

Signals
Systems

杜尚丰 主编

信号与系统

教程及实验

第2版



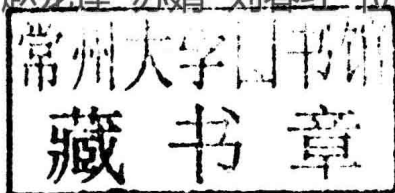
清华大学出版社

信号与系统 教程及实验

第2版

杜尚丰 主编

赵龙莲 苏娟 刘春红 位耀光 副主编



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书以全新的编排方式,由浅入深、循序渐进,并引入现代计算方法,介绍信号与系统的基本内容,包括:信号与系统分析的基本概念与方法;连续时间系统与离散时间系统的时域分析;连续信号的傅里叶变换与系统的频域分析;连续信号的拉普拉斯变换与系统的 S 域分析;离散信号与系统的 Z 变换域分析;在上述内容的基础上介绍了系统的状态空间分析方法。每章都配有例题与 MATLAB 仿真实验源程序。本书配有两个附录:附录 A——信号流程图;附录 B——哈密顿-凯莱定理。

本书可作为高等学校工科(理科)的自动化类、电子类、通信类和电气类专业学生的教材,也可供相关科研与工程技术人员自学参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统教程及实验/杜尚丰主编.—2版.—北京:清华大学出版社,2018

ISBN 978-7-302-49662-5

I. ①信… II. ①杜… III. ①信号理论—高等学校—教材 ②信号系统—实验—高等学校—教材
IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 033856 号

责任编辑:王一玲

封面设计:常雪影

责任校对:梁毅

责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社总机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 刷 者:北京富博印刷有限公司

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:20.5

字 数:501千字

版 次:2012年12月第1版

2018年4月第2版

印 次:2018年4月第1次印刷

印 数:1~1500

定 价:59.00元

产品编号:077765-01

前言

信号与系统课程是电子类、通信类、自动化类、电气工程类及计算机类专业非常重要的专业基础课。本书写作贯穿时域与变换域的思想,内容安排循序渐进,概念介绍直观形象,同时配以大量的图形解释、例题和习题,并给出了 MATLAB 实现的例子,极大地方便了教与学。

二十几年的教学,跨越了“九五”“十五”“十一五”“十二五”,见证了信号与系统教学内容的演变历程。在信息处理量庞大的今天,信号与系统的教授内容也必须与时俱进,才能满足现代教学的需求。

在教授课程知识时,对专业基础课、专业课、专业选修课的教学方法是不同的,因此在编制教材时,也应反映这种区别。

注重信号与系统这门基础课对后续课程的作用,有针对性地组织内容,避免冗余,以提高教学效率。如在时域分析中,注重微分、差分方程的解法与卷积(卷积和)的作用;而在变换域分析中,注重三种变换的重要性。在教学实践中验证是非常有效的。

注重掌握本书内容的学习方法与手段,传统依靠手工做题和适量的模拟实验,在本次修订时,增加了用计算机来求解问题的手段,节约了大量时间。我们认为,在信息技术发达的今天,过于传统会降低我们获取更多知识的效率。因此,在编写教材时,注重讲解计算机工具在信号与系统分析时的作用,同时也丰富了学生的实践环节。

第 1 版教材,经过五年的使用,积累许多经验,在本次更新教材内容的过程中,注重了以下几个方面:

第 1 章,应用领域的范例在拓宽,例如在农业工程领域,强调信号、系统分类和方法描述,指明常用奇异信号的重要性。

第 2 章,突出系统的经典解和零输入、零状态响应;系统的冲激响应;过渡到在任意信号作用下的响应;修正了原版中的符号错误等。

第 3 章,结合工程数学,淡化数学味道,给出傅里叶变换的基本性质与应用,配备大量的例题展示在信号与系统分析中的作用。重点改编傅里叶变换的应用:分析系统;系统函数与频率特性;信号的无失真传输与滤波器;采样定理;稳态响应。

第 4 章,突出系统函数零、极点的重要性,如对时域特性有何影响;对自由响应、强迫响应、稳态响应、暂态响应特征的影响;与频域响应的关系;对稳定性的影响。

第 5 章,强化系统函数零、极点的重要性,如对时域特性有何影响;对自由响应、强迫响应、稳态响应、暂态响应特征的影响;与频域响应的关系;对稳定性的影响。

第 6 章,修改了第 1 版的符号问题。

第 7 章,删除了原来第 7 章,保留的部分变成附录 A——信号流程图;原来的第 8 章改为第 7 章。状态空间模型描述这个章节修改后有:模型意义、建立、转换;模型的分析方法(时域法与变换域法),每个内容的描述均配以适量的例题给予展示,丰富了本章内容。

