21世纪高等学校数学系列教材

（第二版）

实变函数论

侯友良　王茂发　编著

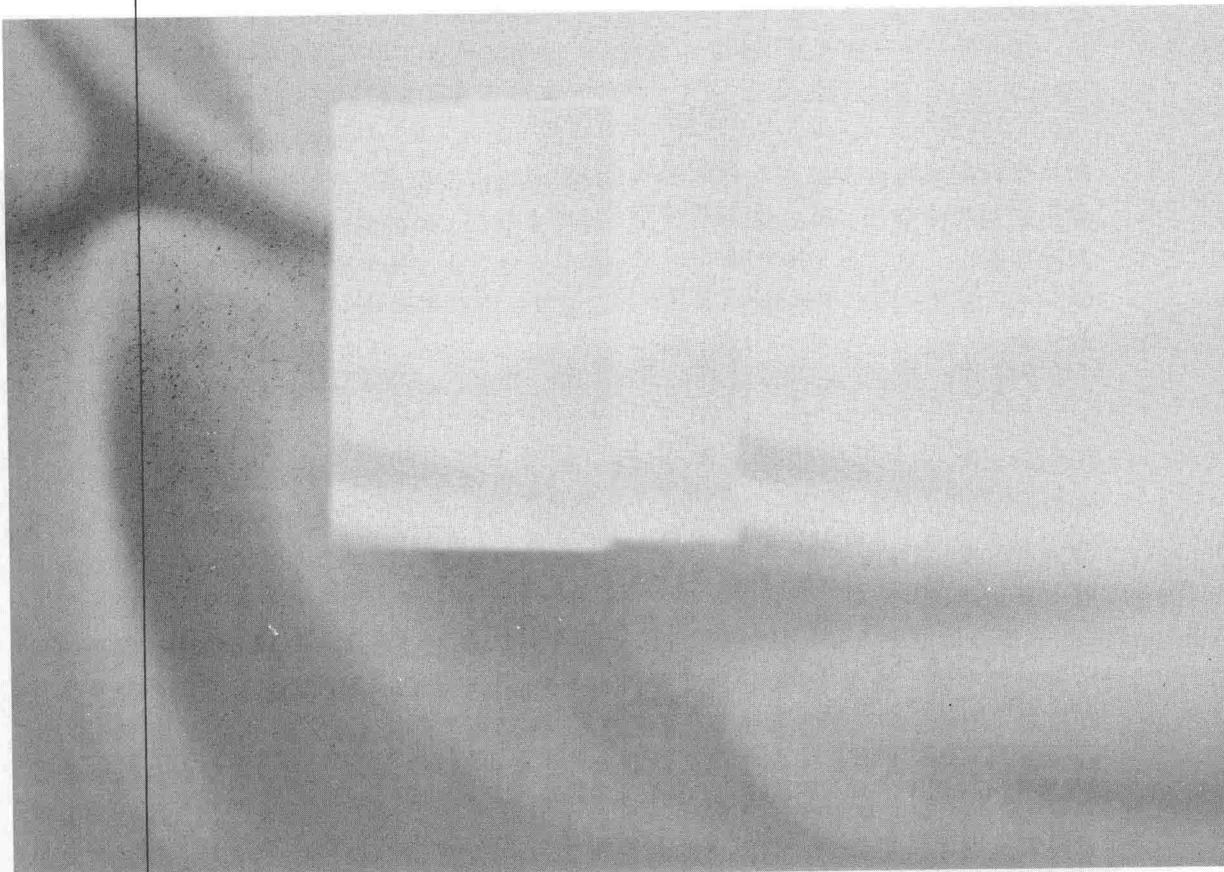
WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

21世纪高等学校数学系列教材

（第二版）

实变函数论

■ 侯友良　王茂发　编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/侯友良,王茂发编著.—2版.—武汉:武汉大学出版社,2017.6

21世纪高等学校数学系列教材

ISBN 978-7-307-16751-3

Ⅰ.实… Ⅱ.①侯… ②王… Ⅲ.实变函数论—高等学校—教材 Ⅳ.O174.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第067169号

