

第一章 函数

【CAP 微积分大纲解读】

本章的重点:函数的定义,复合函数,函数奇偶性,初等函数.

本章的考点:求函数的定义域,已知 $f[g(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$ 的表达式、判定函数的奇偶性、有界性.

解题指导:

1. 区分两个函数是否相同,关键是研究确定函数关系的两个要素——定义域和对应法则,而与变量用什么字母表示无关.

2. 由于分段函数在各段上的对应法则不同,所以求分段函数在某点的函数值时,关键是要弄清楚该自变量所在区间对应的函数表达式是哪一个,然后再代入求值.

3. 复合函数的求解方法主要有两种:

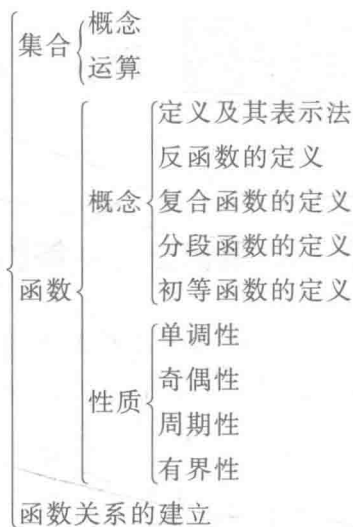
(1) 代入法:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替,适用于初等函数的复合.

(2) 分析法:抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.

4. 反函数求解方法比较固定,具有很强的规律性,关键是把握好定义域和符号的变化.对于分段函数,要特别注意所求函数表达式的对应区间.

5. 根据实际应用问题列出函数关系的表达式后,再确定函数的定义域,而其定义域除函数的解析式外还要考虑变量在实际问题中的含义.

【知识结构】



【经典例题解析】

一、有关集合的运算

1. 设有集合 $E = \{x | -1 < x \leq 10\}$, $F = \{-1, 0, 1, 10\}$, 则 $E \cap F =$ _____.

- A. \emptyset B. $\{-1, 1, 0\}$ C. $\{0, 1, 10\}$ D. $\{-1, 0, 1, 10\}$

解 $E \cap F$ 即 E 与 F 的公共元素所成的集合, 显然 $E \cap F = \{0, 1, 10\}$.

故应选 C.

2. 下列集合中为空集的是 _____.

- A. $\{x | e^x = 1\}$ B. $\{0\}$
 C. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 0\}$ D. $\{x | x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

解 因为 $e^0 = 1$, 即 A 集合含有元素 $x = 0$, 故 A 不是空集;

B 中, $\{0\}$ 含一个元素, 故 B 非空;

当 $x = 0, y = 0$ 时, $x^2 + y^2 = 0$, 即 C 含元素 $(x, y) = (0, 0)$, 故 C 不是空集;

对于 D, 因 $x \in \mathbf{R}, x^2 \geq 0, x^2 + 1 \geq 1$, 即 $x^2 + 1 = 0$ 不成立, 因此 D 为空集.

故应选 D.

3. 已知集合 $A = \{x | |x - a| \leq 1\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

- A. $(2, 3)$ B. $(-2, 3)$ C. $[2, 3]$ D. $[-2, 3]$

$$\text{解 } A = \{x \mid -1 \leq x - a \leq 1\} = \{x \mid a - 1 \leq x \leq a + 1\},$$

$$B = \{x \mid (x - 1)(x + 4) \geq 0\} = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 4\}.$$

因为 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $\begin{cases} a - 1 > 1 \\ a + 1 < 4 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a > 2 \\ a < 3 \end{cases}$, 故 $a \in (2, 3)$.

故应选 A.

4. 平面直角坐标系中向量的集合

$$A = \{a \mid a = (2, -1) + t(1, -1), t \in \mathbf{R}\},$$

$$B = \{b \mid b = (-1, 2) + t(1, 2), t \in \mathbf{R}\},$$

则 $A \cap B =$ _____.

- A. $\{(2, -1)\}$ B. $\{-1, 2\}$ C. $\{(2, -1), (-1, 2)\}$ D. \emptyset

解 令平面向量 $a = \overrightarrow{OA}$, a 的坐标即点 A 的坐标, 向量的集合与端点 A 的集合一一对应. 题中的集合 A 对应于直线

$$l_1: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 - t, \end{cases} t \in \mathbf{R},$$

即直线 $l_1: x + y - 1 = 0$.

集合 B 对应于直线

$$l_2: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + 2t, \end{cases} t \in \mathbf{R},$$

即 $l_2: 2x - y + 4 = 0$. 直线 l_1 和 l_2 是相交的直线, 有一个交点 $(-1, 2)$. 所以 $A \cap B$ 只有一个元素——向量 $(-1, 2)$.

故应选 B.

5. 设集合 $M = \{y \mid y = (\frac{1}{2})^x, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{y \mid y = x^{\frac{1}{2}}\}$, 则 $M \cap N =$ _____.

