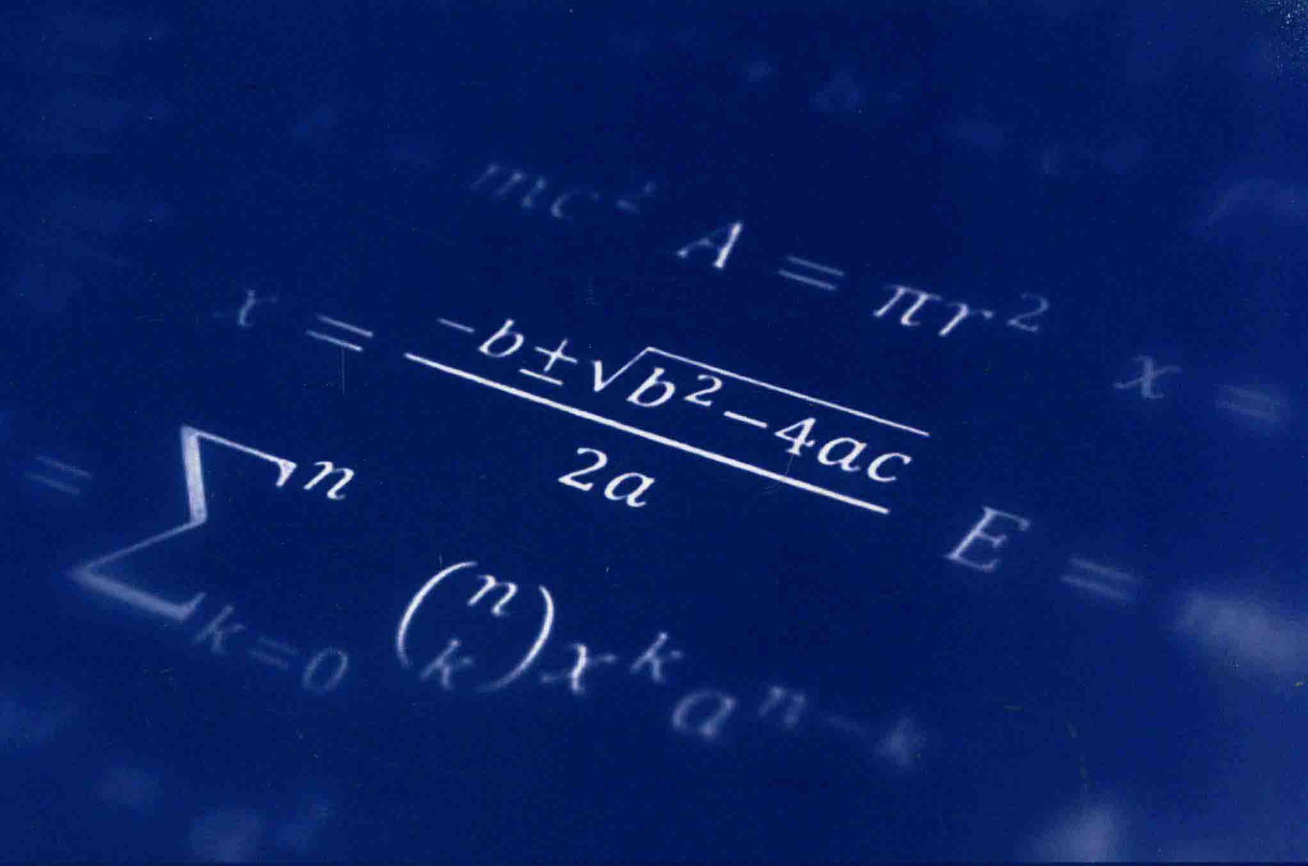

基于知识形成过程的数学教学

冯启磊　杨小丽　刘春艳　顿继安　著

高等教育出版社

基于知识形成过程的数学教学

Jiyu Zhishi Xingcheng Guocheng de Shuxue Jiaoxue

冯启磊　杨小丽　刘春艳　顿继安　著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书包括两部分内容。第一部分是基于知识形成过程的数学教学的理论探讨，力图回答关于知识形成过程的数学教学的两个基本问题：何以为是与何以可能。第一章回答了基于知识形成过程的数学教学“何以为是”的问题，结合案例解析了数学史意义下的知识形成过程所历经的关键步骤以及带给教学的启示，论述了基于知识形成过程的数学教学的内涵是学生再创造意义下的数学教学。第二章从方法论上回答基于知识形成过程的数学教学“何以可能”的问题，借助案例论述开展知识形成过程的数学教学的具体方法与策略。

第二部分给出了基于知识形成过程的中学数学教学的部分实践案例。第三章是数与代数领域的实践与案例，选择了中学数学代数领域的三个核心概念：运算、方程与函数；第四章是几何领域的实践与案例，从几何中概念性知识和方法性知识的形成过程两个角度展开；第五章是概率统计领域的实践与案例，从统计和概率知识的核心概念形成过程展开。

本书借助一系列具体的教学案例解析数学知识形成过程的理论、方法和策略，期望读者在具体生动而又深刻的案例中去揣摩理解甚至应用这些方法和策略。不仅如此，更希望借助这些案例能够向读者传达一种教学信念：学生是成长中的人，成长意味着多种可能，教学需要从多种可能性出发，使其努力到达应该到的地方，而不仅仅是教师或考试评价规定的地方。