责任编辑:胡　艳　　责任校对:李孟潇　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北金海印务有限公司

开本:787×1092　1/16　印张:13.25　字数:306千字　插页:1

版次:2008年9月第1版　2017年6月第2版

2017年6月第2版第1次印刷

ISBN 978-7-307-16751-3　定价:28.00元

前　言

实变函数论的中心内容是 Lebesgue 测度与积分理论. 在数学分析课程中，我们已经熟悉 Riemann 积分. Riemann 积分在处理连续函数和几何、物理中的计算问题时是很成功和有效的. 但 Riemann 积分理论也有一些理论上的缺陷. 主要表现在对被积函数的连续性要求过高，积分与极限两种运算交换顺序以及累次积分交换顺序不便，可积函数空间不是完备的，等等. 随着数学理论的不断发展和深入，这些缺陷显得愈发严重，阻碍了分析学的进一步发展，因此有必要加以改进，或者用一种新的积分代替之. 从 19 世纪后期开始，不少数学家，包括 Jordan，Borel 等为此作出了努力，取得了部分成功. 20 世纪初，法国数学家 Lebesgue 成功地建立了测度理论，并且在测度论的基础上，建立了一种新的积分，称为 Lebesgue 积分. Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广与发展. 与 Riemann 积分比较，Lebesgue 积分在理论上更完善、更深刻，在计算上更灵活，从根本上克服了上面提到的 Riemann 积分的一些缺陷. Lebesgue 积分的创立，为近代分析奠定了基石，对 20 世纪数学的发展产生了极大的影响. 许多数学分支，如泛函分析、概率论、调和分析等，都是在 Lebesgue 测度与积分理论的基础上产生或发展起来的. 如今，Lebesgue 测度与积分理论已经成为现代分析必不可少的理论基础.

现代数学的许多分支如概率论、泛函分析、群上调和分析等越来越多地用到抽象测度论. 对数学学科各专业的学生而言，掌握抽象测度论的基础知识，已经变得越来越重要. 因此，本书除重点介绍 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度与积分理论外，也简要介绍抽象测度的基础知识，这二者大体是平行的和相似的. 在学习了 $\mathbf{R}^n$ 上的测度与积分理论后，一般空间上相应的概念和定理是很容易理解的. 这些内容包含在本书第二章 2.4 节、第三章 3.4 节、第四章 4.7 节和第七章中. 这部分内容作为有兴趣的读者进一步学习时参考，初学者可以跳过这部分内容，而不会影响其他部分内容的学习.

“实变函数论”这门课程一直是学生感到比较难学的课程之一. 为了减轻读者的学习困难，本书在编写上作了一些努力. 在本书的引言部分，对 Riemann 积分理论的局限性和建立新积分理论的必要性、Lebesgue 积分的主要思想，以及“实变函数论”这门课程的主要内容作了简要介绍，这对学习本课程是有益的. 本书在内容选取上，侧重实变函数论的基础和核心的部分，难易适中. 在结构安排上，注意理论展开的系统性和条理性，并且将基础的部分和较难的部分适当分开，便于在教学上酌情取舍，也便于初学者在学习上循序渐进. 在文字叙述上，力求严谨简明、清晰易读. 对重要的概念和定理作了较多的背景和思路的说明，对定理的证明较为详细，能够简化的证明尽量简化. 在一些基础和重要的章节，给出了较多的例子. 本书使用了 σ-代数的概念和 σ-代数的证明方法. 这样做的好处是，一方面，可以使得某些概念叙述得更简洁更清晰，可以简化某些定理的证

明；另一方面，也便于与抽象测度论相衔接. 本书中除了关于抽象测度论部分的内容外，还有部分内容也不是初学者必须掌握的，这部分内容一般都打上了 * 号，放在每节的末尾.

本书配备了较多的习题. 这些习题分为 A、B 两类. A 类习题中大部分是比较基础的，读者应该努力完成其中的大部分. B 类习题中有一些较难，有一些涉及非基础部分的知识，有余力的读者可以做做这部分习题. 本书对大部分习题给出了提示或解答要点，供读者参考.