- A. \emptyset B. $\{0\}$ C. $(0, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

解 解答本题要注意集合中代表元素的属性. 易知集合 M, N 表示函数的值域, 分别化简得: $M = \{y \mid y > 0\}$, $N = \{y \mid y \geq 0\}$, 所以交集 $M \cap N = (0, +\infty)$.

故应选 C.

二、函数定义域的讨论

6. 函数 $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\lg(x+2)}$ 的定义域是 _____.

- A. $[-2, 3]$ B. $[-3, 3]$
C. $(-2, -1) \cup (-1, 3]$ D. $(-3, 3)$

解 这是一个初等函数求定义域的问题, 因此应求各个函数定义域的交集.

由负数不能开偶次方得 $9-x^2 \geq 0$, 所以 $-3 \leq x \leq 3$;

由真数大于零得 $x+2 > 0$, 所以 $x > -2$;

由分母不为零得 $\lg(x+2) \neq 0$, 所以 $x \neq -1$;

从而函数的定义域为它们的交集 $(-2, -1) \cup (-1, 3]$.

故应选 C.

7. 若函数 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$ 表示同一函数, 则它们的定义域是_____.

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[0, +\infty)$ C. $(-\infty, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

解 两个表达式表示同一函数, 必须其定义域与对应规律相同, 所以 $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = x$ 的定义域应为 $[0, +\infty)$.

故应选 B.

8. 设 $y = f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有意义, 则 $f(x + \frac{1}{4}) + f(x - \frac{1}{4})$ 的定义域是_____.

- A. $[0, 1]$ B. $[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$ C. $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ D. $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$

解 由条件 $0 \leq x + \frac{1}{4} \leq 1$ 且 $0 \leq x - \frac{1}{4} \leq 1$, 得公共部分为其定义域 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.

故应选 D.

9. 函数 $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$ 的定义域为_____.

- A. $x \in \mathbf{R}$, 但 $x \neq 0$ B. $x \in \mathbf{R}$, 但 $1 + \frac{1}{x} \neq 0$
C. $x \in \mathbf{R}$, 但 $x \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$ D. $x \in \mathbf{R}$, 但 $x \neq 0, -1$

解 由 $x \neq 0, 1 + \frac{1}{x} \neq 0, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \neq 0$, 得 $x \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$.

故应选 C.

10. 已知 $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x)$ 的定义域为_____.

解 由 $\sin \varphi(x) = 1 - x^2$, 所以 $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$

从而 $-1 \leq 1 - x^2 \leq 1$, 所以 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

故应填 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

11. 已知函数 $f(\log_a x) = \sqrt{x}$, 则 $f(x) =$ _____, 其定义域为_____, 其中 $a \neq 1$, 且 $a > 0$.

解 令 $\log_a x = t$, 则 $x = a^t$. 函数 $f(\log_a x) = \sqrt{x}$ 可化为 $f(t) = a^{\frac{t}{2}}$, 从而 $f(x) = a^{\frac{x}{2}}$.

定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

故应填 $a^{\frac{2}{3}}, (-\infty, +\infty)$.

12. 设 $f(x) = \tan x, f[g(x)] = x^2 - 2$, 且 $|g(x)| \leq \frac{\pi}{4}$, 则 $g(x)$ 的定义域为 _____.

解 $f[g(x)] = \tan g(x) = x^2 - 2$, 所以 $g(x) = \arctan(x^2 - 2)$.

因为 $|g(x)| \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $-1 \leq x^2 - 2 \leq 1$, 因此 $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$ 或 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$.

故应填 $[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$.

三、有关函数的定义及表达式

13. 下列函数为同一函数的是 _____.

- A. $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $\varphi(x) = (\sqrt{x})^2$
 B. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $\varphi(x) = x + 1$
 C. $f(x) = x$ 与 $\varphi(x) = x(\sin^2 x + \cos^2 x)$
 D. $f(x) = \lg(x^2)$ 与 $\varphi(x) = 2\lg x$

解 对于选项 A, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$. 由于定义域不同, 所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不是同一函数, 故应排除 A.

对于选项 B, D, 均因定义域不同而予以排除.

对于选项 C, 由于 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, x \in (-\infty, +\infty)$, 所以 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 为同一函数.

故应选 C.

14. 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$, 求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}$.

所以 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, x \neq \pm\sqrt{2}$.

15. 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 3f(x) - 2x$, 求 $f(x)$.

解 令 $\frac{x+1}{x-1} = t$, 则 $x = \frac{t+1}{t-1}$,

于是 $f(t) = 3f\left(\frac{t+1}{t-1}\right) - \frac{2t+2}{t-1} = 3[3f(t) - 2t] - \frac{2t+2}{t-1}$,

整理得 $8f(t) = 6t + 2\frac{t+1}{t-1}$,

所以 $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\frac{x+1}{x-1}, x \neq 1$.

