292
第 11 章 块迭代算法	296
11.1 块 GMRES 迭代算法	296
11.2 块 GMRES-DR 迭代算法	297
11.3 块 GMRESE 迭代算法	298

11.4 块 SMG 迭代算法	299
11.5 数值结果	301
参考文献	305
第 12 章 并行预条件技术研究	306
12.1 并行计算概述	306
12.2 有限元方法中并行区域分解算法及预条件技术	309
12.2.1 并行代数域分解算法	310
12.2.2 并行撕裂对接算法	319
12.3 矩量法中并行稀疏近似逆预条件技术	328
12.3.1 近场稀疏化稀疏近似逆预条件	328
12.3.2 并行稀疏近似逆预条件构造原理	330
12.3.3 并行稀疏近似逆数值结果与讨论	335
12.3.4 并行稀疏近似逆预条件结合幂级数展开技术	343
参考文献	346

第1章 绪 论

1864年,英国物理学家麦克斯韦(Maxwell)在“A dynamical theory of the electromagnetic field”一文中提出了位移电流的概念^[1],认为不仅变化的磁场能产生电场,而且变化的电场也能产生磁场,电磁场由此交替地向外传播,同时提出了麦克斯韦方程组,并首次预言了电磁波的存在。1887年,德国物理学家赫兹用火花放电的实验证实了麦克斯韦的预言,得出了电磁能量可以越过空间传播的结论。赫兹的发现轰动了全世界科学界,开启了人们研究电磁场理论及其应用的大门。随着研究的不断深入,电磁场的理论已经在航空航天、无线电通信、雷达、半导体芯片及封装、遥测遥感、生物医疗以及光电子等行业得到了广泛的应用。

目前,利用电磁波工作的通信、雷达设备已经在国防军事和民用领域发挥着重要的作用,与人们的日常生活息息相关。随着社会的发展,人们希望这些电磁设备的功能越来越齐全、结构越来越小型化、电磁波频谱的利用率越来越高。为了降低电磁设备的设计成本,提高设备性能,需要分析电磁设备的电磁特性,因此各种电磁设备的抗电磁干扰性及彼此间的电磁耦合研究日益引起人们的重视。理论上,以上需求都可归结为复杂的电磁分析问题,即研究电磁波和具有复杂材料构成及几何结构的物质之间的相互作用。实际设备模型的复杂性,使经典电磁学解析求解时存在较大的局限性,甚至根本无法实现。另一个有效的途径是,通过现场实验来研究实际的电磁问题,但在实际环境中开展实验的人力、物力成本巨大,研究周期长,有时因为实验条件的缺失而无法进行研究。

伴随着计算机技术水平的不断提高,利用计算机进行仿真的理论手段越来越受到重视。相应地,在电磁学领域内出现了多种分析电磁问题的数值算法,从而诞生了一门解决复杂电磁场理论与微波工程问题的新兴学科——计算电磁学^[2-4]。在电磁学领域的科研工作者的不懈努力下,计算电磁学已经取得了丰硕的成果。随着多种新型算法的提出和改进,计算电磁学能够解决的问题也越来越复杂。计算电磁学可以看成数学方法、电磁场理论和计算机技术结合的产物。使用计算电磁方法,可避免高昂的现场测试费用,同时其数值解对电磁理论的发展和现场实验也有一定的指导意义。随着计算电磁学的发展,利用电磁仿真进行研究已经成为设计电路、天线、电磁兼容和电磁散射等实际工程应用领域内不可或缺的、甚至主要的研究手段。

1.1 计算电磁学发展现状

电磁场数值分析是根据麦克斯韦方程,利用适当的边界条件确定所关心区域内的电磁场或电流分布,进而求出所需要的物理参量。回顾计算电磁学发展的历史,早在1864年,麦克斯韦已用偏微分方程的形式给出了电磁波现象中电场和磁场的统一表达式,他的研究成果被誉为19世纪最显著的科学成就之一。而求解电磁场问题的方法归纳起来可分为三大类,第一类是解析法,第二类是数值法,第三类是半解析数值法,其中每一类又包含若干种方法。

经典的数学分析方法是近百年来电磁学学科发展中一个极为重要的手段。解析法包括建立和求解偏微分方程或积分方程。严格求解偏微分方程的经典方法是分离变量法;严格求解积分方程的方法主要是变换数学法。解析法的优点是:

