中国大学先修课程

线性代数

Linear Algebra

冯荣权　王殿军　杨晶　周俊

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$$

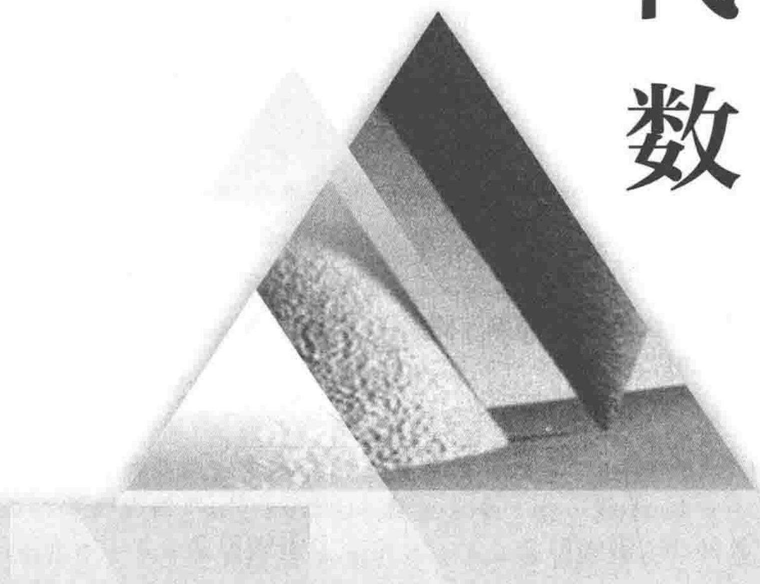
高等教育出版社

中国大学先修课程

Linear Algebra

线性代数

冯荣权　王殿军　杨晶　周俊



高等教育出版社·北京

内容提要

本书作为中国大学先修课程的教材，旨在使学生通过学习，理解线性代数中的基本概念、掌握线性代数中的基本理论和方法、接受以矩阵为代表的基本运算技能的训练，会处理线性代数中的常见问题，使学生得到比较系统的数学训练。全书共分八章，包括线性方程组、行列式、矩阵代数、向量空间、矩阵的特征值问题与二次型理论等。每一章内容后面都配备了形式多样的习题，书后附有绝大多数习题的答案和提示。本教材适合具有扎实的数学基础、学有余力，并希望提前选修大学数学基础课程的优秀高中生。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 冯荣权等编.-- 北京 : 高等教育出版社, 2017.10

中国大学先修课程

ISBN 978-7-04-048260-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 185137 号

XIANXING DAISHU

策划编辑 李 茜　责任编辑 李 茜　封面设计 张申申　版式设计 马 云
插图绘制 黄云燕　责任校对 王 雨　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京明月印务有限责任公司		http://www.hepmall.com
开　本	889mm×1194mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	16.75		
字　数	410千字	版　次	2017年10月第1版
购书热线	010-58581118	印　次	2017年10月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	48.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　48260-00

出版说明

《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》关于普通高中教育改革提出“深入推进课程改革。创造条件开设丰富多彩的选修课,为学生提供更多选择,促进学生全面而有个性的发展。”以及“推进培养模式多样化,满足不同潜质学生发展需要,探索发现和培养创新人才的途径”。关于人才培养体制改革提出“树立多样化人才观念,尊重个人选择,鼓励个性发展,不拘一格培养人才。树立系统培养观念,推进小学、中学、大学有机衔接”。

党的十八届三中全会对“深化教育领域综合改革”作出全面部署,对高中教育教学改革提出了新的更高要求。国务院于2014年发布了《国务院关于深化考试招生制度改革的实施意见》,明确要求启动高考综合改革试点。考试招生制度改革为教育综合改革带来了活力,使得学有余力的中学生能把更多的精力用于发展个人兴趣和特长,为在高中开设大学先修课程提供了必要条件。