16. 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_1(x) = f[f(x)]$, $f_2(x) = f[f_1(x)]$, \dots ,

$f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$ ($n=1, 2, \dots$). 则 $f_n(x) =$ _____.

解 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$f_1(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_2(x) = f[f_1(x)] = \frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

一般地, 可用数学归纳法证明

$$f_n(x) = f[f_{n-1}(x)] = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}} \quad (n=2, 3, 4, \dots).$$

故应填 $\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$.

17. 设 $f(x)$ 满足 $f^2(\ln x) - 2xf(\ln x) + x^2 \ln x = 0$, 且 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$.

解 令 $t = \ln x$, 即 $x = e^t$, 则有 $f^2(t) - 2e^t f(t) + te^{2t} = 0$,

由此可解得 $f(t) = e^t \pm \sqrt{e^{2t} - te^{2t}} = e^t(1 \pm \sqrt{1-t})$.

因为 $f(0) = 0$, 由上式可得 $f(t) = e^t(1 - \sqrt{1-t})$, $t \leq 1$.

即所求的函数为 $f(x) = e^x(1 - \sqrt{1-x})$, $x \leq 1$.

18. 用分段函数表示函数 $y = 3 - |x-1|$.

解 根据绝对值的定义可知:

当 $x-1 < 0$ 即 $x < 1$ 时, $|x-1| = -(x-1)$,

当 $x-1 \geq 0$ 即 $x \geq 1$ 时, $|x-1| = x-1$,

因此有 $y = \begin{cases} 3+(x-1), & x < 1 \\ 3-(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$, 即 $y = \begin{cases} 2+x, & x < 1 \\ 4-x, & x \geq 1 \end{cases}$.

19. $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(-\frac{\pi}{4}) =$ _____.

A. 0 B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

解 因 $|\frac{\pi}{4}| = \frac{\pi}{4} < 1$, 所以 $f(-\frac{\pi}{4}) = |\sin(-\frac{\pi}{4})| = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故应选 C.

20. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(-x) =$ _____.

A. $f(-x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x \leq 0 \\ -\cos x, & x > 0 \end{cases}$ B. $f(-x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

$$C. f(-x) = \begin{cases} -\cos x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$D. f(-x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

解 当 $-x \leq 0$ 时, $f(-x) = e^{-(-x)} = e^x$; 当 $-x > 0$ 时, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x$.

$$\text{所以 } f(-x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$$

故应选 D.

21. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于 _____.

A. 0

B. 1

$$C. \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$$

解 由 $f[f(x)] = 1$ 得 $f\{f[f(x)]\} = 1$.

故应选 B.

四、关于函数的性质

22. 在 R 上, 下列函数为有界函数的是 _____.

A. e^x

B. $1 + \sin x$

C. $\ln x$

D. $\tan x$

解 因为选项 B 中, $|\sin x| \leq 1$, 所以 $|1 + \sin x| \leq 1 + |\sin x| \leq 2$,

故应选 B.

23. 设 $f(x)$ 为奇函数, 且 $F(x) = f(x) \cdot \left(\frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}\right)$, 其中 a 为不等于 1 的正常数,

则函数 $F(x)$ 是 _____.

A. 偶函数

B. 奇函数

C. 非奇非偶函数

D. 奇偶性与 a 有关的函数

解 令 $g(x) = \frac{1}{a^x+1} - \frac{1}{2}$, 则

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x}+1} - \frac{1}{2} = \frac{a^x-1}{2(a^x+1)} = -\frac{1}{a^x+1} + \frac{1}{2} = -g(x),$$

所以 $g(x)$ 为奇函数.

因为 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数.

故应选 A.

24. 设 $f(x)$ 为奇函数, 判断下列函数的奇偶性:

(1) $xf(x)$

(2) $(x^2+1)f(x)$

(3) $|f(x)|$

(4) $-f(-x)$

(5) $f(x)\left(\frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}\right)$

解 (1) 设 $F(x) = xf(x)$, 则 $F(-x) = (-x)f(-x) = xf(x) = F(x)$,

故 $xf(x)$ 为偶函数.

同理可得:

- (2) $(x^2+1)f(x)$ 为奇函数;
 (3) $|f(x)|$ 为偶函数;
 (4) $-f(-x)$ 为奇函数;
 (5) $f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$ 为偶函数.

25. 设 $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数, 且它们可以构成复合函数

$$f[f(x)], g[f(x)], f[g(x)], g[g(x)],$$

则其中为奇函数的是_____.

- A. $f[f(x)]$ B. $g[f(x)]$ C. $f[g(x)]$ D. $g[g(x)]$

解 由已知条件知 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$. 设 $F(x)=f[f(x)]$, 则

$$F(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)].$$

所以 $f[f(x)]$ 为奇函数.

