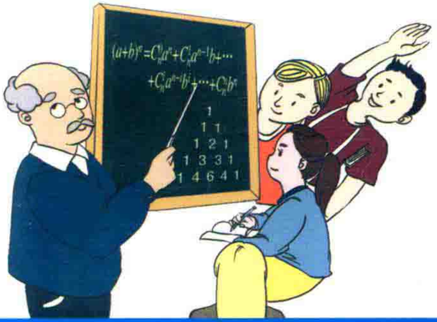


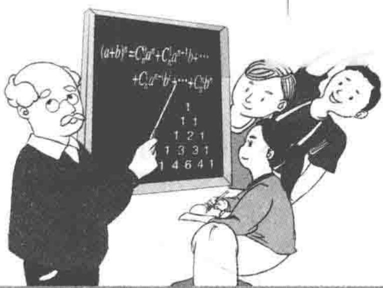

数林外传系列

跟大学名师学中学数学

# 函数与函数思想

◎朱华伟　程汉波　编著

中国科学技术大学出版社




数林外传系列
跟大学名师学中学数学

# 函数与函数思想

◎ 朱华伟　程汉波　编著



中国科学技术大学出版社

## 内 容 简 介

本书分为3篇.第1篇介绍映射与函数的概念,基本初等函数与初等函数概念,函数的性质,函数定义域、解析式、值域和最值的求法,函数图像变换与作法,力求宏观与细节并重,介绍中学阶段的函数知识和方法.第2篇介绍函数思想及其在中学数学解题中的应用,如构造函数、变量代换、数形结合、映射法、不等式控制和母函数,深入地探讨函数思想在解题中的具体实践,注重思维能力的培养.第3篇按本书前述章节的脉络收集了近些年来自主招生考试中的函数试题,并给出了几篇发表于中学期刊上与自主招生考试中的函数问题相关的小论文,旨在方便读者备考或给读者些许启发.

本书注重基础,培养能力,旨在深入浅出地介绍函数与函数思想,提高解题能力,适合高中生、中学教师和数学爱好者参考使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

函数与函数思想/朱华伟,程汉波编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2016.6
(数林外传系列:跟大学名师学中学数学)
ISBN 978-7-312-03873-0

Ⅰ.函… Ⅱ.①朱…②程… Ⅲ.函数—青少年读物 Ⅳ.O174-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第057837号

**出版** 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
**印刷** 安徽省瑞隆印务有限公司
**发行** 中国科学技术大学出版社
**经销** 全国新华书店
**开本** 880 mm×1230 mm 1/32
**印张** 15.5
**字数** 374千
**版次** 2016年6月第1版
**印次** 2016年6月第1次印刷
**定价** 35.00元

# 序

在函数概念三百多年来的发展史上，经历了“几何观念下的函数”、“代数观念下的函数”、“对应关系下的函数”到“几何论下的函数”的演变历程. 其中，分别以伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨、约翰·伯努利、欧拉、柯西、傅里叶、狄利克雷、康托尔、维布伦、豪斯道夫、库拉托夫斯基等为代表的数学家的工作功不可没.

20 世纪初，在英国数学家贝利和德国数学家克莱因等人的大力倡导和支持下，函数被纳入了中学数学的学习范畴. 克莱因还提出了一个重要的思想：以函数概念和函数思想统一数学教育的内容. 他认为，“函数概念，应该成为数学教育的灵魂. 以函数概念为中心，将全部数学教材集中在它周围，进行充分的综合”.

函数是刻画客观事物变化的重要数学模型. 初等函数是中学代数的核心内容，也是学习高等数学的必要基础. 早在 20 世纪中期，我国中学代数就有“以函数为纲”的提法. 1978 年以来，我国中学课本函数部分的内容大幅度更新，就连微积分初步知识也“下放”至高中，函数内容成为体现数学教材改革精神的重点课题之一.

我国中学阶段函数思想贯穿于整个数学课程之中，其形成与发展大致可划分为以下四个阶段：

第一阶段是正式提出函数概念之前的感性认识阶段，以积累关于“集合”、“对应”、“变量”等概念的素材为特征，有意识地渗透函数

思想.例如,通过代数式的概念与恒等变形等内容,可以很好地给学生一些变量间的依存性以及变量的变化范围的初步认识.