- (1) 可将解答表示为已知函数的显式,从而可计算出精确的结果;
- (2) 可以作为近似解和数值解的检验标准;
- (3) 在解析过程中和在解的显式中可以观察到问题的内在联系和各个参数对结果所起的作用。

用解析法求解电磁场的边值问题可以得到精确的数值结果,并能根据参量的变化推断出解的变化趋势。但是这种方法所能解决的问题不多,满足不了不断增加的工程方面的需要。于是,人们开始致力于研究求解复杂边值问题的近似方法和数值方法。早在1897年,麦克斯韦就尝试用积分方程的数值解来计算矩形金属板间的电容量。在计算机出现以前,应用数值法求解更复杂的边值问题并非易事,但随着高速度大存储量计算机的发展和数值方法应用的日益广泛,过去看来难解的问题现在已能比较容易解决,并能得到足够精确的数值解。

根据问题求解域的不同,数值计算方法可分为时域和频域两大类。时域方法通常直接离散时域麦克斯韦方程,模拟电磁波的传播,随时间迭代计算,适合于宽频带特征瞬态电磁场的数值仿真,如典型的时域有限差分(finite difference time domain, FDTD)法^[5-10]、时域有限元(finite element time domain, FETD)法^[11-13]、时域谱元法^[14-23]和时域积分方法^[24-31]。时域方法的一个突出优点是可以给出关于问题空间丰富的时域瞬态信息,能更直观地反映问题的物理现象。频域方法以不包含时间变量或时间变量导数的频域麦克斯韦方程为出发点,求解系统的相位和频率响应。

频域方法可分为高频近似方法和低频数值方法。在高频方法分析时,电磁波和目标之间的相互作用是一种局部现象,只与作用点附近的几何结构、材质参数和入射波性质有关,而与远离该点的其他信息无关。高频近似方法适合求解电大尺寸目标散射问题,具有物理概念清晰、容易实现、计算效率高等优点。不同的几何

结构需要采用不同的散射机理来处理,由于几何结构的多样性和复杂性,考虑所有的散射机理是不切实际的,所以高频方法得到的结果通常是近似解,而非精确解。高频方法大致可以分为基于射线的高频方法和基于电流的高频方法两大类。基于射线的高频方法有几何光学(graphic optics, GO)法、几何绕射理论(geometrical theory of diffraction, GTD)、一致几何绕射理论(uniform theory of diffraction, UTD)等^[32-43]。基于射线的高频方法的优点是物理概念简单;缺点是实际计算时的几何判断比较复杂,并且在空间分布的电磁场会出现不连续。基于电流的高频方法有物理光学(physical optics, PO)法^[34-37]、等效电电流(method of equivalent currents, MEC)法^[38-39]、迭代物理光学(iterative physical optics, IPO)法^[40]等。基于电流的高频方法的优点是空间分布的电磁场可以保持连续,不会出现奇异点;缺点是不能方便地处理电磁波的多次反射作用。一种较为实用的高频方法是弹跳射线(shooting and bouncing rays, SBR)法^[41,42],该方法有效地结合了 GO 法和 PO 法的优点。

低频数值方法一般先离散麦克斯韦方程,再求数值解。低频数值方法计算精度高,能够有效求解几何结构和组成材质都较复杂的电磁问题。根据求解方程形式的不同,低频数值方法可以分为积分方程方法和微分方程方法。微分方程方法的代表性方法有时域有限差分(FDTD)法和有限元法(finite element method, FEM)等。FDTD法是由 Yee 于 1966 年提出的^[44],该方法直接将麦克斯韦方程组在空间网格中进行离散处理。此后,为了提高 FDTD 法的计算精度、建模能力以及减少对计算资源的需求等,出现了交替方向隐式时域有限差分(alternating direction implicit-finite-difference time-domain, ADI-FDTD)法、高阶时域有限差分(high order-finite difference time domain, HO-FDTD)法等^[45,46]。FEM 是一种在多种学科中应用较广的数值方法^[47],该方法以变分原理和剖分插值技术为基础。与 FDTD 法相比, FEM 可以更好地模拟复杂边界问题,但其缺点是产生的矩阵的性态较差。微分方程方法的缺点之一是存在网格的数值色散误差。此外,微分方程方法采用全空间离散,为了分析开域问题需要引入截断边界条件,这样就产生了大量的未知量。因此,微分方程方法适合分析非均匀介质问题和封闭区域内的复杂电磁问题。积分方程方法的代表性方法有矩量法(method of moment, MoM)^[48,49]和边界元法(BEM)^[50]等。与微分方程方法相比,积分方程方法在公式中已经隐含了无穷远处的辐射边界条件。因此,积分方程方法只需对目标进行离散,其产生的未知量远远小于微分方程方法。积分方程方法主要分为基于矩量法的体积分方程(volume integral equation, VIE)方法和基于矩量法的面积分方程(surface integral equation, SIE)方法两种。由于求解 SIE 只需要对物体表面进行剖分,而求解 VIE 需要对整个物体进行剖分,所以相对于 VIE 方法, SIE 方法只需要较少的未知量就可以解决问题。在分析均匀介质结构问题时, VIE 方法和 SIE