故应选 A.

26. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为周期函数, $f(x)$ 的周期为 3, $g(x)$ 的周期为 4, 则 $f(x)+g(x)$ 的周期为_____.

解 根据两个周期函数的和函数的周期为两个函数周期的最小公倍数, 所以 $f(x)+g(x)$ 的周期为 12.

故应填 12.

五、关于函数的运算

27. 函数 $f(x)=2^{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 等于_____.

- A. $\log_2(x+1)$ B. $1+\log_2 x$ C. $\frac{1}{2}\log_2 x$ D. $2\log_2 x$

解 由 $y=2^{x-1}$ 解出 $x=\log_2(2y)=1+\log_2 y$, x 与 y 互换得 $y=1+\log_2 x$.

故应选 B.

28. 函数 $y=\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$ 的反函数为_____.

解 令 $t=\sqrt{1-x}$, 则 $y=\frac{1+t}{1-t}$, 所以 $t=\frac{y-1}{y+1}$, 即 $\sqrt{1-x}=\frac{y-1}{y+1}$,

从而 $x=1-\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2=\frac{4y}{(y+1)^2}$, 因此, 反函数为 $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$.

故应填 $y=\frac{4x}{(x+1)^2}, (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

29. 函数 $y=4^{\arccos\sqrt{1-x^2}}$ 和 $y=\log_2 \sin \frac{1}{x}$ 是由哪些较简单的函数复合而成的.

解 对于 $y = 4^{\arccos \sqrt{1-x^2}}$, 可以看成由函数 $y = 4^u$, $u = \arccos v$, $v = \sqrt{w}$, $w = 1 - x^2$ 复合而成的.

对于 $y = \log_2 \sin \frac{1}{x}$, 可以看成由函数 $y = \log_2 u$, $u = \sin v$, $v = \frac{1}{x}$ 复合而成的.

30. 设 $f(x) = 3x + 5$, 则 $f[f(x) - 2] = \underline{\hspace{2cm}}$.

解法一 由函数结构式 $f(\text{变量}) = 3(\text{变量}) + 5$, 可得

$$f[f(x) - 2] = 3[f(x) - 2] + 5 = 3(3x + 5 - 2) + 5 = 9x + 14.$$

解法二 先计算 $f(x) - 2 = 3x + 5 - 2 = 3x + 3$, 再代入结构式

$$f[f(x) - 2] = f(3x + 3) = 3(3x + 3) + 5 = 9x + 14.$$

故应填 $9x + 14$.

31. 设函数 $g(x) = 1 + x$, 且当 $x \neq 0$ 时, $f[g(x)] = \frac{1-x}{x}$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

A. -1 B. -2 C. -4 D. -3

解 由 $g(x) = 1 + x$, 故 $f[g(x)] = f(1+x) = \frac{1-x}{x}$.

令 $x = -\frac{1}{2}$, 所以 $f\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}$, 从而 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$.

故应选 D.

32. 设 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0 \\ x+4, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 4$, 求 $f[g(x)]$.

解 当 $x^2 - 4 \leq 0$, 即 $-2 \leq x \leq 2$ 时,

$$f[g(x)] = f(x^2 - 4) = (x^2 - 4 + 1)^2 = (x^2 - 3)^2;$$

当 $x^2 - 4 > 0$, 即 $x > 2$ 或 $x < -2$ 时,

$$f[g(x)] = f(x^2 - 4) = x^2 - 4 + 4 = x^2.$$

$$\text{故 } f[g(x)] = \begin{cases} (x^2 - 3)^2, & -2 \leq x \leq 2 \\ x^2, & x > 2 \text{ 或 } x < -2 \end{cases}.$$

33. 求函数 $y = \sin \frac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域.

解 因为 $1+x^2 \geq 2|x|$, 所以 $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$, 因此 $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi x}{2(1+x^2)} \leq \frac{\pi}{4}$,

从而 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \frac{\pi x}{2(1+x^2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

34. 求 $y = f(x) = \begin{cases} 3-x^3, & x < -2 \\ 5-x, & -2 \leq x \leq 2 \\ 1-(x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$ 的值域, 并求它的反函数.

解 当 $x < -2$ 时, $y = 3 - x^3$, $x = \sqrt[3]{3-y}$, 且 $y > 3 + 8 = 11$;

当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, $y = 5 - x$, $x = 5 - y$, 且 $3 \leq y \leq 7$;

当 $x > 2$ 时, $y = 1 - (x-2)^2$, $x = 2 + \sqrt{1-y}$, 且 $y < 1$;

所以 $y = f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 1) \cup [3, 7] \cup (11, +\infty)$.

$$y = f(x) \text{ 的反函数为 } y = \begin{cases} 2 + \sqrt{1-x}, & x < 1 \\ 5-x, & 3 \leq x \leq 7 \\ \sqrt[3]{3-x}, & x > 11 \end{cases}$$

六、有关证明题

35. 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ($x \neq 1$), 证明: $f\left[\frac{f(x)}{1+f(x)}\right] = f(x)$.