为贯彻落实有关精神和要求,2014年3月,中国教育学会联合高等教育出版社共同发起并组织实施了“中国大学先修课程(CAP)试点项目”。本项目旨在探索加强高中与大学教育的衔接,促进拔尖创新人才培养的有效形式,为不断深化我国高中教育教学改革先行先试。项目邀请国内多所知名高校和教育科研机构的专家、学者,在学习、借鉴先进国际课程理念和经验的基础上,着力研制、开发一套适合我国高中教育实际、具有鲜明中国特色的大学先修课程,使学有余力的高中生能根据自身的兴趣和能力自主选择、自愿学习,提前接受大学的思维方式、学习方法,发展在学科专业学习和研究方面的潜能,帮助其为大学学习乃至未来的职业生涯做好准备。

本试点项目根据大学开课的特点,先期研发了8门课程,自2014年9月起在65所高中试点,到2016年第四次开课,试点学校增加到103所,选课总人数超过万人。同时,遵循能力导向的原则设计测评体系,给学生充分发挥的空间,鼓励学生通过推理、探究充分展示解题思路,并根据先进的教育理念和学科人才评测技术,借鉴国际大型测试项目的评分规则对结果进行评价。

试点期间,为配合试点项目课程研发,由中国教育学会委托国内知名大学和中学的专家为本系列课程编写了讲义。经过四个学期的试用,得到广大试点学校的积极反馈,对讲义内容适用性的提高起到关键作用,我们也希望这些经过实践锤炼的讲义形成的教材,能使更多的学生受益。本系列教材旨在将大学的学科教学内容比较完整地呈现给高中学生,在编写过程中着重考虑到以下两个方面:

1. 大学先修课程不是大学内容的简单照搬,教材的编写既考虑了大学的知识水准又考虑到了中学生的学习特点,引导学生尝试使用大学的自主学习方式来学习,鼓励培养主动学习的意识。

2. 大学先修课程的学习应建立在兴趣的基础上,由学生自由选择,目前除了数学、物理、文学、外语,我们的课程还拓展到中学课标没有涉及的经济学领域,未来还会不断有新的课程加入进来。

本项目尚处在试点阶段,在课程设置、教学内容、教学方法和测评方面虽然已经做出了很多尝试,并且取得了宝贵的经验,但在诸多方面的探索还在进行之中,距离完善还有相当的路程。希望广大的试点中学、教师、学生和家长能对本项目给予正确的理解与积极的支持,我们共同携手为高中教育的改进不懈努力。

为了体现教育公平,我们还在爱课程网上线了一批大学先修课程慕课(MOOC),为没有条件在中学开设大学先修课的学校提供免费的教学和学习的平台,欢迎广大中学生来体验、学习。

中国大学先修课试点项目管理委员会办公室

二〇一六年五月

前言

《线性代数》作为中国大学先修课程的教材之一，旨在使学生通过学习，理解线性代数中的基本概念、掌握线性代数中的基本理论和方法、接受以矩阵为代表的基本运算技能的训练，会处理线性代数中的常见问题，使学生得到比较系统的数学训练，进一步激发学生的学习兴趣、提升学生的科学素养，为进入下一阶段的学习做好知识储备和能力准备，为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础。

中国的大学先修课程教育刚刚起步，其教育教学模式还在探讨阶段。我们理解大学先修课程首先是大学课程，应该把它定位为既有大学学术标准和大学基本学业水平的，并且又符合中学生的数学基础和认知能力的衔接课程。所以这本教材在内容方面，选取了大学线性代数课程中的最基本的内容，主要包括：几何向量、空间的直线和平面、线性方程组的高斯（Gauss）消去法、行列式、矩阵运算、n 维向量空间、向量的线性相关性、内积与欧氏空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、几何变换等。因此本书适合具有扎实的数学基础、学有余力并希望提前先修大学基础课程的优秀中学生。