正文最后增加了附录 A——信号流图,附录 B——哈密顿-凯莱定理。

本书第 1 章、附录 A、B 由杜尚丰改编,第 2 章由苏娟改编,第 3、4、5 章由赵龙莲改编,第 6 章由刘春红改编,第 7 章由位耀光改编。全书由杜尚丰、赵龙莲统稿。

本书的编写基于一些知名的教材与教学中积累的资料,由于水平有限,因此书中的不足之处在所难免,恳切希望广大读者提出批评与指正,帮助我们不断修改、完善本书。

杜尚丰

2017 年 9 月 5 日

目 录

第 1 章 信号与系统概述	1
1.1 绪言	1
1.2 信号	2
1.3 信号的基本运算	8
1.4 阶跃函数和冲激函数	11
1.5 系统的描述	19
1.6 系统的性质	23
1.7 LTI 系统分析方法概述	26
习题	27
第 2 章 系统的时域分析	33
2.1 LTI 连续系统的响应	33
2.1.1 微分方程的经典解	33
2.1.2 零输入响应和零状态响应	37
2.1.3 冲激响应和阶跃响应	41
2.1.4 卷积积分	44
2.2 离散系统的时域分析	53
2.2.1 LTI 离散系统的响应	53
2.2.2 差分方程的经典解	54
2.2.3 零输入响应和零状态响应	58
2.2.4 单位序列和单位序列响应	61
2.2.5 卷积和	62
习题	67
第 3 章 连续信号的傅里叶变换与频域分析	71
3.1 非周期信号的傅里叶变换	71
3.2 傅里叶变换的性质	79
3.3 周期信号的傅里叶变换	92
3.3.1 正弦、余弦信号的傅里叶变换	92
3.3.2 一般周期信号的傅里叶变换	92
3.4 采样信号的傅里叶变换与采样定理	95
3.4.1 采样信号的傅里叶变换	95

3.4.2 采样定理	97
3.5 傅里叶变换的应用	98
3.5.1 频域法求系统的响应	99
3.5.2 无失真传输	102
3.5.3 理想低通滤波器	104
3.5.4 调制与解调	107
3.6 连续信号傅里叶变换的 MATLAB 应用实例	110
本章小结	116
习题	116
第 4 章 拉普拉斯变换和连续时间系统的 S 域分析	122
4.1 拉普拉斯变换	122
4.2 拉普拉斯变换的性质	126
4.3 拉普拉斯逆变换	135
4.4 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系	140
4.5 用拉普拉斯变换求解线性系统的响应	142
4.5.1 微分方程的 S 域求解	142
4.5.2 S 域元件模型	143
4.6 系统函数	145
4.6.1 系统函数	145
4.6.2 系统的联结	147
4.6.3 系统的 S 域框图	148
4.7 系统函数的零、极点分布对系统时域特性的影响	150
4.7.1 $H(s)$ 零、极点分布与 $h(t)$ 波形特征的对应	150
4.7.2 $H(s)$ 、 $F(s)$ 极点分布与自由响应、强迫响应特征的对应	152
4.7.3 $H(s)$ 、 $F(s)$ 极点分布与暂态响应、稳态响应特征的对应	154
4.8 系统函数零、极点与系统频率响应特性的关系	154
4.9 系统函数零、极点分布与系统稳定性的关系	157
4.10 MATLAB 仿真实现连续系统的 S 域分析	158
习题	162
第 5 章 离散时间信号与系统的 Z 域分析	168
5.1 Z 变换	168
5.1.1 Z 变换的定义	168
5.1.2 Z 变换的收敛域	169
5.1.3 典型序列的 Z 变换	172
5.1.4 逆 Z 变换	173
5.1.5 Z 变换的性质	175
5.2 离散时间系统的 Z 域分析	180