实变函数论是现代分析数学必不可少的理论基础，因此这门课程是数学各专业的必修课. 学好这门课程对于数学各专业的学生十分重要. 在实变函数论中，充满了许多新的思想、新的方法和深邃的结论. 这一方面增加了这门课程的魅力；另一方面又使得初学者难以适应，对于概念和定理的理解，对于一些习题的完成，都感到有些困难. 但只要付出了努力，就能学好这门课程，并且获益良多，为今后进一步的学习打下坚实的基础.

这次再版该书，在 2008 年第一版基础上，除了在内容和文字上作了部分修改外，对习题和书末的习题的简答与提示作了较多的修改.

本书在编写过程中，参考了国内外一些同类教材，其中有些列入了参考文献中. 在此，对这些文献的作者表示感谢. 书中不足之处，请广大读者不吝指正.

作　者

2017 年 3 月

目　录

引　　言

在开始学习实变函数论的内容之前，我们先要对 Riemann 积分理论的局限性和建立新的积分理论的必要性有所认识，大致了解一下新积分的主要思想，以及实变函数论这门课程的主要内容. 这对学习这门课程是有益的.

1. Riemann 积分理论的局限性

在数学分析课程中我们已经熟悉 Riemann 积分. Riemann 积分在处理连续函数和几何、物理中的计算问题时是很成功的和有效的. 但 Riemann 积分也有一些理论上的缺陷. 下面在几个主要方面作一简要分析.

(1) 可积函数对连续性的要求

设 $f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的有界实值函数. 又设

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

是区间$[a,b]$的一个分划. 对每个 $i=1,2,\cdots,n$，令

$$m_i=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\},$$
$$M_i=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}.$$

并且令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$. 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积的充要条件是

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=0. \tag{1}$$

其几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 的下方图形(曲边梯形)的外接阶梯形与内接阶梯形的面积之差趋于零,如图 1 所示. 由于在包含 $f(x)$ 的间断点的区间$[x_{i-1},x_i]$上，当$\lambda\to 0$时函数的振幅 M_i-m_i 不趋于零，为使得式(1) 成立，包含间断点的那些小区间$[x_{i-1},x_i]$的总长必须可以任意小. 因此为保证 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，$f(x)$ 必须有较好的连续性. 简单地说，就是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的间断点不能太多. 这样就使得很多连续性不好的函数不可积了. 单从这一点看，这已经是 Riemann 积分的不够完美之处. 而且由于 Riemann 积分的可积函数类过于狭小，这导致了下面要说的 Riemann 积分的进一步的缺陷.

(2) 积分与极限运算顺序的交换

在数学分析中，经常会遇到积分运算与极限运算交换顺序的问题. 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的可积函数列，并且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(x\in[a,b])$. 一般情况下，$f(x)$未必在$[a,b]$上可积. 即使 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，也未必成立下面的等式：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

为使 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积并且式(2) 成立，一个充分条件是每个 f_n 在$[a,b]$上连续，并

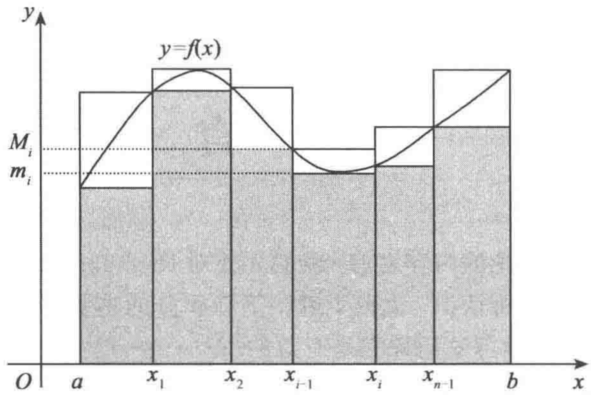


图 1

且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$(这不是必要条件，例如考虑区间$[0,1]$上的函数列$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)$). 这个条件太强并且不易验证. 另外，在累次积分交换积分顺序方面也有类似的情况.