本书可作为中学教师职后研修（继续教育）用书，也可作为教学专业师范生（本科生和研究生）的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

基于知识形成过程的数学教学 / 冯启磊等著.--北京:高等教育出版社,2017.7

ISBN 978-7-04-047938-6

Ⅰ.①基… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①数学教学-教学研究 Ⅳ.①O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 148854 号

策划编辑 张东英　　责任编辑 薛春玲　　封面设计 李树龙　　版式设计 范晓红
插图绘制 邓 超　　责任校对 张 薇　　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京宏信印刷厂	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
			http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	9.5	版　　次	2017 年 7 月第 1 版
字　　数	220 千字	印　　次	2017 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	20.30 元

物 料 号 47938-00

序　言

面前的这本书，不禁让我回忆起一段难忘的往事，即1987年H.Freudenthal在北京教育学院所做的影响深远的系列讲座（后被编入《Revisiting Mathematics Education：China Lectures》）。正是通过这一系列报告，我国的数学教育工作者第一次接触"向学生呈现'带着脚手架'的数学大厦"的主张。今天基于"知识形成过程"的数学教学，虽然得到广泛的认同，但是无论在实践还是理论层面，仍然是有待深入探讨的话题，甚至是永恒的话题。

令我欣慰的是，30年过去了，北京教育学院数学系的一群学者，又聚集在一起，再次回到"起点"。这次他们从对目前中学数学教学存在的问题的透视出发，就基于知识形成过程的数学教学，做既有较强针对性，而又颇有新意和深入浅出的讨论，也是对那次历史性的讲学的致敬。

多年从事数学教师培训的实践，给本书的作者们提供了难得的机会，使他们能投身教学实际，和一线教师深入的交流，从而能够以敏锐的眼光，洞察教学普遍存在的问题，并做出较中肯的"诊断"分析。本书作者发现，不少教师在教学中也力图给学生，提供经历"知识形成过程"的机会，但其效果却差强人意。他们的困惑是："为什么我所精心设计的教学情境，却并未能帮助学生建构真正的知识形成过程？"

如何解释这些现象呢？作者们运用所提炼的，关于数学教育与教学的理论，对此做了深入的分析。他们认为其根本原因在于：对作为教学的载体的"数学知识"，对其客观的形成过程关注不够，或者对于数学过程的理解有所偏颇。也是这个原因，这些教师所创设的情境既忽略了学生的智慧，也忽视了学生的困难，自然不能为学生的数学"再创造"提供很好引导。

作者把他们的理论，应用于这些现象的分析切中要害，抓住了问题的关键，更为"基于数学知识形成过程"的教学设计与实践，提供了"大思想"和具体的解决方案。作者精心选择了典型的具体的案例，辨析了情境、问题和呈现顺序与知识形成过程之间的关系，解析了数学史和教学意义下的知识形成过程所历经的关键步骤以及带给教学的启示，论述了基于知识形成过程的数学教学的内涵与教学策略。

本书的一个特色是通过具体的案例分析，对（学校的）核心的数学概念形成过程进行理论分析。根据多年与一线教师的沟通交流所获得的经验，本书聚焦于什么是"数学知识的形成过程"以及在数学教学中"何以可能"的问题，采用案例分析的方法，力求通过大量教学案例的解读，向读者传达数学知识形成过程的一般规律、方法与策略。作者多年的数学教师培训实践表明，这些理论思考与案例分析，非常贴近一线教师的教学，也得到了他们的认同。

王长沛

2016年12月

前　言

做理解数学过程的数学教师

数学呈现在人们面前的是一系列的概念、公式、定理，反映了对现实世界的数量关系和空间形式的定性把握和定量刻画，是人们思维活动的产物，因此理解数学，需要理解其本质特征。但教师仅仅理解数学本质是不够的。数学在其建立和发展的过程中，从最初的零星想法或丰富而又复杂的问题情境，到一步步抽象出严格的概念与公式，并进行符号表达，进而经过严格的逻辑演绎推理形成抽象的形式体系，经历了曲折甚至迂回的过程，这其中折射出的数学家与数学工作者寻求问题解决的数学思考路径和思维方法，面对问题持之以恒的科学态度，是学习者需要学习和借鉴的，因此教师更需要理解数学过程。但正如M·克莱因谈到的那样，“课本中的字斟句酌的叙述，未能表现出创造过程中的斗争、挫折，以及在建立一个客观的结构之前，数学家所走过的艰苦漫长的道路。”数学教学中也常常出现被弗莱登塔尔称之为“教学法的颠倒”现象。数学家在创作的过程中历经的“火热的思考”，呈现在学生面前的却是“冰冷的美丽”，而学生在数学学习中，不仅是要学习那些数学知识，更要学习获取这些数学知识的思维方法，以及经历建构知识过程中的困难，捕捉那些灵光一闪的念头，完善解决问题的方法等。