证 由已知有 $\frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{\frac{x}{1-x}}{1+\frac{x}{1-x}} = \frac{x}{1-x+x} = x$,

故 $f\left[\frac{f(x)}{1+f(x)}\right] = f(x)$.

36. 设 p 为正整数. 证明: 若 p 不是完全平方数, 则 \sqrt{p} 是无理数.

证 用反证法. 假若 \sqrt{p} 为有理数, 设 $\sqrt{p} = \frac{u}{v}$, u, v 为正整数, 互质, 且 $v \neq 0$, 于是有 $p = \frac{u^2}{v^2}$.

一方面, p 为非平方数, 故 $v^2 \neq 1$. 另一方面, 因 u 与 v 互质, 故 u^2 与 v^2 也互质; 但由 $u^2 = pv^2$, v^2 为 u^2 的一个整数因子, 故必有 $v^2 = 1$, 矛盾. 由此可见 \sqrt{p} 为无理数.

37. 证明: 任何正有理数 r 都是狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

的周期.

证 对任意的有理数 $r > 0$, 当 x 为有理数时, $x+r$ 也是有理数; 当 x 为无理数时, $x+r$ 也是无理数. 故

$$D(x+r) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases},$$

即 $D(x+r) = D(x)$, 因此, 任何正有理数 r 都是 $D(x)$ 的周期.

38. 设对任何 $x \in (-\infty, +\infty)$, 存在常数 $c \neq 0$, 使 $f(x+c) = -f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x+c) = -f(x)$, 所以

$$f(x+2c) = f[(x+c)+c] = -f(x+c) = f(x),$$

故 $f(x)$ 为周期函数.

39. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对任意 $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ($x \neq y$) 有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, 证明 $F(x) = f(x) + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

证 任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $x_2 > x_1$,

有 $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$,

而 $f(x_1) - f(x_2) \leq |f(x_2) - f(x_1)| < x_2 - x_1$,

因而 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$,

所以 $F(x_1) < F(x_2)$,

即 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

40. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增加函数, 且 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, 证明 $f[f(x)] \leq g[g(x)] \leq h[h(x)]$.

证 因为 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单增, 所以对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $x_2 > x_1$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2), g(x_1) \leq g(x_2), h(x_1) \leq h(x_2)$.

又对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, 所以

$$f[f(x)] \leq f[g(x)] \leq g[g(x)],$$

$$g[g(x)] \leq g[h(x)] \leq h[h(x)],$$

即 $f[f(x)] \leq g[g(x)] \leq h[h(x)]$.

41. 求 c 的一个值, 使 $(b+c)\sin(b+c) - (a+c)\sin(a+c) = 0$, 这里 $b > a$, 均为常数.

解 令 $f(x) = x \sin x$, 则 $f(x)$ 为偶函数.

由已知 $f(b+c) = f(a+c)$, 则有 $a+c = -(b+c)$.

所以 $c = -\frac{1}{2}(a+b)$.

42. 设 $b > a$ 均为常数, 求方程

$$\sin(x+b) \ln[(x+b) + \sqrt{(x+b)^2 + 1}] = \sin(x+a) \ln[(x+a) + \sqrt{(x+a)^2 + 1}]$$

的一个解.

解 因为 $\sin t$ 和 $\ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$ 均为奇函数, 所以 $f(t) = \sin t \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$ 是偶函数. 如果 $x+b = -(x+a)$, 则 $f(x+b) = f(x+a)$ 方程成立. 因此 $x = -\frac{1}{2}(a+b)$ 是方程的一个解.

七、有关应用题

43. 某种产品的日产量为 1500t, 每吨定价为 150 元, 销售量不超过 1000t 的部分按原价出售, 超过 1000t 的部分按 9 折出售, 若将销售总收入看作销售量的函数, 试写出函数表达式.

解 设销售量为 $x(t)$, 销售总收入为 $C(x)$, 则

(1) 当 $0 \leq x \leq 1000$ 时, $C(x) = 150x$;

(2) 当 $1000 < x \leq 1500$ 时, $C(x) = 150 \times 1000 + 150 \times 0.9 \times (x - 1000)$,

$$\text{于是 } C(x) = \begin{cases} 150x, & 0 \leq x \leq 1000 \\ 135x + 15000, & 1000 < x \leq 1500 \end{cases}.$$

44. 设生产与销售某产品的总收益 R 是产量 x 的二次函数, 经统计得知: 当产量 $x=0, 2, 4$ 时, 总收益 $R=0, 6, 8$, 试确定总收益 R 与产量 x 的函数关系.