(3) 可积函数空间的完备性

我们知道实数集$\mathbf{R}^1$有一个很重要的性质，就是每个 Cauchy 数列都是收敛的，这个性质称为实数集的完备性. 这个性质在数学分析中具有基本的重要性. 空间的完备性也可以引入到更一般的距离空间中来. 设$R[a,b]$是区间$[a,b]$上 Riemann 可积函数的全体. 在$R[a,b]$上定义距离

$$d(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \quad (f,g\in R[a,b]).$$

称$R[a,b]$为一个距离空间. 与在$\mathbf{R}^1$上一样，在距离空间上可以讨论一些与距离有关的内容，如极限理论. 设$\{f_n\}$是$R[a,b]$中的序列，$f\in R[a,b]$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}d(f_n,f)=0$，则称$\{f_n\}$按距离收敛于$f$. $R[a,b]$中序列$\{f_n\}$称为 Cauchy 序列，若对任意$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得当$m,n>N$时，$d(f_m,f_n)<\varepsilon$. 有例子表明，在$R[a,b]$中并非每个 Cauchy 序列都是收敛的，即$R[a,b]$不是完备的. 因此$R[a,b]$不是作为研究分析理论的理想空间.

以上几点表明，Riemann 积分理论存在一些不足之处. 随着数学理论的不断发展和深入，这些不足之处甚至成了致命的缺陷. 因此有必要加以改进，或用一种新的积分代替之. 许多数学家为此作出了努力. 20 世纪初，法国数学家 H.L. Lebesgue(1875—1941)成功地建立了测度理论，并且在此基础上，建立了一种新的积分，称之为 Lebesgue 积分. Lebesgue 积分消除了上述提到的 Riemann 积分的那些缺陷. Lebesgue 积分的创立，对 20 世纪数学的发展产生了极大的影响. 许多数学分支如泛函分析、概率论、调和分析等都是在 Lebesgue 积分理论的基础上产生或发展起来的. Lebesgue 测度与积分理论已经成为现代分析学必不可少的理论基础.

2. Lebesgue 积分思想的大体描述

设 $f(x)$ 是定义在区间$[a,b]$上的有界实值函数. 为简单计，这里只考虑 $f(x)\geqslant 0$ 的情形. 注意到此时 Riemann 积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 的下方图形

$$\underline{G}(f)=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

的面积. 除了可以用 Riemann 积分计算 $\underline{G}(f)$ 的面积外，我们还可以用下面的方式计算 $\underline{G}(f)$ 的面积. 设 m 和 M 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的下确界和上确界. 对 $f(x)$ 的值域区间$[m,M]$的任意一个分划

$$m=y_0<y_1<\cdots<y_n=M$$

和每个 $i=1,2,\cdots,n$，令

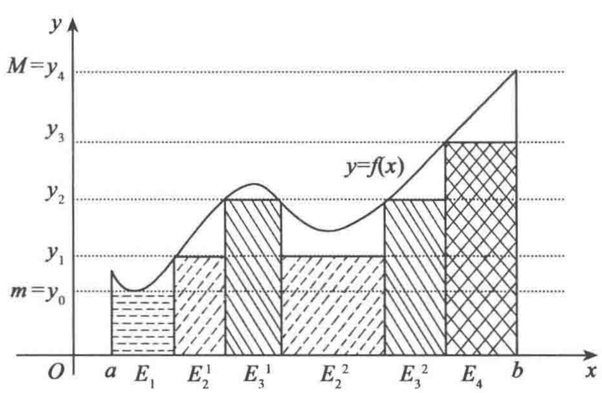
$$E_i=\{x\in[a,b]:y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}.$$

则每个 E_i 是区间$[a,b]$的子集. 用 $|E_i|$ 表示 E_i 的“长度”(注意这里我们并没有给出 $|E_i|$ 的确切涵义). 作和式

$$\sum_{i=1}^n y_{i-1}|E_i|.$$

这个和式相当于 $\underline{G}(f)$ 面积的一个近似值，如图 2 所示. 令

$$\lambda=\max\{y_i-y_{i-1}:1\leqslant i\leqslant n\}.$$



$E_2=E_2^1\cup E_2^2\quad E_3=E_3^1\cup E_3^2$

图 2

定义 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的 Lebesgue 积分为

$$(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n y_{i-1}|E_i|,\tag{3}$$

当然这里要求上述极限存在. 这样定义的积分$(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 同样是曲线 $y=f(x)$ 的下方图形 $\underline{G}(f)$ 的面积. 这样定义积分的好处在于，不管 $f(x)$ 的连续性如何，在每个 E_i 上 $f(x)$ 的振幅都小于或等于 λ，这使得很多连续性不好的函数(例如 Dirichlet 函

数）也可积了.