一个数学知识的形成，或者由于现实问题的需要，或者由于已有知识存在着不足或者需要改进，数学教学需要引导学生对已有的知识进行分析和反思，阐明问题提出的缘由，并带领学生在已有的知识经验和生活经验的基础上，通过观察、分析、判断、归纳、概括和抽象，一步步形成新的知识。因此，理解数学过程，我们更加关注的是作为教与学的载体“数学知识”的客观形成过程，这里的客观一方面是指“数学知识”在数学发展史中的生长轨迹，更重要的一方面是作为学习主体的学生“再创造”的形成过程。

随着新课程改革的深入，很多老师逐渐有意识地在教学中注重数学过程的展开，突出学生的学习主体地位。但很多情形下更加注重的却是数学教学过程是否顺利，是否有学生的交流与合作这样的形式，比如，在学习“一元二次方程的求根公式法”时，教师先用让学生做3道练习题的方式复习配方法，小组交流修正答案，接着学生总结“用配方法解一元二次方程的步骤”，继而教师提出学习任务“任何一元二次方程都可以写成一般形式 $ax^2+bx+c=0$，其中 $a\neq0$，我们尝试利用配方法来解这个方程”并得到求根公式。这其中有师生之间的互动，也有小组讨论，确实是一个很顺利的“教学过程”，但是仔细分析却发现，这个“过程”却不是真正意义上的“数学过程”，因为教学没有回答学习公式法必要性的问题，即用配方法可以解决一元二次方程的求根问题，为什么要学习公式法？公式法是基于什么样的问题提出来的？也就是教学中没有用真问题激发学生的兴趣与深入思考，也没有关注到学生对这个问题会有哪些思考的角度与方法，即教师并没有真正理解“公式法”的形成过程。

理解数学过程，教师也需要从学生的角度去体验知识形成的路途上有着怎样的风景秀丽或者山峦阻碍，峰回路转间彰显着教师的智慧，就如同马克斯·范梅南提出的一个寓意深刻的教学比喻，“为了来学校学习新知识，学生需要跨越一些障碍（比如，一条街）才能来到老师的身边（学校）。一位机智的教育者认识到要跨越街道走过来的不是孩子，而是老师。”即教师要先跨越障碍来到学生身边，帮助学生认识到要跨过去的地方，帮助学生寻找到有效的方式，从而顺利走到另外一边来。

理解数学过程，教师能够帮助学生建立知识的内在联系，能够培养学生提出问题、分析问题和解决问题的能力，能够引导学生用数学的眼光观察世界（不仅是现实世界也包含数学世界），用数学的思维分析世界，用数学的语言表达世界，真正的实践着对学生数学素养的培养。

如此，理解数学过程，是迷恋学生的数学成长的过程。

编者

2016 年 12 月

目　录

第一部分　基于知识形成过程的数学教学的理论探讨 …… 1
第一章　数学知识形成过程中的基本问题 …… 3
第一节　数学知识形成过程教学实践中存在的问题透视 …… 3
第二节　从数学史看知识的形成过程 …… 8
第三节　数学史意义下的知识形成过程与数学教学 …… 15
第四节　“再创造”意义下的知识形成过程 …… 20
第二章　按照知识的形成过程设计数学教学 …… 25
第一节　还原数学知识形成过程的途径与方法 …… 25
第二节　在知识形成的关键环节读懂学生 …… 32
第三节　以多样化的方法帮助学生突破难点 …… 55
第二部分　基于知识形成过程的中学数学教学实践与案例 …… 75
第三章　数与代数领域的实践与案例 …… 77
第一节　运算知识的形成过程分析与教学案例 …… 77
第二节　方程知识的形成过程分析与教学案例 …… 85
第三节　函数知识的形成过程分析与教学案例 …… 95
第四章　几何领域的实践与案例 …… 104
第一节　几何中概念性知识的形成过程分析与教学案例 …… 104
第二节　几何中方法性知识的形成过程分析与教学案例 …… 122
第五章　概率统计领域的实践与案例 …… 129
第一节　概率知识的形成过程分析与教学案例 …… 129
第二节　统计知识的形成过程分析与教学案例 …… 134
后记 …… 141

第一部分

基于知识形成过程的数学教学的理论探讨

第一章　数学知识形成过程中的基本问题

关于知识的形成过程，探讨的是作为学习客体的具体数学知识是怎样产生和发展的，这里的数学知识包括数学中的概念、公理、定理法则等，也包括解决问题的具体方法。

对数学知识形成过程的关注由来已久，然而，人们的讨论或经常聚焦于价值，或直接指向“怎么教”，却经常忽略对某个具体的数学知识的形成过程到底为何的探析，例如，在一篇论文中，在“揭示概念的形成过程”小标题下写的是这样的一段话：

相反数的概念，可以这样设计，对学生列举诸如：3，-3；5，-5；6，-6 三组数，接着启发引导学生将同一组的数做加法；取各组数中的绝对值，将各数在数轴上表示出来，并对结果一一加以对比，找出它们的共同规律，由学生自己归纳总结出相反数的一些特征：两数之和为零，绝对值相等符号相反，在数轴上关于原点对称。由此提出下列问题：在什么情况下，有理数 A 和有理数 B 互为相反数？学生会得出结论。这样由学生自己分别从数轴角度、加法角度及绝对值角度来认识相反数的概念，学生印象深刻，掌握牢固。①