5.2.1 利用 Z 变换解差分方程	180
5.2.2 离散时间系统的系统函数	183
5.2.3 系统的 Z 域框图	185
5.3 离散时间系统函数与系统特性	187
5.3.1 系统函数的零、极点分布与系统时域特性的关系	187
5.3.2 系统函数的零、极点分布与系统频率响应的关系	189
5.3.3 系统函数的零、极点分布与系统稳定性的关系	193
5.4 Z 变换与拉普拉斯变换的关系	195
5.5 利用 MATLAB 对离散系统进行 Z 域分析	196
习题	199
第 6 章 离散傅里叶变换(DFT)与频域分析	204
6.1 离散傅里叶级数	204
6.1.1 离散傅里叶级数的定义	204
6.1.2 离散傅里叶级数的性质	207
6.2 离散傅里叶变换	209
6.2.1 四种信号及其傅里叶变换	209
6.2.2 离散信号傅里叶变换的定义	211
6.2.3 离散傅里叶级数(DFS)与离散傅里叶变换(DFT)的关系	212
6.3 离散傅里叶变换的性质	213
6.4 线性卷积的计算	218
6.5 频率采样定理	222
6.5.1 Z 变换与 DFT 的关系	223
6.5.2 不失真条件	224
6.5.3 $F(z)$ 的内插表达式	225
6.6 离散傅里叶变换的应用	227
6.7 MATLAB 仿真	231
习题	235
第 7 章 系统分析的状态变量法	237
7.1 系统的状态空间描述	237
7.1.1 状态空间基本概念	237
7.1.2 根据系统物理模型建立状态方程	239
7.1.3 由系统的输入—输出方程建立状态方程	240
7.1.4 将系统函数分解建立状态方程	241
7.2 系统函数(传递函数)	245
7.2.1 系统函数(传递函数)矩阵	245
7.2.2 系统函数描述和状态空间描述的比较	247
7.3 状态方程的求解	247

7.3.1 线性连续系统状态方程的解	247
7.3.2 线性离散系统状态方程的解	250
7.4 能控性与能观性	253
7.4.1 系统的能控性	253
7.4.2 系统的能观性	257
7.5 MATLAB 应用于状态变量分析	259
7.5.1 利用 MATLAB 求解状态空间表达式	259
7.5.2 状态方程求解	261
7.5.3 用 MATLAB 判断线性系统的能控性和能观性	265
习题	266
附录 A 系统的信号流图与梅森公式	272
附录 B 哈密顿-凯莱定理	283
参考答案	288
参考文献	320

第1章

信号与系统概述

本章介绍信号与系统的概念以及它们的分类方法,并讨论了线性时不变(LTI)系统的特性和分析方法。深入地研究了阶跃函数、冲激函数及其特性,它们在信号和 LTI 系统分析中占有十分重要的地位。

1.1 绪言

在近代,人们在自然科学(如物理、化学、生物等)以及工程、经济、社会等许多领域中,广泛地引用“系统”的概念、理论和方法,并根据各学科自身的规律,建立相应的数学模型,研究各自的问题。一般认为,系统是指由若干相互关联、互相作用的事物按一定规律组合而成的具有特定功能的整体。系统可具有不同的属性和规模。

通信系统的任务是传输消息(如语言、文字、图像、数据、指令等)。为了便于传输,先由转换设备将所传消息按一定规则变换为相对应的信号(如电信号、光信号,它们通常是随时间变化的电流、电压或光强等),经过适当的信道(即信号传输的通道,如传输线、电缆、空间、光纤、光缆等)将信号传送到接收方,再转换为声音、文字、图像等。通信设备中的滤波器是一个简单系统,而由同步卫星和地面站组成的卫星通信是一个庞大的复合系统,它不仅包括为完成通信任务的通信系统,还包括保障卫星正常运行的各类子系统。

工业部门常采用计算机控制的过程控制系统,用以实时检测、调节或控制工艺流程的各种参数(温度、压力、流量等),保证设备正常运转,生产出合格产品。

工商部门将产品的产量(或进货量)与库存、销售速率等的关系看作是经济系统,以研究如何根据市场销售的状况调节生产(或进货)速度,使产品既不脱销又不积压,节省资金提高效益。

生态学家将生物种群(如细菌、害虫、鱼类等)数量与有关制约因素(如药物、捕捞等)之间的关系看作是生态系统,用以研究药物效能、生物资源开发以及不同种群相互依存、相互竞争的关系等。

农业生产活动中,也有很多系统,如植业物联网系统、养殖业物联网系统、农村能源物联网系统等。

在分析属性各异的各类系统时,常常抽去具体系统物理的或社会的含义而把它抽象化为理想化的模型,将系统中运动、变化的各种量(电压、电流、光强、力、位移、生物数量等)统称为信号,宏观地研究信号作用于系统的运动变化规律,揭示系统的一般性能,而不关心它

内部的各种细节。

信号的概念与系统的概念是紧密相连的。信号在系统中按一定规律运动、变化,系统在输入信号的驱动下对它进行“加工”“处理”并发送输出信号,如图 1.1 所示。输入信号常称为激励,输出信号常称为响应。