Lebesgue 本人打了一个很形象的比喻，说明两种不同的积分之间的区别. 假如我现在要数一笔钱，我可以有两种不同的方法. 第一种方法是一张一张地将各种面值不同的钞票的币值加起来，得到钱的总数. 第二种方法是先数出每种面值的钞票各有多少张，用每种钞票的面值乘以该种钞票的张数，再求和就得到钱的总数. Riemann积分的定义方式相当于第一种数钱的方法，而 Lebesgue 积分的定义方式相当于第二种数钱的方法.

但是，按照 Lebesgue 的方式定义积分有一个很大的困难，就是要给出 $|E_i|$ 的确切意义. $|E_i|$ 应该是一种类似区间长度的东西. 但是一般情况下 E_i 不是区间，而是直线上一些分散而杂乱无章的点构成的集. 因此必须对直线上比区间更一般的集，给出一种类似于区间长度的度量. 为此 Lebesgue 建立了测度理论. 测度理论对直线上相当广泛的一类集，给出一种类似于区间长度的度量. 这样，在式(3)中 $|E_i|$ 就可以用 E 的测度代替，从而在测度理论的基础上建立了 Lebesgue 积分理论.

事实表明，Lebesgue 积分远比 Riemann 积分更深刻、更强有力. Lebesgue 测度理论以及在此基础上建立的 Lebesgue 积分理论，极大地促进了分析数学的发展，成为现代分析学的基石.

3. 实变函数论的主要内容

实变函数论的主要内容是 Lebesgue 测度与积分理论. 如前所述，为定义 Lebesgue 积分，必须先建立测度理论. 由于测度理论要经常地遇到集合的运算和欧氏空间上的各种点集，因此第 1 章介绍集合论和欧氏空间上点集的知识. 然后在第 2 章介绍测度理论. 由于测度理论只能对直线上一部分集合即所谓“可测集”给出测度. 因此要定义 $f(x)$ 的 Lebesgue 积分，$f(x)$ 必须满足如下的条件：如上面提到的形如

$$E_i=\{x: y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$$

的集合都是可测集. 满足这样条件的函数称为可测函数. 只有对可测函数才能定义新的积分. 因此在第 3 章我们要讨论可测函数的性质. 作了这些准备后，第 4 章就可以定义 Lebesgue 积分了，并讨论 Lebesgue 积分的性质及其应用. 总之，实变函数论的内容就是围绕建立 Lebesgue 积分理论而展开的.

上面简单介绍了实变函数论的主要思想和大致内容. 在完成了本课程的学习后，将会对这里所述内容有更好的理解.

第 1 章　集合与 $\mathbf{R}^n$ 中的点集

集合论是德国数学家 Cantor(1845—1918)于 19 世纪后期所创立的，已经成为一门独立的数学分支. 集合论是现代数学的基础，其概念与方法已经广泛地渗透到现代数学的各个分支. 在实变函数论中经常出现各种各样的集合与集合的运算. 本章介绍今后要用到的集合论的一些基本知识，包括集合与集合的运算，可列集和基数等. 本章还要介绍具有某些运算封闭性的集类如代数和 σ-代数等，以及 $\mathbf{R}^n$ 中的一些常见的点集.

1.1　集合与集合的运算

1.1.1　集合的基本概念

集合是数学最基础的概念之一，不能用其他更基础的数学概念严格定义之，只能给予一种描述性的说明. 以某种方式给定的一些事物的全体称为一个集合(简称为集). 集中的成员称为这个集的元素.

一般用大写字母如 A,B,C 等表示集，用小写字母如 a,b,c 等表示集中的元素. 若 a 是集 A 的元素，则用记号 $a\in A$(读做 a 属于 A)表示. 若 a 不是集 A 的元素，则用记号 $a\notin A$(读做 a 不属于 A)表示.