在内容处理上，需要特别说明以下几点。

（1）代数与几何相结合是本书的一个特点。代数学主要讨论代数运算的运算性质，而这些运算则是从具体的事例中抽象出来的，希望学习本课程的学生可以从学习中慢慢体会这一点。几何可以为许多代数概念提供原始模型，而代数可以为解决几何问题提供方法。所以在本书第一章我们给出了中学生所熟悉的空间几何模型，在最后一章，对之前讨论的代数方面的概念和理论给出了几何方面的对应和解释；借助矩阵变换给出了线性变换一个朴素的几何模型；并给出用代数方法解决空间中二次曲面分类的应用。同时，本书还给出了线性代数在其他领域应用的例子。本课程不仅在很多学科有重要应用，而且是后继课程的基础，同时它还担负着培养学生的综合运用所学的数学原理和技能分析问题和解决问题的能力、以抽象思维和逻辑推理为特征的理性思维能力和自主学习的能力，并可激发学生的创新精神。

（2）为了知识的完整，我们给出了几乎所有结论的证明，其中的部分证明对中学生来说难度有些大，任课老师在教学过程中可以灵活掌握。同时任课老师在课程的教学过程中，要突出数学思想方法的教学，加强数学应用能力的培养，淡化运算技巧的训练。另外学会形式化的表达是一项基本要求，但是不能只限于形式化的表达，要强调对数学本质的认识，不能将生动活泼的数学思维活动淹没在形式化的海洋里。因此，本书力图揭示线性代数中概念、理论、方法的发

展过程和本质。任课教师在教学中不仅要讲逻辑推理,还要讲道理,通过典型例子的分析和学生自主探索活动,使学生理解这些概念、理论逐步形成的过程,体会蕴涵在其中的思想方法。

(3) 本书中少量内容与部分高中课本内容相似,例如:第零章的前两节,第 8.1.1 节矩阵变换的定义和基本性质,§8.3 最小二乘问题,第 8.4.1 节平面中的二次曲线等,之所以保留这些内容,是出于知识结构的完整性考虑,也可使本书与高中教材衔接更加顺畅。在具体的授课过程中,教师可根据实际情况略讲或跳过这些部分。

(4) 学时建议:建议分两学期讲授,每学期各 36 学时(含习题讨论课),第一学期可讲授第零章至第四章,重点是线性方程组、行列式与矩阵的基本运算和求解,侧重具体计算。第二学期讲授第五章至第八章,主要内容是引入向量组的线性相关性理论,把之前的内容串接起来,并用其讨论更深的问题,如:线性方程组解的结构、矩阵的特征值问题、二次型问题等,侧重于理论分析与综合计算。如要一个学期讲授完,建议不少于 64 学时(不含习题讨论课)。

大学先修课程在国外已走过了几十年的历程,也有比较成功的经验。但在我国,大学先修课程的兴起却是近几年的事情。特别是线性代数课程,在美国 AP 课程中也是没有的。如何建设适合我国国情的大学先修课程,编写符合课程定位、能够达到课程目的的教材,一切都还在探索中。

在前期调研的基础上,本书参编人员在 2014 年 3 月至 7 月,经过多次研讨,确定了课程的定位及教材应包含的内容。教材中第一章至第六章的初稿于 2014 年 7 月底形成,并听取了 2014 年 8 月初在清华附中举办的中国大学先修课程试点项目首批实验学校教师培训的全体学员的意见和建议。根据反馈意见,编者对全书做了修改和校订,2015 年 1 月在清华附中又举办了中国大学先修课程试点项目实验学校第二期教师培训,期间就第一章至第六章教材内容及教学中的使用情况,征询了老师们的意见和建议。迄今为止,这部分内容已经经过几十所中学的多轮试用,并根据使用情况进行了修订。

本书的第零章、第七章和第八章的初稿在 2015 年 6 月底形成,并听取了中国大学先修课程试点项目实验学校第三期、第四期教师培训的全体学员的意见和建议。之后,编者根据反馈意见对全书做了修改、订正和重排。2016 年 3 月和 8 月,在清华附中举行了第一次和第二次 MOOCAP 教师工作坊研讨会,再一次征询了一线教师对教材的意见。迄今为止,该部分内容也已经过试用,并根据使用情况进行了修订。