解 因为 R 是 x 的二次函数, 故可设 $R = ax^2 + bx + c$.

$$\text{由题意 } \begin{cases} 0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \\ 6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 8 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases},$$

所以, 总收益 R 与产量 x 的函数关系为 $R = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$.

【教材习题解答】

同步习题 1.1

1. 用集合的描述法表示下列集合:

- (1) 大于 5 的所有实数集合;
- (2) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合.

解 (1) $A = \{x | x > 5, x \in \mathbf{R}\}$;

(2) $A = \{(x, y) | y = x^2 \text{ 且 } x - y = 0, x, y \in \mathbf{R}\}$.

2. 用列举法表示下列集合:

- (1) 方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的根的集合;
- (2) 抛物线 $y = x^2$ 与直线 $x - y = 0$ 交点的集合;
- (3) 集合 $\{x | |x - 1| \leq 5\}$ 的整数.

解 (1) 由 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 得 $(x - 4)(x - 3) = 0$, 解得 $x = 4, x = 3$,

故所求集合 $A = \{3, 4\}$;

(2) 由 $\begin{cases} y = x^2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$,

故所求集合 $B = \{(0, 0), (1, 1)\}$;

(3) 由于 $|x - 1| \leq 5$, 即 $-5 \leq x - 1 \leq 5$, 解得 $-4 \leq x \leq 6$,

故所求集合为 $C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3. 设 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{2, 4, 6\}$, 求:

(1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \cup B \cup C$; (4) $A \cap B \cap C$; (5) $A - B$.

解 (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$;

(2) $A \cap B = \{1, 3\}$;

(3) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(4) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = \{1, 3\} \cap \{2, 4, 5\} = \emptyset$;

(5) $A - B = \{2\}$.

4. 如果 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$,求: (1) \bar{A} ; (2) \bar{B} ; (3) $\bar{A} \cup \bar{B}$; (4) $\bar{A} \cap \bar{B}$.

解 (1) $\bar{A} = \{4, 5, 6\}$;

(2) $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$;

(3) $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$;

(4) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{5\}$.

5. 不等式 $|6 - x^{-1}| \leq 1$ 的解集是_____.

A. $[5, 7]$

B. $(\frac{1}{7}, \frac{1}{5})$

C. $[\frac{1}{7}, \frac{1}{5}]$

D. $(-3, 5)$

解 由 $|6 - \frac{1}{x}| \leq 1$, 得 $-1 \leq 6 - \frac{1}{x} \leq 1$, 从而有 $-7 \leq -\frac{1}{x} \leq -5$, 也即 $5 \leq \frac{1}{x} \leq 7$,故 $\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{1}{5}$.

故应选 C.

6. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x| \leq 3$; (2) $|x - 2| \leq 2$; (3) $|x - a| < \epsilon$ (a 为常数, $\epsilon > 0$);

(4) $|x| \geq 5$; (5) $|x + 1| > 2$.

解 (1) $[-3, 3]$;

(2) 由 $-2 \leq x - 2 \leq 2$ 得 $0 \leq x \leq 4$, 所以区间为 $[0, 4]$;

(3) 由 $-\epsilon < x - a < \epsilon$, $a - \epsilon < x < a + \epsilon$, 故区间为 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$;

(4) $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$;

(5) 由 $x + 1 > 2$ 或 $x + 1 < -2$, 得 $x > 1$ 或 $x < -3$, 故有 $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

同步习题 1.2

1. $y = \lg(-x^2)$ 是不是函数关系? 为什么?解 不是函数关系. 因为 $-x^2 \leq 0$, 函数的定义域为空集, 即函数无意义.

2. 下列各对函数中为同一函数的是_____.

A. $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = |x|$

B. $f(x) = \sqrt{x^2}$ 与 $g(x) = (\sqrt{x})^2$

C. $f(x) = \lg \sqrt{x}$ 与 $g(x) = \frac{1}{2} \lg x$

D. $f(x) = \frac{x(x-1)}{x}$ 与 $g(x) = x - 1$

解 当两个函数的定义域和对应规则完全一样时, 才表示同一个函数. 对于 A, $f(x) = \sqrt{x^2}$ 的定义域为一切实数. $g(x) = |x|$ 的定义域也为一切实数.

故应选 A.

3. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}; \quad (2) y = \sqrt{9 - x^2};$$

$$(3) y = \lg(6 - 5x - x^2); \quad (4) y = \arcsin(2x - 3).$$

解 (1) 分母不为零: $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, 所以 $x \neq 1$ 与 $x \neq 2$, 定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$;

(2) 负数不能开偶次方: $9 - x^2 \geq 0$, 所以 $-3 \leq x \leq 3$, 定义域为 $[-3, 3]$;

(3) 对数中的真数必须大于零: $6 - 5x - x^2 > 0$, 所以 $-6 < x < 1$, 定义域为: $(-6, 1)$;

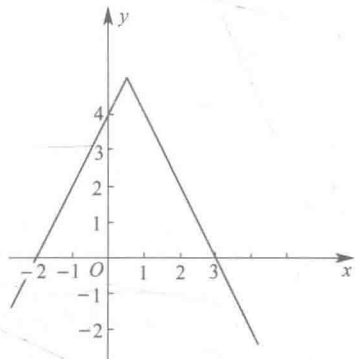
(4) 反正弦函数中的变量必须不大于 1: $|2x - 3| \leq 1$, 所以 $1 \leq x \leq 2$, 定义域为: $[1, 2]$.