不含任何元素的集称为空集，用符号 $\varnothing$ 表示. 本书约定分别用 $\mathbf{R}^1$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{Z}$ 表示实数集、有理数集、自然数集和整数集.

表示一个集的方法一般有两种. 第一种方法是列举法，即列出给定集的全部元素. 例如

$$A=\{0,1,2,3,4,5\},$$
$$B=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}.$$

另一种方法是描述法. 当集 A 是由具有某种性质 P 的元素的全体所构成时，用下面的方式表示集 A：

$$A=\{x : x \text{ 具有性质 P}\}.$$

例如

$$A=\{x\in\mathbf{R}^1 : x\sin x\geqslant 0\}.$$

设 A 和 B 是两个集. 如果 A 和 B 具有完全相同的元素，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 如果 A 的元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$(读做 A 包含于 B)，或 $B\supset A$(读做 B 包含 A). 若 $A\subset B$ 并且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集. 按照这个

定义，空集$\varnothing$是任何集的子集. 由定义知道 $A=B$ 当且仅当 $A\subset B$ 并且$B\subset A$.

例如：

$$\{x\in\mathbf{R}^1: x=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}=\{x\in\mathbf{R}^1: \sin x=0\},$$
$$\{x\in\mathbf{R}^1: x=2k\pi, k\in\mathbf{Z}\}\subset\{x\in\mathbf{R}^1: \sin x=0\}.$$

设 X 是一个给定的集. 由 X 的所有子集构成的集称为 X 的幂集，记为$\mathscr{P}(X)$.

例如，设 $X=\{a,b,c\}$是由 3 个元素构成的集，则

$$\mathscr{P}(X)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X\}.$$

一般地，若 X 是由 n 个元素构成的集，则 X 有 2^n 个不同的子集.

1.1.2 集合的运算

设 A 和 B 是两个集. 由 A 和 B 的所有元素构成的集称为 A 与 B 的并集，简称为并，记为 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ 或者 } x\in B\}.$$

由同时属于 A 和 B 的元素构成的集称为 A 与 B 的交集，简称为交，记为 $A\cap B$. 即

$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ 并且 } x\in B\}.$$

如图 1-1 所示. 若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 不相交. 此时称 $A\cup B$ 为 A 与 B 的不相交并.

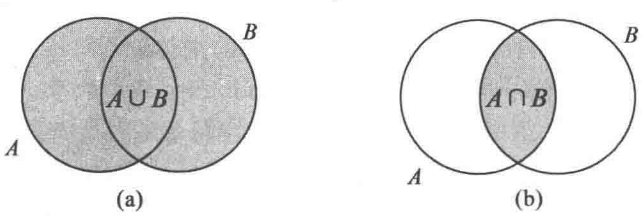


图 1-1

设 I 是一非空集(I 可以是有限集或无限集). 若对每个 $\alpha\in I$ 都对应一个集 A_α，则称$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$为集族，称 I 为指标集. 特别地，若指标集是自然数集 $\mathbf{N}$，则称$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$为集列，$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$一般简写为$\{A_n\}$.

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是一个集族. 这一族集的并集和交集分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x: \text{存在 } \alpha\in I\text{，使得 } x\in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x: \text{对每个 } \alpha\in I\text{，} x\in A_\alpha\}.$$

特别地，若$\{A_n\}$是一个集列，则$\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$ 和$\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$ 可以分别记成$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 和$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，分别称为$\{A_n\}$的可列并和可列交.