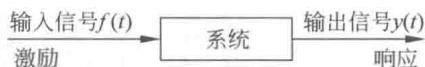


图 1.1 信号与系统

在电子系统中,系统通常是电子线路,信号通常是随时间变化的电压或电流(有时可能是电荷或磁通)。从数学观点而言,这类信号是独立变量 t 的函数 $f(t)$ 。在光学成像系统(如照相机)中,系统由透镜组成,信号是分布于空间各点的灰度,它是二维空间坐标 (x, y) 的函数 $f(x, y)$ 。如果图像信号是运动的,则可表示为空间坐标 (x, y) 和时间 t 的函数 $f(x, y, t)$ 等。农业设施环境调控系统由控制系统与温室系统组成,其中控制系统由传感器、执行器、控制器构成;温室系统通常由作物、温室结构和温室材料组成。传感器检测的信号通常为温室环境温度、湿度、二氧化碳浓度、光照,经过控制系统处理,最后控制各种温室环境调节机构,使温室内环境值达到作物需要的设定值,这是一个复杂的系统。

信号是一个独立变量的函数时,称为一维信号。如果信号是 n 个独立变量的函数,就称为 n 维信号。

信号理论和系统理论涉及范围广泛,内容十分丰富。信号理论包括信号分析、信号处理和信号综合;系统理论包括系统分析和系统综合。信号分析主要讨论信号的表示(描述)和信号的性质等;系统分析主要研究对于给定的系统(它也是信号的变换器或处理器),它在输入信号(激励)的作用下产生的输出信号(响应)。信号分析与系统分析关系紧密又各有侧重,前者侧重于信号的解析表示、性质、特征等,后者则着眼于系统的特性、功能等。

一般而言,信号分析和系统分析是信号处理、信号综合及系统综合的共同理论基础。本书主要研究信号分析和系统分析的基本概念和基本分析方法,以便为读者进一步学习、研究有关网络理论、通信理论、数字信号处理、计算机控制、控制理论、现代信号处理和信号检测理论等打下基础。

1.2 信号

信号常可表示为时间函数(或序列),该函数的图像称为信号的波形。在讨论信号的有关问题时,“信号”与“函数(或序列)”两个词常互相通用。

如果信号可以用一个确定的时间函数(或序列)表示,就称其为确定信号(或规则信号)。当给定某一时刻的值时,这种信号有确定的数值。

实际上,由于种种原因,在信号传输过程中存在着某些“不确定性”或“不可预知性”。例如,在通信系统中,收信者在收到所传送的消息之前,对信息源所发出的消息总是不可能完全知道的,否则通信就没有意义了。此外,信号在传输处理的各个环节中不可避免地要受到各种干扰和噪声的影响,使信号失真(畸变),而这些干扰和噪声的情况总是不可能完全知道的。这类“不确定性”或“不可预知性”统称为随机性。因此,严格来说,在实践中经常遇到的

信号一般都是随机信号。研究随机信号要用概率、统计的观点和方法。虽然如此,研究确定信号仍是十分重要的,这是因为它是一种理想化的模型,不仅适用于工程应用,也是研究随机信号的重要基础。本书只讨论确定信号。

1. 连续信号和离散信号

根据信号定义域的特点可分为连续时间信号和离散时间信号。

1) 连续时间信号

在连续时间范围内($-\infty < t < \infty$)有定义的信号称为连续时间信号,简称连续信号。这里“连续”是指函数的定义域——时间(或其他量)是连续的,至于信号的值域可以是连续的,也可以不是连续的。例如,图 1.2(a)中的信号

$$f_1(t) = 10\sin(\pi t), \quad -\infty < t < \infty$$

其定义域($-\infty, \infty$)和值域 $[-10, 10]$ 都是连续的。图 1.2(b)中的信号

$$f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & -1 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases} \quad (1.1)$$