这段话说的是教学活动设计的建议，建议的内容是要从加法、绝对值、数轴三个角度让学生认识相反数的概念，其指向是“让学生对相反数概念印象深刻、掌握牢固”，显然这是在探讨学生学习的视角，即“学生作为知识学习的主体，建构和理解知识的过程应该是怎样的”，并非相反数概念的客观形成过程，并未回答相反数概念是在什么背景下、出于解决什么问题的需要、解决问题的过程中用了哪些方法、概念如何定义这些问题，而这些问题才是知识形成过程包括的问题，也是本章将要探讨的基本问题。

第一节　数学知识形成过程教学实践中存在的问题透视

“对数学本质的认识是一切教学法的根”，数学教育家赫斯（Hersh）的这句名言代表了许多数学教育工作者的看法，实际上，对同一个教学内容，不同的人往往会有不同的解释，其中，对所教知识的形成过程的解释则会直接影响教师所设计的教学过程，也可以换个角度说：教师所设计的教学过程透射出的是其自身对知识形成过程的看法。实际上，实践中的诸多问题也根源于实践者对知识形成过程认识误区。

本节我们就来分析几个典型的认识误区。

一、情境与知识的形成过程的关系

“创设情境，提出问题”是体现知识形成过程的教学的标志，因为知识总是产生于问题，问题又总是依赖于一定的情境，当然，这里的情境既包括现实情境也包括数学情境。然而，

① 顾玉林.数学教学要加强知识形成过程的认识[J].苏州教育学院学报，1997(6)：133-134.

有了“情境”,并不一定就展示了知识的形成过程,以在教学实践中被得到广泛采用的“情境型”教学模式为例,这种教学模式可以用图 1-1 表示。

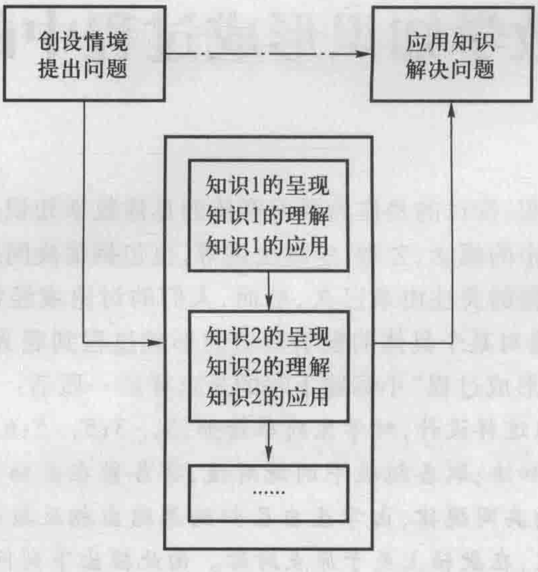

图 1-1

下面的“同类项与合并同类项”案例就是“情境型”教学模式的典型代表:

案例 1　同类项与合并同类项

L 老师首先组织了一个猜数游戏:

请同学们分别给出 x、y 的任意值,让老师来告诉你们下面代数式的值:

$$3x^2y+xy-2xy+(-3x^2y)$$

学生们给出 x 和 y 的各种各样复杂的数值,发现 L 老师都能脱口而出代数式的值,经过检验,发现老师给出的答案都是正确的。

L 老师说:想知道老师为什么能够这么快就算出代数式的值吗? 学完本节课的知识,你们就知道其中的奥秘了。

接下来,L 老师出示了若干组单项式,请同学用简洁的语言概括每组单项式的特点:

(1) $-a,2a,-3a$;

(2) $-4mn^2,\frac{3}{7}mn^2,-\frac{3}{7}mn^2$;

(3) $-a^3b^2,\frac{8}{3}a^3b^2,4b^2a^3$。

这样就得到了同类项的定义,通过几个习题的帮助,学生理解了同类项的定义。

继而,L 老师又呈现了一个“粉笔盒体积问题”:

如图 1-2 所示,形状为长方体的粉笔盒,底面是边长为 a 的正方形,高为 b 厘米,如果第一堆有 2 个,第二堆有 6 个,第三堆有 9 个,怎样表示这批粉笔盒的总体积:

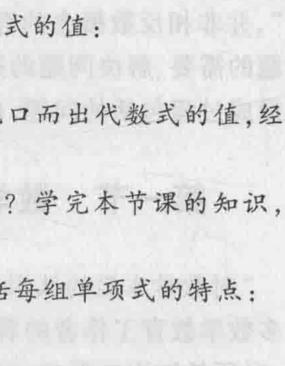

图 1-2

通过这个问题和另外两个题目总结了合并同类项法则。

最后，L老师再次呈现“猜数游戏”活动，利用这节课的知识揭开了其中游戏的“奥秘”。

需要注意的是，许多教师教案中所写“创设情境，引入新知”环节，实际上也并未“引入新知”，而是引出了一个可能带来新知的问题，我们将这类活动统称为“创设情境，提出问题”。

情境的本质是蕴含着问题的现象。在上述案例中，“猜数游戏”就是一个情境，其中蕴含的问题就是：教师能够这么迅速地算出如此复杂的代数式的值，其间的奥秘是什么？如果把它变成数学问题，则是：这个整式的什么特点使得其可以简便运算？答案是构成这个整式的单项式中存在着一些同类项，它们可以通过合并从而简化运算。这一活动的设计意味着教师对同类项知识的本质的认识：同类项知识之所以产生，是由于遇到了代数式运算中的化简问题。