容易证明并与交运算具有如下性质：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
分配律可以推广到一族集的并与交的情形，即

$$A\cap\Big(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),$$

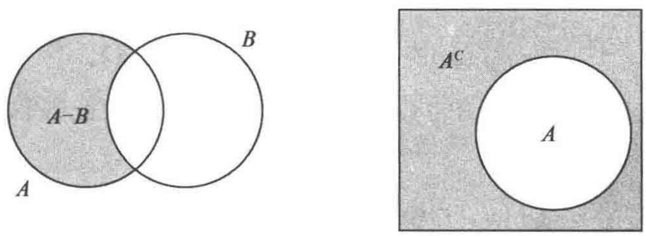
$$A\cup\Big(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\Big)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha).$$

设 A 和 B 是两个集. 由 A 中的那些不属于 B 的元素构成的集称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$ 或 $A\backslash B$. 即

$$A-B=\{x: x\in A \text{ 并且 } x\notin B\}.$$

此外，称集 $(A-B)\cup(B-A)$ 为 A 与 B 的对称差集，记为 $A\triangle B$. 对称差集 $A\triangle B$ 的大小反映了 A 与 B 差别的大小.

通常我们所讨论的集都是某一固定集 X 的子集，X 称为全集(或全空间). 称全集 X 与其子集 A 的差集 $X-A$ 为 A 的余集，记为 A^C. 如图 1-2 所示.



(a) (b)

图 1-2

关于差运算和余运算成立有以下性质：

(4) $A-B=A\cap B^C$.

(5) $(A^C)^C=A$.

(6) $A\cup A^C=X$，$A\cap A^C=\varnothing$.

(7) $X^C=\varnothing$，$\varnothing^C=X$.

(8) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

上述最后一个性质称为 De Morgan 公式. De Morgan 公式对一族集的并与交也成立. 这个公式今后要经常用到，我们将其叙述为如下的定理.

定理 1.1(De Morgan 公式) 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族集，则

(1) $\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^C=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C$ (并的余集等于余集的交)；

(2) $\Big(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^C=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^C$ (交的余集等于余集的并).

证 设 $x\in\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^C$，则 $x\notin\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$. 于是对任意 $\alpha\in I$，$x\notin A_\alpha$. 即对任意 $\alpha\in I$，$x\in A_\alpha^C$. 因此 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C$. 这表明

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^C\subset\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C.$$

上述推理可以反过来，即从 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C$ 可以推出 $x\in\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^C$. 这表明

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^C\subset\Big(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Big)^C.$$

因此结论(1)成立. 类似地可以证明结论(2). ■

定理 1.1 的证明过程是证明两个集相等的典型方法. 下面再举两个例子.

例 1 设$\{f_n\}$是 $\mathbf{R}^1$ 上的一列实值函数，满足

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots\quad(x\in\mathbf{R}^1),$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(x\in\mathbf{R}^1)$. 则对任意实数 a 有

$$\{x:f(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)>a\}.\tag{1.1}$$

证 对给定的 $x\in\mathbf{R}^1$，若 $x\in\{x:f(x)>a\}$，则 $f(x)>a$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，当 n_0 充分大时，$f_{n_0}(x)>a$. 因此 $x\in\{x:f_{n_0}(x)>a\}$. 这表明

$$\{x:f(x)>a\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)>a\}.$$

另一方面，对任意自然数 n，由于 $f(x)\geqslant f_n(x)(x\in\mathbf{R}^1)$，因此$\{x:f_n(x)>a\}\subset\{x:f(x)>a\}$. 从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f_n(x)>a\}\subset\{x:f(x)>a\}.$$

这就证明了式(1.1)成立.

在给出下面的例子之前，先解释一下多重可列并可列交的意义. 设对每个自然数 n 和 k 对应有一个集 $A_{n,k}$. 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_{n,k}$ 表示 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_{n,k}\Big)$. 换言之，若令$B_n=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_{n,k}$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n,k}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n,k}\Big)=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

对于更多重的可列并和可列交运算，可以作类似的理解.

例 2 设$\{f_n\}$是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的一列实值函数. 令 $A=\{x\in\mathbf{R}^n:\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0\}$. 则

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}^n:|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}.\tag{1.2}$$

证 对于给定的 $x\in\mathbf{R}^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ 的充要条件是，对任意正整数 $k\geqslant1$，存在正整数 $m\geqslant1$，使得对任意正整数 $n\geqslant m$ 有 $|f_n(x)|<\dfrac{1}{k}$，因此

$$\begin{aligned}x\in A&\Leftrightarrow\forall k\geqslant1,\ \exists m\geqslant1,\ \text{使得}\ \forall n\geqslant m,\ x\in\left\{x:|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}\\&\Leftrightarrow\forall k\geqslant1,\ \exists m\geqslant1,\ \text{使得}\ x\in\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x:|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}\\&\Leftrightarrow\forall k\geqslant1,\ x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x:|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ x: |f_n(x)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

因此式(1.2)成立.