4. 将函数 $y = 5 - |2x - 1|$ 用分段形式表示,

并做出函数图象.

$$\text{解 } y = \begin{cases} 5 - 2x + 1, & 2x - 1 \geq 0 \\ 5 + 2x - 1, & 2x - 1 < 0 \end{cases},$$

$$\text{即 } y = \begin{cases} 6 - 2x, & x \geq \frac{1}{2} \\ 4 + 2x, & x < \frac{1}{2} \end{cases},$$



如图 1-1 所示.

5. 下列区间中, $f(x) = \lg(x+1)$ 为有界的是

图 1-1

- _____.
- A. $(-1, 2)$ B. $(-1, 10^{100})$
C. $(0, 3)$ D. $(0, +\infty)$

解 对于函数 $f(x) = \lg(x+1)$, $x = -1$ 时函数无意义, 故排除选项 A、B; 由 $f(x)$ 的图形知 x 越来越大时, $f(x)$ 越来越大, 从而无界, 排除选项 D.

故应选 C.

6. 在区间 $(-1, 0)$ 内下列函数中单调递增的是_____.

- A. $y = 5x - 3$ B. $y = |x| + 2$
C. $y = -4x - 1$ D. $y = x^2 + 1$

解 由图形可知只有选项 A 在 $(-1, 0)$ 内单调增加.

故应选 A.

7. 下列函数中为奇函数的是_____.

- A. $y = x^4 - x^2$ B. $y = x - x^2$
C. $y = 2^x - 2^{-x}$ D. $y = 2^x + 2^{-x}$

解 对于 A, 是两个偶函数之差仍为偶函数; 对于 B, 是奇函数与偶函数的差, 从而是非奇非偶的; 对于 C, $f(-x) = 2^{-x} - 2^x = -(2^x - 2^{-x}) = -f(x)$, 所以 C 正确. (对于 D 已

无需验证).

故应选 C.

8. 下列函数中为偶函数的是_____.

A. $y = x^2 \sin x$ B. $y = \lg \frac{1-x^2}{1+x^2}$ C. $y = x + \cos x$ D. $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$

解 对于 A, 是偶函数乘奇函数, 应排除; 对于 B, 显然有 $f(-x) = f(x)$, 选项 B 正确.

故应选 B.

9. 下列函数中非奇非偶的函数是_____.

A. $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ B. $f(x) = x(1-x)$

C. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ D. $f(x) = x^2 \cos x$

解 对于 A、C, 显然 $f(-x) = -f(x)$, 应为奇函数; D 为偶函数.

故应选 B.

10. 判断函数 $f(x) = x^2 \ln \frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(x) = x^2 [\ln(1-x) - \ln(1+x)]$, 所以

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = -x^2 [\ln(1-x) - \ln(1+x)] \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 为奇函数.

11. 判断下列函数的单调性:

(1) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; (2) $y = x + \lg x$.

解 (1) 对任意 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$, 由于

$$f(x_1) - f(x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} = \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2^{x_1+x_2}} > 0,$$

即 $f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调减函数;

(2) 对任意 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \lg x_1 - x_2 - \lg x_2 = (x_1 - x_2) + \lg \frac{x_1}{x_2} < 0,$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $y = x + \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调增函数.

12. 在实数域 \mathbf{R} 上, 下列函数中为周期函数的是_____.

A. $\sin e^x$ B. $\arcsin x + \arccos x$

C. $x \cos x + \tan x$ D. $e^{\sin x}$

解 对于选项 D, 由 $e^{\sin(x+2\pi)} = e^{\sin x}$ 知 $e^{\sin x}$ 为周期函数.

故应选 D.

同步习题 1.3

1. 已知 $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 求 $f(1), f(x+1), f(\sin x), f[f(x)]$.

解 $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$,

$f(x+1) = (x+1)^2 - 3 \cdot (x+1) + 1 = x^2 - x - 1$,

$f(\sin x) = (\sin x)^2 - 3 \cdot \sin x + 1$,

$f[f(x)] = [f(x)]^2 - 3 \cdot f(x) + 1 = (x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1$
 $= x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 3x - 1$.

2. 设函数 $f(x+1) = x^2 - x - 1$, 求 $f(x)$.