“问题是数学的心脏”①。在这节课中，猜数游戏有利于激发学生的兴趣，引发的“奥秘为何”的问题则激起了学生的好奇心，如果接下来对这一问题进行寻根究底的解答的话，也会带来新知识的产生。然而，在这节课，这一问题并没有成为“心脏”，知识的产生过程并没有围绕着这个问题的分析和解决展开，在接下来的教学活动中，L老师说“学完这节课的知识，你们就知道其中的奥秘了”，直到在同类项的概念和合并同类项法则的知识得出之后，再次与此问题呼应，应用新知识揭开了猜数游戏的奥秘。

类似的设计思路在教学中非常普遍，我们不妨再看一个例子：

案例2　线段垂直平分线的性质

教师通过ppt展示提出“购物中心”问题：

为了方便居民的出行，计划在三个住宅小区A、B、C之间修建一个大型购物中心，该购物中心应建于何处，才能使得它到三个小区的距离相等？

一名学生抢答道：做角平分线……

教师：做角平分线对不对呢？我们还不知道，学完了这节课，我们就知道这个问题的答案了。

接下来，同学们在老师的带领下，画出了线段的垂直平分线，选择线段垂直平分线上的任一点与线段的端点连线测量其长度，得到了关于线段垂直平分线的猜想，借助几何画板对更多的点进行验证后，得到了线段垂直平分线的性质定理后，请学生解决了几个简单问题，最后应用知识解决了“购物中心”问题。

这个案例采用的是现实情境，学生显然是兴奋的、有同学凭借直觉迅速做出了反应，当然其答案是错误的，而从教师的反馈中可以看出，他并没有计划此时处理这个情境型问题，与“同类项”案例一样，教师将精心设计、已经引得学生兴致盎然、开始思考的问题悬置起来，在学生认知的过程中，这样的问题实质只是知识应用阶段的一个“较低级练习”②，这种处理方式背后是教师对于问题与知识关系的认识：只有有了知识才能解决问题。

但显然这与知识的真实形成过程不符。所有知识都是人创造出来的，而在某个知识被

① 哈尔莫斯.数学的心脏[J].张静译.数学通报，1982(4)：27.

② 同①.

人明确地创造出来以前,人们遇到相关问题也不会坐以待毙,而是会努力用自己已经掌握的工具解决问题,这些工具实质就是蕴含该知识的潜在形态,例如,合并同类项的潜在形态是简化思想和乘法对加法的分配律,如果这样的问题具有比较典型性、普遍性,人们就会自觉地从解决具体问题的过程中提炼、总结,从而将知识从潜在形态变为显在形态并被命名,成为解决类似问题的便捷工具。因此,如果尊重了知识的形成过程,在情境性问题引发了学生的兴趣、激起了学生的探索愿望后,接下来应该对该问题进行分析、解决,之后再对解决问题的方法、程序或者得到的结论中蕴含的普适性、一般性的内容加以总结、提炼,形成知识。

按照对情境性问题在知识形成过程中作用的认识,教学模式需要修正,如图 1-3 所示。

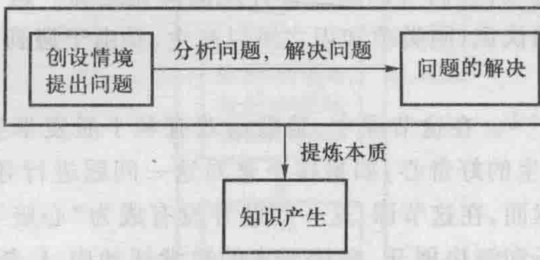

图 1-3

在这一模式下,情境性问题并非简单的"敲门砖",而是一个需要学生投入情感、智慧去解决的问题,当然我们不能期望学生都能够顺利解决这个问题,例如,在"同类项与合并同类项"一课,我们发现,学生在探索奥秘时,他们首先检验教师计算结果的正确与否,此时就有不同的方法:方法一是直接对代数式进行化简再代入求值,方法二是将数值代入后再利用乘法分配律简算,方法三是逐个将字母表示的数代入每个单项式分别求值,然后再做加减法。当这些不同的方法呈现在课堂上时,教师的奥秘自显,当这个问题中所蕴含的奥秘走向一般化时,知识(包括同类项的概念和合并同类项的法则)就产生了。

二、"问题—回答"的教学方式与知识的形成过程

可能有的读者会说:在"情境型"教学模式中的"新知探究"活动,比如,上面的"同类项与合并同类项"案例,教师并非直接呈现各个知识点,而是通过问题串引导学生解决问题得到的知识,甚至关键概念的定义也是由学生说出来的,应该比较充分体现了知识的形成过程啊?