在例 2 中，集 A 的表达式(1.2)看起来较复杂，但式(1.2)右端的集是通过比较简单的集$\left\{ x: |f_n(x)| < \frac{1}{k} \right\}$的运算得到的，以后我们会看到集的这种表示方法是很有用的.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集. 由有序 n 元组的全体所成的集

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n\}$$

称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的直积集(简称为直积)，记为 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

例如，平面 $\mathbf{R}^2$ 可以看做是 $\mathbf{R}^1$ 与 $\mathbf{R}^1$ 的直积，即 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1$. 而 $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ 是平面上以有理数为坐标的点所成的集，$\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ 中的点称为有理点. 又例如

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

就是平面上的矩形.

1.1.3 集列的极限

设$\{A_n\}$是一个集列. 称集

$$\{x: x \text{ 属于}\{A_n\}\text{中的无限多个}\}$$

为集列$\{A_n\}$的上极限，记为$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$. 称集

$$\{x: x \text{ 至多不属于}\{A_n\}\text{中的有限多个}\}$$

为集列$\{A_n\}$的下极限，记为 $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$.

显然，$\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n \subset \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$. 若 $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$，则称集列$\{A_n\}$存在极限，并且称集

$$A \xlongequal{\text{def}} \underline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \overline{\lim_{n \to \infty}} A_n$$

为集列$\{A_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

定理 1.2 设$\{A_n\}$是一个集列. 则

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \tag{1.3}$$

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \tag{1.4}$$

证 我们有

$$x \in \overline{\lim_{n \to \infty}} A_n \Leftrightarrow x \text{ 属于}\{A_n\}\text{中的无限多个}$$

$$\Leftrightarrow \text{对任意 } n \geqslant 1\text{，存在 } k \geqslant n\text{，使得 } x \in A_k$$

$$\Leftrightarrow \text{对任意 } n \geqslant 1, x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

因此式(1.3)成立. 类似地可以证明式(1.4). ■

设$\{A_n\}$是一个集列. 若对每个 $n \geqslant 1$，均有 $A_n \subset A_{n+1}$，则称$\{A_n\}$是单调递增的，记

为 $A_n\uparrow$. 若对每个 $n\geqslant 1$，均有 $A_n\supset A_{n+1}$，则称 $\{A_n\}$ 是单调递减的，记为 $A_n\downarrow$. 单调递增和单调递减的集列统称为单调集列.

定理 1.3 单调集列必存在极限. 并且：

(1) 若 $\{A_n\}$ 是单调递增的，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n;$$

(2) 若 $\{A_n\}$ 是单调递减的，则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

证 (1) 因为 $\{A_n\}$ 是单调递增的，因此对任意 $n\geqslant 1$，有

$$\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=A_n,\quad \bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

于是利用定理 1.2 得到

$$\varliminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

所以

$$\varliminf_{n\to\infty}A_n=\varlimsup_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 类似地可以证明结论(2). ■

例 3 设 $A_n=\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$，$B_n=\left[0,1+\dfrac{1}{n}\right]$. 则 $\{A_n\}$ 是单调递增的，$\{B_n\}$ 是单调递减的. 根据定理 1.3 得到

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1),\quad \lim_{n\to\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=(0,1].$$

例 4 设 $\{f_n\}$ 和 f 如例 1. 令 $A_n=\{x: f_n(x)>a\}(n\geqslant 1)$，则 $\{A_n\}$ 是单调递增的. 根据定理 1.3 并且利用式(1.1)，我们有

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x: f(x)>a\}.$$

1.2 映射 可列集与基数

1.2.1 映射

在学习数学分析时，我们对函数已经很熟悉. 在数学分析中函数的定义域通常是 $\mathbf{R}^n$ 的子集，值域是实数集或者复数集. 若将函数的定义域和值域换成一般的集，就得到映