解 令 $u = x+1$, 则 $x = u-1$, 代入 $f(x+1)$ 化简得

$$f(u) = (u-1)^2 - (u-1) - 1 = u^2 - 3u + 1,$$

所以 $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

3. 设 $f(x+2) = x^2 - 2x + 3$, 求 $f[f(2)]$.

解 因为 $f(x+2) = x^2 - 2x + 3 = [(x+2)-2]^2 - 2[(x+2)-2] + 3$,

所以 $f(x) = (x-2)^2 - 2(x-2) + 3 = x^2 - 6x + 11$,

从而 $f(2) = 3$, 故 $f[f(2)] = f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 11 = 2$.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2, & x \leq 0 \\ 1 - x^2, & x > 0 \end{cases}$, 求 $f(x+1)$.

解 当 $x+1 \leq 0$ 时, 即 $x \leq -1$ 时,

$$f(x+1) = (x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2(x^2 + 2x + 1) + 2$$

$$= x^3 + 5x^2 + 7x + 5;$$

当 $x+1 > 0$, 即 $x > -1$ 时, $f(x+1) = 1 - (x+1)^2 = -x^2 - 2x$.

$$\text{故 } f(x+1) = \begin{cases} x^3 + 5x^2 + 7x + 5, & x \leq -1 \\ -x^2 - 2x, & x > -1 \end{cases}.$$

5. 已知 $f(x) = e^x$, $f[\varphi(x)] = x+1$, 求 $\varphi(x)$ 的表达式.

解 由于 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)} = x+1$, 解得 $\varphi(x) = \ln(x+1)$.

6. 求函数 $y = \log_4 \sqrt{x} + \log_4 2$ 的反函数.

解 由 $y = \log_4 \sqrt{x} + \log_4 2 = \log_4 2\sqrt{x}$, 得 $2\sqrt{x} = 4^y$.

从而 $\sqrt{x} = 2^{-1} \cdot 2^{2y} = 2^{2y-1}$, 所以 $x = 4^{2y-1}$, 即所求函数的反函数是 $y = 4^{2x-1}$.

7. 设函数 $y = 1 + \lg(x-2)$ 与函数 $y = g(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称, 则 $g(x)$ 等于

A. $10^{x-2} - 1$ B. $10^{x-1} + 2$ C. $10^{x-2} + 1$ D. $10^{x-1} - 2$

解 由计算可知 $y = 1 + \lg(x-2)$ 的反函数为 $y = 10^{x-1} + 2$, 由于函数与其反函数的图形关于 $y = x$ 对称, 所以 $g(x) = 10^{x-1} + 2$.

故应选 B.

8. 试分析下列函数是由哪几个基本初等函数复合而成的?

$$(1) y = \sin 2x; \quad (2) y = e^{x^2};$$

$$(3) y = \sqrt{\ln \tan \sqrt{x}}; \quad (4) y = \ln^2 \arccos x^3.$$

解 (1) $y = \sin u, u = 2x$;

$$(2) y = e^u, u = x^2;$$

$$(3) y = \sqrt{u}, u = \ln v, v = \tan w, w = \sqrt{x};$$

$$(4) y = u^2, u = \ln v, v = \arccos w, w = x^3.$$

同步习题 1.4

1. 设一矩形面积为 A , 试将周长 l 表示为宽 x 的函数, 并求其定义域.

解 $l = 2(x + \frac{A}{x})$, 定义域为 $x > 0$.

2. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒, 试将它的全面积表示为半径 r 的函数, 并确定此函数的定义域.

解 设全面积为 S , 底面半径为 r , 高为 h , 则 $V = \pi r^2 h$, 于是 $h = \frac{V}{\pi r^2}$,

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right),$$

定义域为 $r > 0$.

3. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的任一内接长方形的面积.

解 如图 1-2 所示, 设长方形在第一象限中的顶点为 $P(x, y)$, 则长方形的面积为 $A = (2x) \cdot (2y) = 4xy$, 点 P 在椭圆上, 其坐标 (x, y) 应满足椭圆的方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

即 $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$, 从而 $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

(因 $y > 0$). 所以 $A = 4xy = \frac{4b}{a} x(a^2 - x^2)$ ($0 < x < a$).

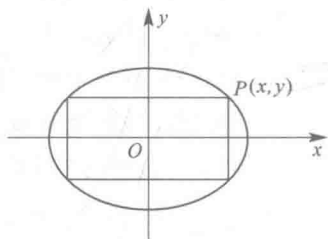


图 1-2

4. 某运输公司规定货物的吨公里运价为: 在 a 公里以内, 每公里为 k 元; 超过 a 公里, 超过部分每公里为 $\frac{4}{5}k$ 元, 求运价与里程之间的函数关系.

解 根据题意可列出函数关系如下

$$m = \begin{cases} ks, & 0 < s \leq a \\ ka + \frac{4}{5}k(s-a), & s > a \end{cases}$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数表示的, 定义域为 $(0, +\infty)$.