方法都是可行的,但是 VIE 方法可以很好地处理非均匀介质的复杂结构。由于格林(Green)函数的非局部性,积分方程方法的缺点是产生的阻抗矩阵是稠密的,因而对计算机的存储量和计算量的需求分别为 $O(N^2)$ 和 $O(N^3)$,其中 N 是矩阵的维数。当未知量 N 很大时,就需要很大的内存和很长的计算时间。这些在现实应用中都是难以忍受的,因此需要引入快速算法来求解频域积分方程问题,主要有以下三类快速算法。

其一,基于格林函数展开的快速方法。快速多极子算法(fast multipole algorithm, FMA)^[51-53]的思想最初由 Rokhlin 等提出。随后,周永祖教授课题组将其发展到求解三维 Helmholtz 问题,利用插值方法提出了多层快速多极子算法(multilevel fast multipole algorithm, MLFMA)^[54,55],并开发出能在高性能微机和小型工作站上解决百万量级电大尺寸目标的电磁散射问题的电磁计算软件 FISC(fast Illinois solver code)。MLFMA 利用加法定理对格林函数展开,通过聚合-转移-配置过程计算远场组之间的相互作用。MLFMA 可以把 MoM 的内存和计算复杂度降为 $O(N \log N)$,由于其解决电磁散射问题时效率高,国内外众多学者对其进行了深入的研究。White 等把 MLFMA 用于三维静态场提取复杂结构电容参数^[56]。MLFMA 的后续研究主要有 MLFMA 并行技术^[57-62]和 MLFMA 中的近似算法解决电大目标电磁散射,包括射线传播多层快速多极子、快速远场近似等^[63,64], MLFMA 解决低频问题^[65-69], MLFMA 解决复杂环境如半空间^[70-73]、平面微带^[74-76]、封装结构^[77,78], MLFMA 加速有限元边界积分方程方法(FEBI)等^[79-81]。MLFMA 强烈依赖于问题格林函数,当问题的格林函数很复杂时,对其进行展开就相对复杂。有些问题的格林函数很难得到其展开形式,因此就无法采用 MLFMA。类似的方法还有浙江大学的王浩刚博士等在 2005 年提出的多层格林函数插值方法(multilevel Green's function interpolation method, MLGFIM)^[82],美国 Purdue 大学的 Jiao 教授等在 2008 年提出的 H 矩阵(hierarchical matrix)方法和 2009 年提出的 H^2 矩阵方法^[83,84]。

其二,基于快速傅里叶变换(fast Fourier transformation, FFT)的方法。共轭梯度快速傅里叶变换(conjugate gradient-fast Fourier transformation, CG-FFT)方法仅适用于相同的长方体网格离散的规则结构以实施卷积,对于任意形状的结构,只能用阶梯形去近似逼近。近年来又产生了基于快速傅里叶变换的自适应积分方法(adaptive integral method, AIM)^[85]、预修正快速傅里叶变换(precorrected-FFT, P-FFT)方法^[86]、积分方程快速傅里叶变换(integral equation-FFT, IE-FFT)方法^[87]、稀疏矩阵/规则网格(sparse matrix canonical grid, SMCG)方法^[88,89]等。FFT 类方法通过将格林函数投影到规则网格点—FFT 加速规则网格点之间的耦合作用—规则点插值到不规则点的方式实现加速。FFT 类方法对格林函数的近似具有比 MLFMA 更好的灵活性。FFT 类方法分析三维表面问题时将 MoM 的

内存复杂度降为 $O(N^{1.5})$, 计算复杂度降为 $O(N^{1.5} \log N)$ 。虽然 FFT 类方法的复杂度高于 MLFMA, 但是复杂度前面的系数很小, 所以计算效率依旧很高。对于三维问题, 表面积分方程需要建立一个空间的体网格, 这是 FFT 类方法复杂度高于 MLFMA 的原因。FFT 类方法的后续研究一方面为 FFT 类方法的改进^[90-94] (如网格、执行过程等), 另一方面为 FFT 类方法解决介质散射问题^[95-98]、微带电路和天线问题^[99, 100]、三维集成电路问题^[101, 102] 和涂覆问题等^[103]。