编写一本合适的大学先修课程教材,对我们所有参编者都是一种挑战,尽管我们很努力,但由于学识、认识及经验所限,书中难免会有不足,希望使用本教材的老师和学生提出宝贵的意见和建议,您的关注是我们做好此项工作的最大动力。

编 者

2016 年 11 月于北京

目 录

第零章 预备知识

§0.1 2、3阶行列式

考察下面二元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1,\\a_{21}x+a_{22}y=b_2,\end{cases}\tag{0.1}$$

其中 x,y 为未知量,$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为未知量系数,b_1,b_2 为常数项.不妨设 a_{11},a_{21} 均不为 0,则第 1 个方程两边乘以 a_{21},第 2 个方程两边乘以 a_{11} 得

$$\begin{cases}a_{11}a_{21}x+a_{12}a_{21}y=b_1a_{21},\\a_{11}a_{21}x+a_{11}a_{22}y=b_2a_{11}.\end{cases}$$

第 2 个方程减去第 1 个方程得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,则有

$$y=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

将上述 y 的值代入第 1 个方程,得到

$$a_{11}x=b_1-\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\cdot a_{12}=\frac{a_{11}(b_1a_{22}-b_2a_{12})}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

故

$$x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

所以,若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,则上述二元一次方程组的解为

$$x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad y=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\tag{0.2}$$

类似地,对于下面的三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \tag{0.3}$$

若 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$,则可得方程组(0.3)的解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ y = \dfrac{b_1a_{23}a_{31} + b_2a_{11}a_{33} + b_3a_{13}a_{21} - b_1a_{21}a_{33} - b_2a_{13}a_{31} - b_3a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\ z = \dfrac{b_1a_{21}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{11}a_{32} - b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}. \end{cases} \tag{0.4}$$

注意到上面方程组的解中分子、分母的形式,为了便于表述,我们引进记号如下:令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称其为一个**2 阶行列式**.类似地,令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称其为一个**3 阶行列式**.

行列式中每一横排称为它的行,每一竖排称为它的列.一个 2(或 3)阶行列式用一个 2(或 3)行 2(或 3)列的数表,左右两边再加上竖线来表示.数表中出现的数也称为此行列式的元素.

行列式中从左上角到右下角的线称为其**主对角线**.从右上角到左下角的线称为其**副对角线**.所以 2 阶行列式等于它的主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积,而 3 阶行列式等于主对角线或平行于主对角线的 3 条线上元素的乘积之和再减去副对角线或平行于副对角线的 3 条线上元素乘积之和.具体表示如下

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \tag{0.5}$$

其中实线为主对角线(或与主对角线平行的线),虚线为副对角线(或与副对角线平行的线).

利用行列式表示,二元一次方程组(0.1)的解(0.2)可以写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{0.6}$$

三元一次方程组(0.3)的解(0.4)可以写成

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{0.7}$$

把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三元一次方程组(0.3)的系数行列式.所以当方程组(0.3)的系数行列式不为 0 时,它的解为

$$x=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{D_2}{D},\quad z=\frac{D_3}{D},$$

其中 D_i 是把系数行列式 D 的第 i 列换成常数项这一列得到的行列式.自然,这个结论对二元一次方程组(0.1)也成立.

例 0.1 解三元一次方程组

$$\begin{cases} x+3y+z=2, \\ 3x+4y+2z=9, \\ -x-5y+4z=10. \end{cases}$$

解 此方程组的系数行列式为

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} &= 1\times4\times4+3\times2\times(-1)+1\times3 \\ &\quad \times(-5)-1\times2\times(-5)-3\times3\times4-1\times4\times(-1) \\ &=-27\neq0. \end{aligned}$$

再用常数项列依次替换上面行列式中的列可得

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 9 & 4 & 2\\ 10 & -5 & 4\end{vmatrix}=-81,\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 9 & 2\\ -1 & 10 & 4\end{vmatrix}=27,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 9\\ -1 & -5 & 10\end{vmatrix}=-54.$$