第二阶段是对“函数及其图像”一章的学习.用变量的观点初步了解函数概念,掌握正、反比例函数,一次函数和二次函数的性质和图像.

第三阶段是通过学习集合、对应等概念,利用集合间元素的对应关系加深对函数的理解,掌握指数函数、对数函数、幂函数、三角函数的概念、图像和性质.

第四阶段是利用“极限”工具对函数的性质进行较深入的研究.这一阶段不应只局限于单纯地会求导数、求积分,更重要的是利用微积分的工具去研究函数及初等数学中不能解决的问题.

因而,函数与函数思想在中学数学课程与教学中占有举足轻重的地位,函数思想是中学数学的主导思想之一,具有广泛的运用,加强函数的教学及函数思想的渗透,使学生树立函数思想,具有重大的意义.

鉴于此,笔者于1994年在河南教育出版社《中学数学专题丛书》中出版了《函数·思想·方法》一书,只可惜此书早已绝迹.20余年过去,《函数·思想·方法》一书有幸被中国科学技术大学出版社看中并重版,笔者甚为感激与欣慰.鉴于近20年来数学教育的普及和迅猛发展,笔者对该书进行了认真的修订,以适应当前的数学教育.

本书分为3篇:第1篇介绍函数的基本知识,如函数的概念、性质与图像等,旨在从整体上完整地介绍中学阶段的函数知识,该部分知识与例题较为基础,修订中加入了一些拔高问题.第2篇介绍函数思想及其在中学数学解题中的应用,如构造函数、变量代换、数形结合、映射法、不等式控制和母函数,深入地探讨函数思想在解题中的

具体实践,因而不少问题有较高难度,旨在帮助学生拓展知识视野,提高思维能力.第3篇按本书前述章节的脉络收集了近些年来自主招生考试中的函数试题,并给出了几篇发表于中学期刊上与自主招生考试中的函数问题相关的小论文,旨在方便读者备考或给读者些许启发.

由于编者水平有限,书中难免会有疏漏或错误之处,诚挚欢迎读者批评与指正.

# 中国科学技术大学出版社中学数学用书

高中数学竞赛教程/严镇军　单墫　苏淳　等
中外数学竞赛/李炯生　王新茂　等
第51—76届莫斯科数学奥林匹克/苏淳　申强
中学数学潜能开发/蒋文彬
高考数学高频考点与题型分类解析/胡全勇

学数学.第1卷/李潜
学数学.第2卷/李潜
学数学.第3卷/李潜
学数学.第4卷/李潜

研究特例/冯跃峰
考察极端/冯跃峰
更换角度/冯跃峰
改造命题/冯跃峰
逐步逼近/冯跃峰
巧妙分解/冯跃峰
充分条件/冯跃峰
引入参数/冯跃峰
图表转换/冯跃峰
建立对应/冯跃峰
借桥过河/冯跃峰
递归求解/冯跃峰

# 目　次

## 第3篇 自主招生考试中的函数问题

# 第 1 篇

# 函 数

# 第 1 章　映射与函数

## 1.1　映射

先看两个集合 $A$,$B$ 的元素之间的一些对应关系的例子(图 1.1).为简单起见,这里的集合 $A$,$B$ 都是有限集.