其定义域($-\infty, \infty$)是连续的,但其函数值只取 $-1, 0, 1$ 三个离散的数值。

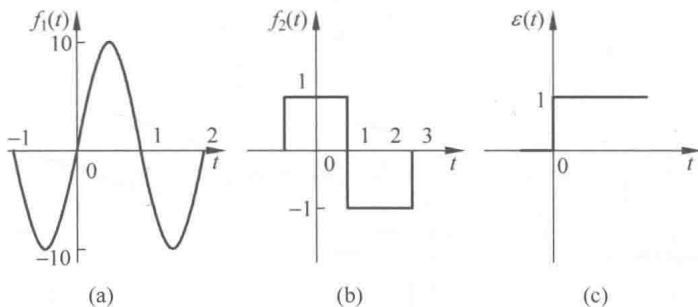


图 1.2 连续时间信号

信号在 $t=-1, t=1$ 和 $t=3$ 处有间断点,一般可不定义间断点处的函数值,如式(1.1)所示。为了使函数定义更加完整,此处规定:若函数在 $t=t_0$ 处有间断点,则函数在该点的值等于其左极限 $f(t_{0-})$ 与右极限 $f(t_{0+})$ 之和的 $\frac{1}{2}$,即

$$f(t_0) = \frac{1}{2}[f(t_{0-}) + f(t_{0+})] \quad (1.2)$$

这样,信号在定义域($-\infty, \infty$)均有确定的函数值。如图 1.2(c)所示的单位阶跃函数定义为

$$\epsilon(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

2) 离散时间信号

仅在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号,简称离散信号。这里“离散”

是指信号的定义域——时间(或其他量)是离散的,它只取某些规定的值。如果信号的自变量是时间 t ,那么离散信号是定义在一些离散时刻 $t_n (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的信号,在其余时间,不予定义。时刻 t_n 与 t_{n+1} 之间的间隔 $T_n = t_{n+1} - t_n$ 可以是常数,也可以随 n 而变化。本书只讨论 T_n 等于常数的情况。若令相继时刻 t_{n+1} 与 t_n 之间的间隔为 T ,则离散信号只在均匀离散时刻 $t = \dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots$ 时有定义,它可表示为 $f(nT)$ 。为了简便,不妨把 $f(nT)$ 简记为 $f(n)$ 。这样的离散信号也常称为序列。

序列 $f(n)$ 的数学表示式可以写成闭合形式,也可逐个列出 $f(n)$ 的值。通常把对应某序号 m 的序列值称为第 m 个样点的“样值”。如图 1.3(a)所示的信号为

$$f_1(n) = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 1, & n = -1 \\ 2, & n = 0 \\ 0.5, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$$

列出了各样点的值。如图 1.3(b)所示为单边指数序列,以闭合形式表示为

$$f_2(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ e^{-\alpha n}, & n \geq 0, \alpha > 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

对于不同的 α ,其值域 $[0, 1]$ 是连续的。与连续信号 $\varepsilon(t)$ 相对相应,离散时间信号

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

称为单位阶跃序列,如图 1.3(c)所示,其值域只取 0 和 1 两个数值。

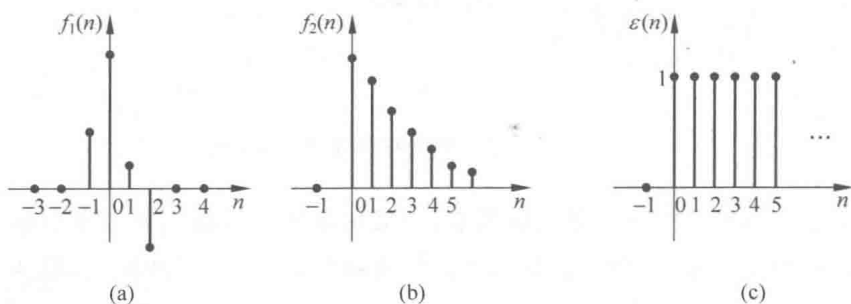


图 1.3 离散时间信号

综上所述,信号的自变量(时间或其他量)的取值可以是连续的或离散的,信号的幅值(函数值或序列值)也可以是连续的或离散的。时间和幅值均为连续的信号称为模拟信号,时间和幅值均为离散的信号,称为数字信号。在实际应用中,连续信号与模拟信号两个词常常不予区分,离散信号与数字信号两个词也常互相通用。

2. 周期信号和非周期信号

周期信号是定义在 $(-\infty, \infty)$ 区间,每隔一定时间 T (或整数 N),按相同规律重复变化的信号,如图 1.4 所示。连续周期信号可表示为