这里通过一个"问题串"完成"新知探究"活动也是常见的活动组织方式,我们可以超越"情境型"教学模式来分析,其最大的问题在于问题串中的问题的特点,并非伴随着对情境性问题的分析和解决的需要而产生的,而是教师围绕着本节课要学的若干个知识点而设计的,它们就像波利亚在其著名的《怎样解题》一书中所说的"魔术师帽子中的兔子"一样,突然出现在学生面前,答案亦都直接指向了知识点。比如,同类项概念的定义得出活动中,虽然同类项的定义是学生通过观察、概括说出的,但是作为学生观察对象的单项式都是由教师按照符合同类项定义的标准选择、且以分组的方式呈现,特点明显,大大降低了学生犯错误、走弯路的机会,标准答案即同类项的定义能很顺利地给出。

和许多数学概念的教学一样,这一案例中,教师直接让学生通过观察若干个符合概念内涵的对象、概括其共同特征得到了概念的定义,这似乎与对教科书上对概念形成的解释一致:概念产生于对一类事物的本质特征的概括。但这是从结果的视角对概念的特征进行静

态描述，而动态地看科学概念的形成，是在大量事实和现象的基础上，经过缜密的思考和严谨的逻辑推理，找到现象之间的模式和联系，并将零散的事实组合成相互关联的整体，形成有意义的逻辑结构①。其中，精确地将具有共同“本质特征”的事物聚集到一起，自身就是分析与推理、建立不同事物或者现象之间的共同模式和联系的产物，这一过程，在“情境型”教学模式的“问题—回答”环节是没有的。

实际上，一个事物通常会有许多特征。比如，对于单项式 $2a$ 来说，系数为 2、含有一个字母、字母的指数是 1 等都是它的特征，而针对不同的问题，其“本质特征”也不同。例如：当 $2a$ 被与 $-a$，$-3a$ 放在一起进行比较时，其希望被关注的特征显然是：含有一个字母 a 且 a 的指数是 1；而当将其与 $2b$，$2c$，$2m$，…放在一起时，其最显著的特征则是都是某个字母的 2 倍、该字母的值每增加一个单位对应单项式的值都增加 2 个单位。实际上，当教师将分过类的单项式摆在学生面前时，事物的本质特征实质上就已经直接呈现在学生面前了，而学生用语言表述特征的活动是概念形成的第二个阶段——符号阶段，而缺失了此前的一个极为重要的阶段——简约阶段②。

概念形成的简约阶段的主要任务是：把握事物的本质，把繁杂问题简单化、条理化，能够清晰地表达③。比如，在解决整式加减法的化简问题时，认识到两个单项式“含有相同的字母、且相同的字母的次数相同”的价值，在处理整式乘法的问题时，发现关键是对同底数幂的乘法的处理。因此，概念形成的简约阶段必定起于问题，是对解决问题的方法与问题特征关系的分析带来了对本质的认识，而在认识的过程中，经常需要以具体正例与反例作为支撑认识者思维的支架、帮助认识者澄清思想，而“情境型”教学模式的“探究新知”环节，“问题—回答”链中直接呈现被教师整理过的符合概念的本质特征的正例，而忽视了这些例子自身实际上是围绕着对概念的本质特征的认识而构造或发现的，要想补充上概念形成的“简约阶段”，还需要正确认识并处理好第三个问题：知识的产生顺序与呈现顺序问题。

三、知识的产生顺序与呈现顺序的关系

在与老师们交流“同类项与合并同类项”等类似的案例时，有老师提出疑问：“探索奥秘不是合并同类项问题吗？应该先学同类项概念啊？”这种疑问反映了教师对数学和数学教学的看法是：数学是逻辑严密的学科，数学也是按照逻辑的方式发展的；数学教学也应该按照数学的演绎体系进行。

但这显然与事实不符。的确，我们今天看到的教科书中的数学逻辑严密，总是先规定定义，然后探讨定理。但这是事后组织、整理的产物，是写作的需要，也是为了知识传播的需要，并非一定是知识产生过程的真实反映。例如，椭圆的定义，通常是先利用两个图钉固定住一个绳子的两个端点，让粉笔绷紧绳子并移动，画出一条曲线，然后根据图形特点和作图过程概括出：到两个定点距离之和等于定长的点的轨迹是椭圆，在今天看来，这个定义非常自然、简洁，也非常有利于用代数方法探索椭圆的性质。但是，从数学史上看，最早的椭圆的定义来自两千多年前的古希腊，当时的数学家发现用平面截圆锥可以得到三种不同的曲线，

① 张颖之，刘恩山．核心概念在理科教学中的地位和作用［J］．教育学报，2010(2)：58.

② 史宁中．数学思想概论(Ⅰ)：数量与数量关系的抽象［M］．长春：东北师范大学出版社，2008：3.

③ 同②.