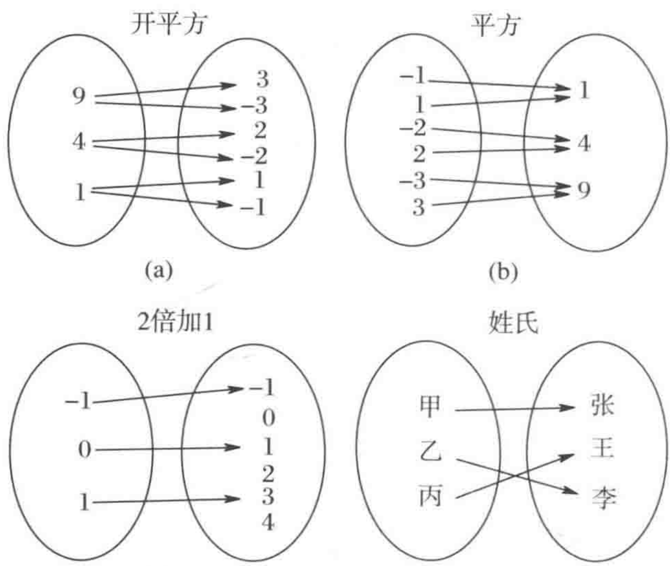



**图 1.1**

在图 1.1(a)中,对应法则是“开平方”,即对于集合 $A$ 中每一个

元素 $x$(如 $x=9$),集合 $B$ 中有两个平方根 $\pm\sqrt{x}$(即 $\pm 3$)和它对应;在图 1.1(b)中,对应法则是"平方",即对于集合 $A$ 中的每两个非零整数 $\pm m$(如 2 与 $-2$),集合 $B$ 中有一个平方数 $m^2$(即 4)和它们对应;在图 1.1(c)中,对应法则是"2 倍加 1",即对于 $A$ 中每一个元素 $x$(如 1),集合 $B$ 中有一个 $2x+1$(即 3)与它对应;在图 1.1(d)中,对应法则是"姓氏",即对于集合 $A$ 中每一个人(如甲),集合 $B$ 中有一个姓(即张)与它对应.

图 1.1 中的(b)、(c)与(d)这三个对应都有这样的特点:对于第一个集合(即 $A$)中的任何一个元素,第二个集合(即 $B$)中都有唯一的元素和它对应.

**定义 1**　设集合 $A$、$B$ 是两个非空集合,如果存在一个对应法则 $f$,使得对于集合 $A$ 中任一元素 $x$,按照对应法则 $f$,在集合 $B$ 中都有唯一元素 $y$ 与之对应,记作

$$f: A \to B,$$
$$x \mapsto y.$$

那么称 $f$ 是从集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射.元素 $y$ 称为元素 $x$ 的像,记作 $y=f(x)$.对于任一元素 $y\in B$,一切适合 $y=f(x)$ 的 $x$ 的全体称为 $y$ 的原像,记作 $f^{-1}(y)$,即 $f^{-1}(y)=\{x \mid y=f(x), x\in A\}$,集合 $A$ 称为映射的定义域,记作 $D(f)$,$A$ 中的所有 $x$ 的像所组成的集合称为映射 $f$ 的值域,记作 $f(A)$ 或 $z(f)$.

**例 1.1.1**　每一个三角形都有它的面积.设 $T$ 是所有三角形的集合,那么,对 $T$ 中的任何一个元素 $t$(它是三角形),通过"求面积",在 $\mathbf{R}$ 中必有唯一的实数 $x$ 和它对应(即 $x=t$ 的面积 $=S(t)$).把"求面积"用 $f$ 表示,即得到一个映射

$$f: T \to \mathbf{R},$$
$$t \mapsto x = f(t) = S(t).$$

其中,$f$ 的定义域为 $T=\{$所有三角形$\}$,值域为 $f(T)=(0,+\infty)$.

**例 1.1.2**　设 $X$ 是所有三角形的集合,$Y$ 是所有圆的集合,映射 $\varphi$ 是

$$\varphi: X \to Y,$$
$$x \mapsto X \text{ 的内切圆}.$$

这表示,映射 $\varphi$ 把每一个三角形映射成它的内切圆.它的定义域为 $D(\varphi)=X$,值域为 $f(X)=Y$.

**例 1.1.3**　$A=(-\infty,+\infty)$,$B=[0,+\infty)$.映射

$$f: A \to B,$$
$$x \mapsto f(x) = x^2.$$

取 $y=1\in B$,则 $y$ 的原像 $f^{-1}(y)=f^{-1}(1)=\{-1,1\}$.