$$f(t) = f(t + mT), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6)$$

离散周期信号可表示为

$$f(n) = f(n + mN), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.7)$$

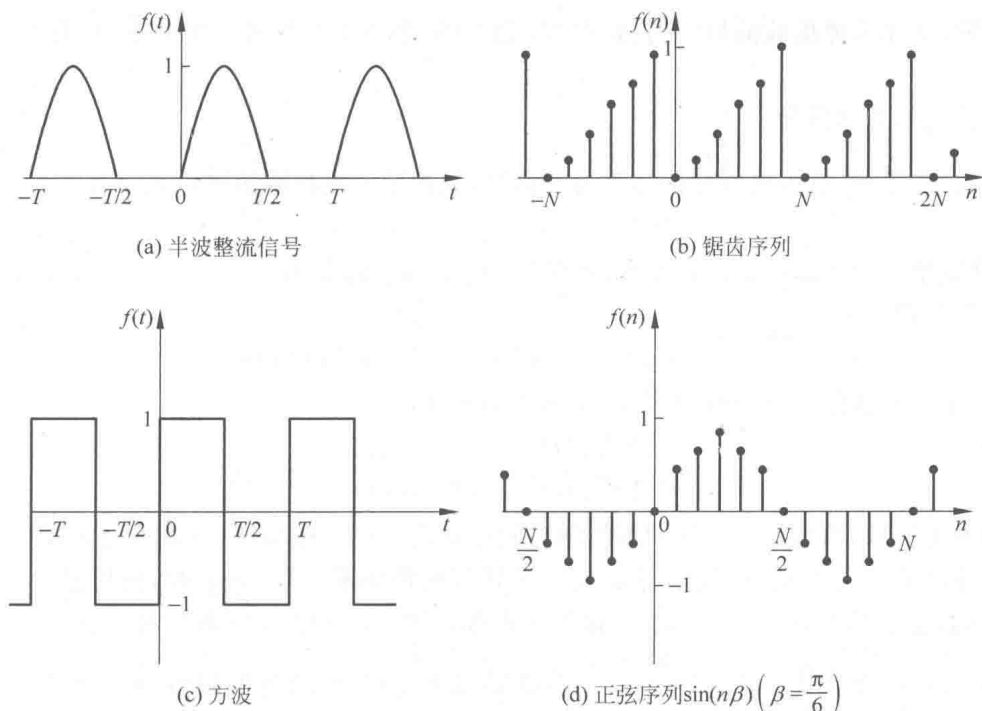


图 1.4 周期信号

满足以上关系式的最小 T (或 N) 值称为该信号的重复周期, 简称周期。只要给出周期信号在任意一个周期内的函数式或波形, 便可确知它在任意一个时刻的值。不具有周期性的信号称为非周期信号。

对于正弦序列 (或余弦序列)

$$\begin{aligned} f(n) &= \sin(\beta n) = \sin(\beta n + 2m\pi) \\ &= \sin\left[\beta\left(n + m\frac{2\pi}{\beta}\right)\right] \\ &= \sin[\beta(n + mN)], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

式中, β 称为正弦序列的数字角频率 (或角频率)。由上式可见, 仅当 $\frac{2\pi}{\beta}$ 为整数时, 正弦序列才具有周期 $N = \frac{2\pi}{\beta}$ 。图 1.4(d) 画出了 $\beta = \frac{\pi}{6}$, 周期 $N = 12$ 的情形, 它每经过 12 个单位循环一次。当 $\frac{2\pi}{\beta}$ 为有理数时 (例如当 $\frac{2\pi}{\beta} = \frac{N}{M}$ 时, M 为无公因子的整数), 正弦序列仍具有周期性, 但其周期 $N = M\frac{2\pi}{\beta}$ 。当 $\frac{2\pi}{\beta}$ 为无理数时, 该序列不具有周期性, 但其样值的包络线仍为正弦函数。

3. 实信号和复信号

物理可实现的信号常常是时间 t (或 n) 的实函数 (或序列), 其在各时刻的函数 (或序列) 值为实数, 例如单边指数信号、正弦信号 (正弦与余弦信号两者相位相差 $\frac{\pi}{2}$, 统称为正弦信号) 等, 称它们为实信号。

函数 (或序列) 值为复数的信号称为复信号, 最常用的复指数信号可表示为

$$f(t) = e^{st}, \quad -\infty < t < \infty \quad (1.8)$$

式中, 复变量 $s = \sigma + j\omega$, σ 是 s 的实部, 记作 $\text{Re}[s]$, ω 是 s 的虚部, 记作 $\text{Im}[s]$, 根据欧拉公式, 上式可展开为

$$f(t) = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} \cos(\omega t) + je^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (1.9)$$

可见, 一个复指数信号可分解为实部、虚部两部分, 即

$$\text{Re}[f(t)] = e^{\sigma t} \cos(\omega t) \quad (1.10)$$

$$\text{Im}[f(t)] = e^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (1.11)$$