分别命名为双曲线、椭圆和抛物线,而今天教科书中的定义在当时被称为椭圆焦半径的性质,这一性质是阿波罗尼斯从截面获得的椭圆定义出发、用了7个命题、花了九牛二虎之力才偶然得到的,而利用这一性质创造出的椭圆的画法,则是17世纪由法国数学家舒腾(F.van Schooten)给出的①。

著名的数学教育家H.弗雷登塔尔将教科书中的知识呈现顺序与一首乐章序曲的创作、一本书的序言写作顺序做了比较,他说:

像乐曲的序曲一样,序言通常是最后才写,把它放在本书的最前面,这是一种写作风格的反映。我通常把这种风格在数学专著或者数学教科书中的表现称为教学法的颠倒:为适于印刷,必须把发现某一成果的顺序颠倒过来加以阐述;特别是对一些关键概念的定义,他们其实是结构的最终笔触,却总被摆在最前面。②

如果对数学的分析表明数学有一个演绎结构,那么就必须按照这个结构来教数学,或者更精确地说,要按照教师或教科书作者相信的某个特定的演绎体系来教。这就是我所谓的违反教学法的颠倒。学生面对的只是分析的结果,或是看着知道结果的教师将被分析的内容再放在一起。③

实际上,在"同类项与合并同类项"一课,我们就可以先让学生探索"猜数游戏"的奥秘,相信学生一定能够通过自主或者同学间的合作发现,这个具体问题中的代数式求值问题表面复杂,但是可以借助乘法分配律简化计算,再进一步追问触及本质的"类"的问题:"这个问题中的单项式具有的什么特点使得它能够化简呢?""到底什么样的两个单项式之和还是一个单项式呢?"可以看到,通过这样的活动,同类项概念和合并同类项的法则将成为探索"猜数游戏"这一奥秘活动之树上同步结出的两个果子,它们本来潜伏于运用乘法分配律简化计算的操作活动中,是人对"一般性"的追求使得思维对象的特征得以被觉察、思维过程得以被借助程序表达,有着自己特定名字的知识于是得以产生。

第二节　从数学史看知识的形成过程

今天所学的知识一定都有其真实的发生发展史,因此,我们需要到数学史上去寻找知识形成过程的轨迹,将数学家留下的研究过程的记录和反思作为我们认识和理解知识形成过程的最宝贵财富。

对数学已经发生的历史和正在发生的历史的考察表明,数学家从事的活动包括连贯的三项:发现与提出问题,分析与解决问题,提炼整理形成知识,本节我们就从如下三个方面理解数学知识的形成过程:问题是怎样产生的;解决问题的方法是怎样找到的;问题解决后如何进行提炼与整理形成知识。

一、问题的产生途径

"问题"在数学史上的地位是毋庸置疑的。最广为流传的说法当属数学家哈尔莫斯所言

---

① 汪晓勤,王苗,邹佳晨.HPM视角下的数学教学设计:以椭圆为例[J].数学教育学报,2011(10):20-23.

② H.弗莱登塔尔.作为教育任务的数学[M].陈昌平,唐瑞芬译.上海教育出版社,1995.

③ 同②.

“问题是数学的心脏”“数学家存在的主要理由就是解决问题”“数学的真正组成部分就是问题和解”①,实际上,今日的数学知识或者是数学家解决问题得到的结论,如勾股定理,或者是创造的解决问题的工具,如平面直角坐标系,也有的知识同时具有这两种意义。

没有问题,知识不可能产生,甚至有些我们经常使用的一些东西,如果没有问题的激活,也会如路边的小草,虽旺盛生长,但由于未能被人们发现而没机会成为知识大厦中的构件。例如,自然数范围内加法与乘法的结合律、交换律、分配律等性质,直到19世纪20年代和30年代才被概括出来,显然,并非这些性质的正确性自身的认识困难,实际上,此前人们在具体的自然数运算中一直在毫不怀疑地使用着这些性质,但是由于问题的缺乏使得这些性质并没有进入数学家发现的视野。从数学史上看,提出这些性质并非算术的需要,而是代数发展的过程中,数学家在构造以运算为核心的代数系统时,反过来从已有的数学运算中汲取营养的产物。

数学中的问题来源通常有两种:一种是数学的外部,一种是数学的内部。

1. 数学外部的问题

数学外部的问题指的是生产生活实践或者其他学科领域直接提出的问题,实际上,从根本上或者知识的最初起源上看,数学问题均来自实际生产与生活实践。

例如,勾股定理的发现来自生产实践中的长度测量问题,显然,这种测量问题在世界各地都是广泛存在的,所以在古代的各个文明国家都有发现这个定理(尽管未严格证明)的记录。我国最早的记录是周朝《周髀算经》,古希腊用其发现者和证明者毕达哥拉斯为这个定理命名,而古印度尽管并没有一个专门的名词代表这个定理,但是却能够在他们的数学中找到这个定理的内容,一种“绳子的规则”中有这样一条:矩形对角线产生的面积等于矩形两边各自产生的面积之和”。一个重要的知识源于其能解决的问题普遍存在,因此任何一个国家和民族在生产生活中都会遇到与之有关的问题,不能回避对其中规律的探寻,众多人的探寻必然会带来重要发现。

再比如,积分思想在古代的中国和希腊解决不规则图形面积、体积问题时都有萌芽,应用这种思想,也得到了诸如圆、球等图形的面积和体积公式,但是定积分的明确理论知识却是由17世纪以后的欧洲数学家完成,其原因一方面与人类的知识积累带来的认知发展水平提高有关,另一个重要原因则在于欧洲的宗教改革、启蒙运动带来的人的思想解放运动、进而引发的工业革命带来的大量生产实践和科学研究领域的问题——一个值得注意的现象就是许多数学家同时是其他科学研究领域的科学家,例如:阿基米德、牛顿是物理学家;被称为数学王子的高斯学术的一个高峰期也出现在他负责丹麦政府和汉诺威政府的全境地理测量计划期间,如关于曲面的研究成果和保形变换理论的雏形都产生于这一时期②。我国古代数学家则大多数是负责星象的官员或者主管水利、农田的官员,例如祖冲之是天文学家,刘徽、秦九韶先后担任县尉、通判、寺丞等职。

需要注意的是,同一个来自外部的问题,可以变成不同的数学问题。例如,古希腊时期三大数学名题之一的倍立方体问题源于一位无名诗人,这位诗人讲述了这样一个故事:神话中的米诺王对儿子格劳卡斯给他建造的立方体坟墓不满意,米诺王命令把那个坟墓扩大一

① 哈尔莫斯.数学的心脏[J].张静译.数学通报,1982(4):27.