**例 1.1.4**　在例 1.1.1 中,设 $x=5$,则 $x$ 的原像 $f^{-1}(x)=f^{-1}(5)=\{$面积为 5 的所有三角形$\}$.

由例 1.1.3 与例 1.1.4 可知,一个元素的原像应视为原像集.还应注意到,映射

$$f: A \to B,$$
$$x \mapsto y = f(x).$$

的值域 $f(A)$不一定等于$B$,而是 $B$ 的子集,即 $f(A)\subseteq B$,如图 1.1(c)所示,值域 $f(A)=\{-1,1,3\}\neq B=\{-1,0,1,2,3,4\}$,而是 $B$ 的子集.

映射有如下几种情况:

**1. 单射**

**定义 2**　设有映射 $f: A\to B$,如果对任意的 $x_1, x_2\in A$,且 $x_1\neq$

$x_2$,有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 $f$ 为单射,如图 1.2 所示.

**2. 满射**

**定义 3**　设有映射 $f: A \to B$,如果 $f(A) = B$,即 $B$ 中的任何一个元素都可以在 $A$ 中找到某个元素与之对应,则称 $f$ 为满射,如图 1.3 所示.

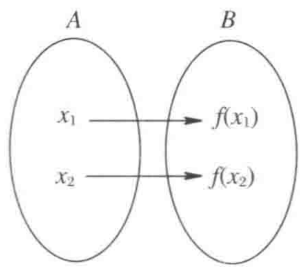



图 1.2

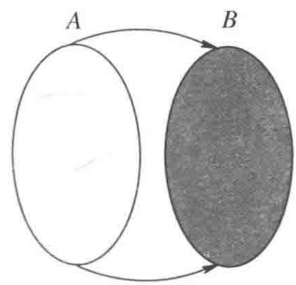



图 1.3

**3. 双射**

**定义 4**　如果 $f$ 既是单射又是满射,则称 $f$ 为双射.

例如图 1.1 中,映射(b)是满射,不是单射,当然不是双射;映射(c)是单射,不是满射,因此不是双射;映射(d)既是单射又是满射,因而是双射.

**例 1.1.5**　映射

$$f: A \to A,$$

$$x \mapsto x.$$

这个映射把 $A$ 中任何一个元素 $x$ 与自身对应起来,我们称这个映射是恒等映射.它显然是 $A$ 到 $A$ 上的双射.

**例 1.1.6**　$A = \{a, b, c\}$,$B = \{x, y\}$,$f: A \to B$ 定义为 $f(a) = x$,$f(b) = x$,$f(c) = y$,则 $f$ 是满射,但不是单射,因为 $a$,$b$ 两点映射到同一点 $x$,因此,$f$ 也不是双射.

**定义 5** 设 $f:A\to B$ 是双射,则称

$$f^{-1}:B\to A,$$
$$y\mapsto x$$

为 $f$ 的逆映射.其中 $y$ 与 $x$ 满足 $y=f(x)$.

例如,$A=\{a,b,c\}$,$B=\{x,y,z\}$.映射 $f:A\to B$ 定义为 $f(a)=x,f(b)=y,f(c)=z$,则 $f$ 是双射.

于是,$f^{-1}:B\to A$ 为 $f$ 的逆映射.定义为 $f^{-1}(x)=a,f^{-1}(y)=b,f^{-1}(z)=c$.

## 1.2 函数

### 1.2.1 函数的概念

1673 年,德国数学家莱布尼茨首先使用变量的幂,成为首次使用“函数”一词的数学家.

1718 年,瑞士数学家约翰·伯努利定义:凡是变量和常量构成的式子都叫作函数.

1755 年,欧拉则认为函数是变量与变量之间的某种依赖关系.

1821 年,法国数学家柯西从定义变量出发给出了如下定义:在某些变数间存在着一定的关系,当一经给定其中某一变数的值,其他变数的值可随之确定,则将最初的变数叫作自变量,其他各变数叫作函数.

1837 年,德国数学家狄利克雷定义:如果对于 $x$ 的每一个值,$y$ 总有一个完全确定的值与之对应,则 $y$ 是 $x$ 的函数.

函数这个概念,也像其他数学概念一样,随着数学的发展而不断