其三, 基于阻抗矩阵的低秩压缩方法。低秩压缩方法主要分为两类: 一类为与核相关、基于格林函数矩阵低秩表示的方法, 如 H^2 矩阵方法^[104, 105]、快速方向性多层算法 (fast directional multilevel algorithm, FDMA)^[106, 107]; 另一类为基于矩阵分解的、与核无关的方法, 如 IES3^[108]、H 矩阵^[109, 110]、自适应交叉近似 (adaptive cross approximation, ACA)^[111, 112]、多层矩阵压缩算法 (multilevel matrix decomposition algorithm, MLMDA)^[113]、多层 UV (multilevel UV, MLUV)^[114] 等方法。本书主要研究与核无关的低秩压缩方法, 下面为书写方便, 将其统称为低秩压缩方法。该方法的优点是实现简单, 可以方便地应用现有的 MoM 程序加速求解, 缺点是比与核相关的方法 (MLFMA、FFT 类方法) 效率低。文献^[111]、^[115] 和 ^[116] 中使用再压缩技术提高低秩分解的效率, 文献^[117] 提出对于每个组只构造一个低秩压缩分解矩阵来改进现有的低秩压缩方法。对于前文中提到的传统的低秩压缩, 即使具有多层的树形结构, 但是在每一层都需要重新构造低秩压缩分解矩阵, 这个过程需要巨大的内存和计算时间。近来, 文献^[118] 和 ^[119] 提出了一种嵌套的低秩压缩分解方法, 它对中低频问题可以达到 $O(N)$ 的计算量, 全波分析的计算复杂度达到 $O(N \log N)$ 。由于低秩压缩方法比 MLFMA 和 FFT 法具有更高的使用灵活性, 所以近年来逐渐吸引了众多研究人员的兴趣, 并用于解决实际工程问题^[112, 120-123]。

1.2 迭代解法和预条件技术

无论是积分方程方法还是微分方程方法, 都要求解由数值方法离散积分方程或者微分方程导出的线性方程组。一般来说, 求解线性系统的方法大体上可以分为两种: 一种是直接解法^[124-127]; 另一种是迭代解法^[128-145]。基于矩阵直接求逆的直接解法是求解线性方程组最基本的方法。过去, 直接解法为许多工业领域的首选求解器, 这主要是因为直接解法有非常好的稳定性。目前有许多功能强大的用于求解大型稀疏线性系统的直接解法软件包, 如 Umfpack 等^[126]。但是直接解法需要消耗高复杂度的内存资源及求解时间。对于有限元稀疏线性系统的求解, 采用直接解法往往需要比矩阵本身的存储内存大上数十倍甚至上百倍的存储空间。这主要是因为, 在矩阵分解的过程中, 在一些元素为零的位置上, 会有非零元素的填充^[135]。举例来说, 对于一个有限元线性系统, 其系数矩阵一般每行包含的

元素不超过 30 个,平均仅十几个非零元素。如果采用直接解法,如 LU 分解,在系数矩阵分解过程中,每行会有数百个非零元素填充,从而占用很大的内存空间。直接求解线性系统所需的计算量和内存随着线性系统未知量个数的增大会急剧增加,特别是对于三维偏微分方程离散产生的问题。一般来说,直接求解算法所需的计算量为 $O(n^3)$, n 为矩阵的行数。对三维空间的数值仿真一般会生成包含数万至数百万个未知量的线性系统。而对于某些问题,所产生的线性系统甚至可能包含上亿的未知量,如美国能源部的 ANSI 程序^[146]。对于这类问题,直接解法就显得无能为力,这时候就需要迭代解法。

迭代解法相对直接解法需要更少的内存空间以及更少的操作(特别当寻求精度相对较低的近似解时),但是没有直接解法所具有的稳定性的。人们对性能稳定且有效的迭代算法的研究促使了一系列迭代算法的产生。迭代解法有许多不同类型的形式。迭代解法的发展经历了从经典的雅可比(Jacobi)、高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)等迭代法到现在的预条件 Krylov 子空间迭代法^[147-167],再到多重网格方法^[168-187]等一系列阶段。