所以 $x=\frac{D_1}{D}=3, y=\frac{D_2}{D}=-1, z=\frac{D_3}{D}=2$.即方程组的解为

$$\begin{cases}x=3,\\ y=-1,\\ z=2.\end{cases}$$

§0.2 行列式的性质

2 阶行列式是 2 项的代数和,每一项都是取自不同行不同列的 2 个元素的乘积.3 阶行列式是 6 项的代数和,每一项都是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积.所以直接展开计算的运算量还是较大的.本节先给出行列式的性质.由性质出发可以简化行列式的计算.先考察 2 阶行列式.

性质 0.1 行列互换,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

证明 由行列式定义,等式两边都等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. □

由性质 0.1 知行列式中行与列具有平等的性质.所以下面我们只对行来说明行列式的性质.自然行列式对列也具有相应的性质.

性质 0.2 两行互换,行列式的值变号.即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}.$$

证明 $\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}$,所以上式两端都等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. □

由此性质可知,若行列式的性质对某一行成立,则对任意一行也成立.所以下面性质只对第一行来说明并证明.

性质 0.3 若行列式中某行每个元素分成两个元素之和,则该行列式可关于该行拆开成两个行列式之和.拆开时其他各行均保持不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

证明
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (a_{11}+b_{11})a_{22}-(a_{12}+b_{12})a_{21} \\ &= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+(b_{11}a_{22}-b_{12}a_{21}) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$ □

性质 0.4 行列式中某行有公因子 k 时,k 可以提出行列式外.即

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

证明 $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (ka_{11})a_{22}-(ka_{12})a_{21} = k(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$ □

性质 0.5 行列式中某一行加上另一行的 k 倍后,其值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

证明
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (a_{11}+ka_{21})a_{22}-(a_{12}+ka_{22})a_{21} \\ &= a_{11}a_{22}+ka_{21}a_{22}-a_{12}a_{21}-ka_{22}a_{21} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$ □

下面考察 3 阶行列式.由定义得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{*}$$

在上述 3 阶行列式中,划去第 i 行第 j 列后所剩下的 2 阶行列式称为**元素 a_{ij} 的余子式**,记为 M_{ij}.例如

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\quad M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},\quad \text{等等.}$$

再令

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称之为**元素 a_{ij} 的代数余子式**,例如

$$A_{11}=M_{11},\quad A_{12}=-M_{12},\quad A_{13}=M_{13},\quad A_{23}=-M_{23},\quad A_{31}=M_{31},$$

等等.由上面的符号,(*)式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \tag{0.8}$$

同样地

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\
&=-a_{21}(-a_{13}a_{32}+a_{12}a_{33})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{23}(-a_{12}a_{31}+a_{11}a_{32})\\
&=-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\\
&=-a_{21}M_{21}+a_{22}M_{22}-a_{23}M_{23}\\
&=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}.\end{aligned} \tag{0.9}$$

类似地,可得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}. \tag{0.10}$$

上面的(0.8),(0.9),(0.10)式分别称之为 3 阶行列式对其第一、二、三行的展开公式.同样也有 3 阶行列式对其第一、二、三列的展开公式.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

这样,我们便证明了下面的定理.

定理 0.1 3 阶行列式等于它的任一行(或列)元素与该元素的代数余子式乘积之和.

当然,此定理对 2 阶行列式也成立.参见习题.

根据前面定理和已经证明的关于 2 阶行列式的性质,3 阶行列式也有同样的性质.

性质 0.1′ 行列互换,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

证明 等号左端的行列式按第 1 列展开后利用性质 0.1 可得

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

这恰为等号右端的行列式按第 1 行展开后的结果.

由此下面关于 3 阶行列式的性质也只对行来证明. □

性质 0.2′ 两行(列)互换,行列式的值变号.

证明 只考虑行列式的前 2 行互换的情形,其他情形类似.本性质即为

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

把等号左端的行列式按第 3 行展开再利用性质 0.2 可得

$$a_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

$$= -\left(a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right)$$