② 吴文俊.世界著名数学家传记[M].北京:科学出版社,1995:757-758.

倍。然后这位诗人为米诺王给出了方法：只要将坟墓的每边扩大一倍即可。显然，这个方法是错误的，而著名的“倍立方体问题”由此产生，这个问题是：如何仅用直尺和圆规做出一个正方体，使其体积等于已知正方体的二倍。特别要注意的是：在古希腊数学家眼中，这个问题并非通过近似的方法得到二倍于原有立方体体积的立方体的边长，“尺规作图法”的本质是借助已有的几何知识和演绎推理的方法进行构造，他们也并不关心利用这一方法得到的长度的精确值在现实中由于作图工具的精密性限制根本不可能实际做出。说到底，数学问题是理论问题，因此，数学对于近似解的探讨也并非给出“差不多”的方法，而是重视对提高精确度的理论方法的探讨，例如，二分法、牛顿插值法等。

2. 来自数学内部的问题

一个数学问题、特别是重大数学问题的解决，经常需要很长的问题转化，也有的问题经过分析会发现自身就是由若干个其他问题构成的，所以，解决一个重要问题的过程同时就是一个不断提出新问题的过程；而每个被解决的数学问题，人们也会经常问：是否还有更好的方法？得出的结论是否有更广泛的使用范围？如果问题中的某个条件改变，结论又会是什么？等等。数学就是在这样的无穷无尽的问题提出中得以蓬勃发展的。

例如，上文提到的倍立方体问题研究的历史性突破来自古希腊数学家希波克拉底，他首先通过分析和构造得到，假设有两条线段长度分别为 a 和 $2a$，则得到两个体积为 a^3 和 $8a^3$ 的正方体，体积为 $2a^3$ 的正方体棱长 x 一定在 a 和 $2a$ 之间，他通过假设两个值 x 和 y，使得 $a:x=x:y=y:2a$，则可以得到 $x^2=ay$，$y^2=2ax$，因此必有 $x^3=2a^3$，也就是以 x 为边的立方体的体积就等于以 a 为边的立方体的体积的二倍，如果用今天的知识看，这里的 x 就是抛物线 $x^2=ay$，$y^2=2ax$ 的交点的 x 坐标值，当然那个时代还没有抛物线、函数图像这些名称，也没有这种简明直观的符号来表达，但这丝毫不妨碍希波克拉底也这样想，于是倍立方体问题就转化为如何用尺规作图法画抛物线的问题。希波克拉底利用几何知识给出了画法，以 $y^2=2ax$ 为例，他的方法是：先做直径为 $2a+x$ 的一个圆，再在圆的直径上到顶点为 x 的点作一长为 y 的垂线；让 x 取不同的值，并连接所有对应垂线的终点，即可作出所求的曲线，如图 1-4 所示。

这种方法，虽然可以作出曲线上的每一个点，但并不能作出完整的曲线，据说，门奈赫莫斯通过观察图 1-4 中由一族圆所产生的曲线后，把这些曲线想象成一片一片有厚度的东西再叠起来，而叠加起来的这个东西就是圆锥，抛物线则可以看成是用一个平面截圆锥得到的截线图，如图 1-5，于是新的问题就产生了：一个圆锥用平面所截，得到的截线真的是抛物线吗？

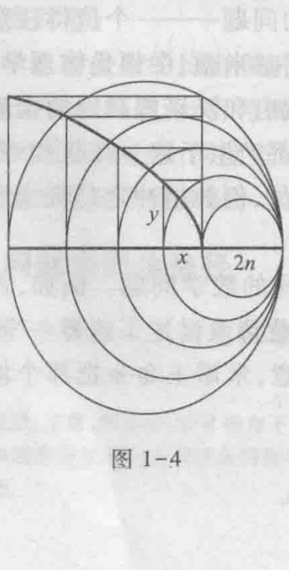

图 1-4

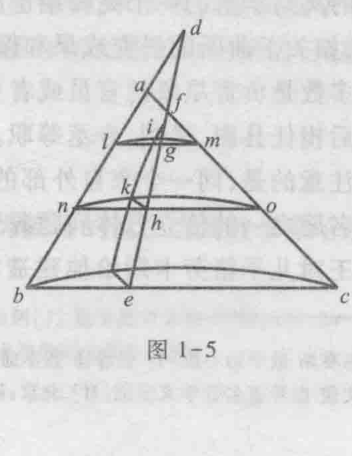

图 1-5