迭代法的发展趋势主要要求在解决大规模问题时使用尽量少的内存,并在尽可能短的时间内求解。目前,占主要地位的预条件 Krylov 子空间迭代法与近年来快速发展并获得人们重视的多重网格方法等都朝着这一方向发展。

在 Krylov 子空间迭代方法中,共轭梯度(conjugate gradient, CG)方法^[186]应用最为广泛,与预条件技术的结合最为紧密,这是因为在理论上,对于对称正定矩阵,当 CG 方法迭代步数与方程数或未知数个数相同时,必将得到精确解。对于分析不均匀介质目标的体积分方程方法,可以利用 FFT 技术实现快速的矩阵矢量乘操作。将 FFT 技术同常用的 CG 方法相结合,就形成了求解体积分方程的 CG-FFT 迭代算法^[187]。尽管 CG-FFT 迭代算法解决了传统恒量法的不足,将求解阻抗矩阵方程所需的计算复杂度和存储量分别降低到了 $O(KN\log N)$ 和 $O(N)$,然而其收敛速度缓慢,表现在迭代过程中就是达到满意精度所需的迭代步数多,即 K 取值大,影响了整体求解过程的效率。

为了加速 CG-FFT 算法的收敛速度,双共轭梯度(BCG)迭代算法被用来替代 CG 算法实现阻抗矩阵方程求解的迭代过程,形成了求解体积分方程的 BCG-FFT 算法^[188,189]。BCG-FFT 算法的收敛速度比常用的 CG-FFT 算法有较大幅度的提高,但破坏了 CG-FFT 算法稳定单调的收敛特性,其收敛曲线极不规则。一种解决该问题的办法就是引入稳定的双共轭梯度(BCGS)迭代算法,用以平滑 BCG 迭代算法的收敛曲线。但是这种 BCGS-FFT 算法^[190]仍然没有从根本上解决 BCG-FFT 算法的收敛不稳定性问题。

此外,上述 CG-FFT、BCG-FFT 和 BCGS-FFT 算法在其迭代过程中,不仅需要直接的阻抗矩阵与矢量相乘的信息,而且需要阻抗矩阵的共轭转置与矢量相乘的信息。若矩阵是非对称的,计算其共轭转置矩阵与矢量相乘会比较困难。如果

采用无转置的准最小余量迭代(TFQMR)算法,相应的 TFQMR-FFT^[191]算法则只需要直接的矩阵与矢量相乘信息。但是,TFQMR-FFT 算法的收敛特性同样极不稳定,而且对于复杂的问题,其迭代过程常常不能收敛。

广义最小余量(generalized minimal residual, GMRES)迭代算法在迭代过程中只需要一种直接的矩阵与矢量相乘的信息,并且具有稳定单调的收敛特性。然而,在大多数情况下,其相应的 GMRES-FFT 算法^[192]在求解体积分方程时的收敛速度却比不上 BCG-FFT 算法和 BCGS-FFT 算法。文献[192]中对以上各种快速算法在体积分方程中的应用进行了比较系统的描述。

近些年来,人们对迭代步数为 $O(n)$ 的算法的研究促进了多重网格算法^[168-185]的发展。多重网格算法由 Achi Brandt、Wolfgang Hackbusch 等提出,其思想是在迭代的过程中将线性系统的解的残差分解为高频残差分量与低频残差分量,分别使用不同的算法消去这两种分量,从而达到最优的迭代步数。该类方法可以看成一种常用迭代法,既可以单独使用,也可以与 Krylov 子空间算法结合使用来加快迭代速度。使用多层网格的多重网格方法称为 h -型多重网格方法,而利用不同阶基函数的方法通常称为 p -型多重网格方法,其中 h 代表网格尺寸, p 代表基函数的阶数。最初的多重网格算法主要用来求解标量二阶偏微分方程。随后随着研究的深入,多重网格已经能够处理越来越多的物理问题和几何结构。在这些方法中,代数多重网格(algebraic multigrid, AMG)法或者 p -型多重网格算法^[171-174]由于不需要知道物理问题的具体特性,只需要知道系数矩阵的信息,具有很广泛的适用性,而成为目前发展的重点方向。对于很多问题,AMG 方法具有与网格无关的收敛速度和 $O(n)$ 的计算复杂度,但是在用于电磁场中的矢量有限元方程时,该方法却没有预期的收敛性。Chen 等使用高阶矢量等级基函数来构造有限元方程,并采用一种插值算子与投影算子都很简单的多重网格算法来求解^[182,183]。