两者均为实信号, 而且是频率相同振幅随时间变化的正 (余) 弦振荡。 s 的实部 σ 表示了该信号振幅随时间变化的状况, 其虚部 ω 表示了其振荡角频率。当 $\sigma > 0$ 时, 它们是增幅振荡; 当 $\sigma < 0$ 时, 是衰减振荡; 当 $\sigma = 0$ 时, 是等幅振荡。图 1.5 画出了 σ 的三种不同取值时实部信号 $\text{Re}[f(t)]$ 的波形。信号 $\text{Im}[f(t)]$ 的波形与 $\text{Re}[f(t)]$ 的波形相似, 只是相位相差 $\frac{\pi}{2}$ 。当 $\omega = 0$ 时, 复指数信号就成为实指数信号 $e^{\sigma t}$, 如果 $\sigma = \omega = 0$, 则 $f(t) = 1$, 这时就成为直流信号。可见, 复指数信号概括了许多常用信号。复指数信号的重要特性之一是它对时间的导数和积分仍然是复指数信号。

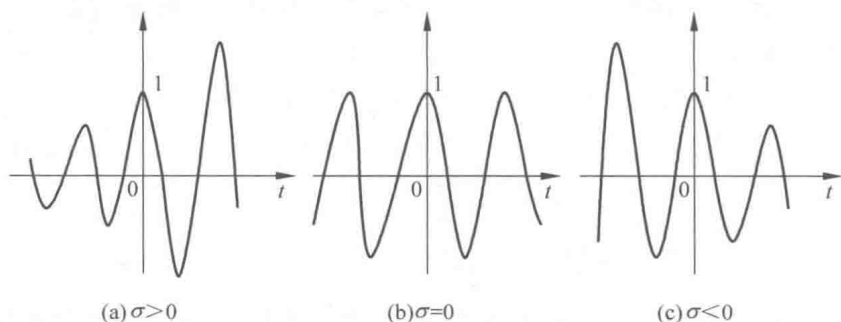


图 1.5 复指数函数的实部 $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$

离散时间的复指数序列可表示为

$$f(n) = e^{(\alpha + j\beta)n} = e^{\alpha n} e^{j\beta n} = a^n e^{j\beta n} \quad (1.12)$$

式中, $a = e^{\alpha}$ 。上式可展开为

$$f(n) = a^n \cos(\beta n) + ja^n \sin(\beta n) \quad (1.13)$$

其实部、虚部分别为

$$\text{Re}[f(n)] = a^n \cos(\beta n) \quad (1.14)$$

$$\text{Im}[f(n)] = a^n \sin(\beta n) \quad (1.15)$$

可见,复指数序列的实部和虚部均为幅值随 n 变化的正(余)弦序列。式中 $a(a=e^\alpha)$ 反映了信号振幅随 n 变化的状况,而 β 是振荡角频率。当 $a>1(\alpha>0)$ 时,它们是幅值增长点的正(余)弦序列;当 $a<1(\alpha<0)$ 时,则是衰减的正(余)弦序列;当 $a=1(\alpha=0)$ 时是等幅正(余)弦序列。图 1.6 画出了 a 的三种不同取值时复指数序列实部的波形,其中 $\beta=\frac{\pi}{4}$ 。当 $\beta=0$ 时,它就成为实指数序列 a^n (或 $e^{\alpha n}$)。

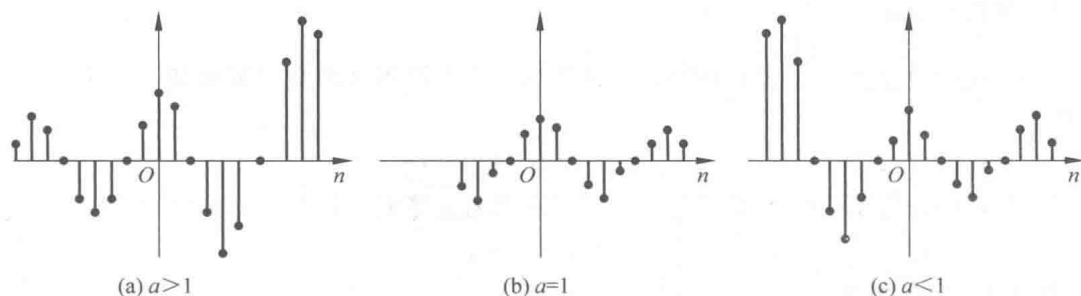


图 1.6 复指数序列的实部 $a^{-n} \cos(\beta n)$ ($\beta=\frac{\pi}{4}$)