用于克服迭代解法收敛耗时缺点的解决途径主要有两种:①迭代解法的每一步迭代中,矩阵矢量乘是主要的运算,其计算量正比于 $O(N^2)$,因此,降低迭代方法的矩阵矢量乘的计算复杂度,减少每一步的迭代时间必将节省大量的计算时间,如上述的 MLFMA、FFT 方法和低秩压缩方法;②减少迭代收敛所需的步数,同样能够节省许多计算时间。

第二种实现迭代解法加速收敛的方法主要是采用预条件技术^[133,193]。无论是 MLFMA 还是 CG-FFT 方法,虽然它们每次迭代的计算复杂度都是 $O(N\log N)$,但在分析复杂微波集成电路以及电大尺寸结构电磁特性时都存在收敛速度较慢、迭代次数较多、计算量巨大的问题,因此可以采用合适的预条件技术以减少迭代步数。预条件技术是指在方程两边同时乘以一个辅助矩阵,使乘积矩阵的条件数降低,加快迭代过程的收敛速度。其最基本的思想是将原始的线性系统转换为另一个等价的线性系统,使转换后的线性系统与原始的线性系统拥有相同的解,并且对于迭代法更加易于求解。

对于预条件技术的研究,人们一方面希望获得通用性强的算法,使之不需要任何外部信息就能使用,同时又希望其对一些严重病态的问题能够表现出优异的收敛性,因此发展出了针对一般问题与特定问题的预条件算法。针对一般问题的方法是指基于代数矩阵,而不需要物理问题的相关信息的方法;针对特定问题的方法是指利用物理问题的特性进行求解的方法,包括基于矢量磁位($\mathbf{A}$)与标量电位(V)的分析方法^[194-197]、基于算子偏移的方法^[198-203]等。

更多的研究工作则是集中在阻抗矩阵的预条件上^[204-208],这主要是因为利用快速多极子技术求解表面积分方程时,近区作用的稀疏矩阵得到了显式的存储,从而使得基于稀疏矩阵的各种预条件技术^[133]可以直接被引入矩量法稠密矩阵的迭代求解过程中。此外,这种预条件技术只是涉及近区作用稀疏矩阵代数信息的处理,而与积分方程的形式及基函数的选取过程无关,增强了程序的可移植性与通用性。

一种最简单的预条件技术就是对角预条件技术(Diag),它利用矩阵的对角线元素构成的对角矩阵作为阻抗矩阵的预条件矩阵。对角预条件技术要求待求解的矩阵严格对角占优,因此其对一般矩阵迭代算法收敛速度的改善作用并不明显。一种改善措施就是采用近区矩阵的块对角预条件技术(block Diag)或对称超松弛(SSOR)预条件技术。由于块对角预条件算子和对称超松弛预条件算子比对角预条件算子包含更多的阻抗矩阵元素的信息,所以它们的收敛改善效果一般要优于对角预条件。

广泛使用于稀疏矩阵方程的不完全LU分解(ILU)预条件技术同样被引入矩量法中稠密阻抗矩阵的迭代求解过程中^[205]。根据预条件算子中矩阵元素填充的方式不同,ILU预条件技术可以划分为三类:与稀疏矩阵非零模式相同的ILU预条件技术ILU(0)、利用填充级数的概念控制预条件算子中矩阵元素填充的ILU预条件技术ILU(p)以及利用门限阈值控制预条件算子中矩阵元素填充的ILU预条件技术ILUT。由于ILU(p)和ILUT预条件算子在其构造过程中允许更多的非零元素的填充,其对收敛改善的效果要优于ILU(0)预条件算子。但是也正因为如此,ILU(p)和ILUT预条件算子的构造计算量大大超出了ILU(0)预条件算子。尤其是电大尺寸目标电磁散射的分析中,问题变得尤为严重。此外,ILU类预条件算子构造过程中的不稳定特性^[209]也被自然地引入,使得对于某些问题迭代算法收敛异常缓慢甚至发散。针对稀疏矩阵ILU预条件的对角扰动技术^[210]能够在很大程度上解决这个问题,但是它们对于矩量法中稠密矩阵的ILU预条件技术并不适用。

稀疏近似逆(sparse approximate inverse,SAI)预条件技术在积分方程形成的稠密矩阵的预条件中得到了很好的应用^[205],其通过近区作用的稀疏矩阵显式地构造出阻抗矩阵的近似逆矩阵,作为其预条件算子。这种近似逆预条件技术在积