4. 能量信号和功率信号

为了知道信号能量或功率的特性,常常研究信号(电流或电压)在单位电阻上的能量或功率,亦称为归一化能量或功率。信号 $f(t)$ 在单位电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$, 在区间 $-a < t < a$ 的能量为

$$\int_{-a}^a |f(t)|^2 dt$$

在区间 $-a < t < a$ 的平均功率为

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt$$

信号能量定义为在区间 $(-\infty, \infty)$ 信号 $f(t)$ 的能量,用 E 表示,即

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt \quad (1.16)$$

信号功率定义为在区间 $(-\infty, \infty)$ 信号 $f(t)$ 的平均功率,用 P 表示,即

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt \quad (1.17)$$

若信号 $f(t)$ 的能量有界(即 $0 < E < \infty$, 这时 $P=0$) 则称其为能量有限信号,简称为能量信号。若信号 $f(t)$ 的功率有界(即 $0 < P < \infty$, 这时 $E=\infty$) 则称其为功率有限信号,简称功率信号。仅在有限时间区间不为零的信号是能量信号,例如图 1.2(b) 中的 $f_2(t)$ 、单个矩形脉冲等,这些信号的平均功率为零,因此只能从能量的角度去考查。周期信号、阶跃信号是功率信号,它们的能量为无穷,只能从功率的角度去考查。

离散信号有时也需要讨论能量,序列 $f(n)$ 的能量定义为

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 \quad (1.18)$$

1.3 信号的基本运算

在系统分析中,常遇到信号(连续的或离散的)的某些基本运算——加、乘、平移、反转和尺度变换等。

1. 加法和乘法

信号 $f_1(\cdot)$ 与 $f_2(\cdot)$ 之和(瞬时和)是指同一瞬时两信号之值对应相加所构成的“和信号”即

$$f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_2(\cdot) \quad (1.19)$$

信号 $f_1(\cdot)$ 与 $f_2(\cdot)$ 之积是指同一瞬时两信号之值对应相乘所构成的“积信号”,即

$$f(\cdot) = f_1(\cdot) \cdot f_2(\cdot) \quad (1.20)$$

例 1.1 已知序列

$$f_1(n) = \begin{cases} 2^n, & n < 0 \\ n+1, & n \geq 0 \end{cases}; \quad f_2(n) = \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 2^{-n}, & n \geq -2 \end{cases}$$

求 $f_1(n)$ 与 $f_2(n)$ 之和, $f_1(n)$ 与 $f_2(n)$ 之积。

解 $f_1(n)$ 与 $f_2(n)$ 之和为

$$f_1(n) + f_2(n) = \begin{cases} 2^n, & n < -2 \\ 2^n + 2^{-n}, & n = -2, -1 \\ n+1 + 2^{-n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

$f_1(n)$ 与 $f_2(n)$ 之积为

$$f_1(n) \cdot f_2(n) = \begin{cases} 2^n \cdot 0 \\ 2^n \cdot 2^{-n} \\ (n+1) \cdot 2^{-n} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n < -2 \\ 1, & n = -2, -1 \\ (n+1)2^{-n}, & n \geq 0 \end{cases}$$

2. 反转和平移

将信号 $f(t)$ 或 $f(n)$ 中的自变量 t (或 n) 换为 $-t$ (或 $-n$), 其几何含义是将信号 $f(\cdot)$ 以纵坐标为轴反转(或称反折), 如图 1.7 所示。

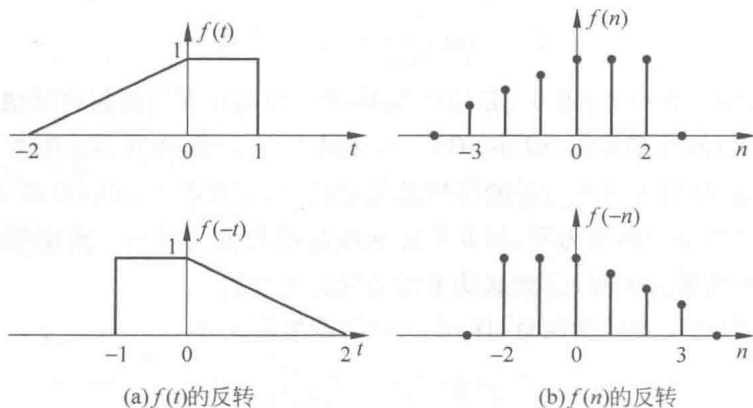


图 1.7 信号的反转