

高等学校教材

电路原理

下册

重庆大学电工原理教研室编

江泽佳 主编

周守昌 彭扬烈 吴宁修订

高等学校教材

电 路 原 理

下 册

重庆大学电工原理教研室 编

江泽佳 主编

周守昌 彭扬烈 吴宁 修订



高等教育出版社

内 容 提 要

本书是在 1977 年版的基础上修订的。修订本在体系上作了较大的调整,对非线性电路、线性电路的时域分析和复频域分析、网络图论和网络方程、状态变量法等基本的和近代的内容有所扩充与加深,对某些传统内容作了压缩,对定义、定理和基本概念的阐述更加严谨,若干内容在讲法上也有所改进,文字通顺,注意联系实际和便于自学。

全书仍分上、下两册。上册包括电路的克希霍夫定律和电路元件、电路分析导论、时域分析、正弦稳态分析。下册包括频域分析、复频域分析、网络图论和网络方程、状态变量法、二端口网络、分布参数电路。

高等学校教材

电 路 原 理

下 册

重庆大学电工原理教研室编

江泽佳 主编

周守昌 彭扬烈 吴宁 修订

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

通县觅子店印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 20.5 字数 460,000

1979 年 10 月第 1 版 1985 年 10 月第 2 版 1985 年 10 月第 1 次印刷

印数 00,001—6,730

书号 15010·0683 定价 3.55 元

目 录

第五章 频域分析1	
§ 5-1 周期函数的傅里叶级数展开式.....1	
§ 5-2 线性电路对周期性激励的稳态响应.....5	
§ 5-3 非正弦周期电流和电压的有效值·平均功率.....9	
§ 5-4 傅里叶级数的指数形式.....12	
§ 5-5 周期信号的频谱.....14	
§ 5-6 傅里叶变换.....20	
§ 5-7 几种常用函数的傅里叶变换.....23	
习题.....29	
第六章 复频域分析33	
§ 6-1 拉普拉斯变换.....33	
§ 6-2 拉普拉斯变换的基本性质.....36	
§ 6-3 进行拉普拉斯反变换的留数法和部分分式展开法.....45	
§ 6-4 用拉普拉斯变换分析动态电路.....52	
§ 6-5 克希霍夫定律的复频域形式.....54	
§ 6-6 电路元件的复频域模型·复频域阻抗与复频域导纳.....55	
§ 6-7 再论用拉普拉斯变换分析动态电路.....60	
§ 6-8 网络函数.....66	
习题.....81	
第七章 网络图论和网络方程87	
§ 7-1 网络图论导论.....87	
§ 7-2 关联矩阵.....93	
§ 7-3 基本割集矩阵.....97	
§ 7-4 基本回路矩阵.....100	
§ 7-5 矩阵 A, B, Q 之间的关系.....102	
§ 7-6 支路电压、电流关系的矩阵形式.....105	
§ 7-7 节点分析法和改进的节点分析法.....111	
§ 7-8 割集分析法.....119	
§ 7-9 回路分析法和网孔分析法.....123	

* § 7-10 含有受控源的网络的分析.....129	
§ 7-11 对偶图和对偶网络.....136	
§ 7-12 特勒根定理.....143	
§ 7-13 互易定理.....145	
习题.....149	
第八章 状态变量分析159	
§ 8-1 网络的状态和状态变量.....159	
§ 8-2 状态方程和输出方程.....160	
§ 8-3 线性常态网络状态方程的建立.....164	
§ 8-4 线性非常态网络状态方程的建立.....167	
* § 8-5 用拓扑法建立线性网络状态方程的系统公式.....172	
§ 8-6 非线性网络的状态方程.....181	
§ 8-7 状态空间和状态轨迹.....184	
§ 8-8 状态方程的复频域解法.....188	
§ 8-9 状态方程的时域解法.....196	
§ 8-10 状态方程的数值解法.....208	
习题.....211	
第九章 二端口网络216	
§ 9-1 概述.....216	
§ 9-2 二端口网络的开路阻抗矩阵与短路导纳矩阵.....217	
§ 9-3 二端口网络的混合参数矩阵与传输参数矩阵.....223	
§ 9-4 二端口网络的等效模型.....231	
§ 9-5 二端口网络的联接.....233	
§ 9-6 有载二端口网络.....240	
§ 9-7 二端口元件.....244	
§ 9-8 RC 滤波网络.....253	
习题.....256	
第十章 分布参数电路263	
§ 10-1 均匀传输线及其微分方程.....263	
§ 10-2 均匀线方程的正弦稳态解.....266	
§ 10-3 行波及均匀线的传播特性.....270	

§ 10-4 均匀线的边界效应	276	§ 10-9 无损耗线在始端电压激励下的 波过程	299
§ 10-5 无损耗线·驻波	283	§ 10-10 波的反射与折射	302
* § 10-6 无畸变线	291	习题	313
* § 10-7 均匀线的集中参数等效电路	292	部分习题答案	316
§ 10-8 无损耗线方程的通解	295		

第五章 频 域 分 析

在电气工程、无线电工程和其它电子工程中,除了正弦激励和响应外,非正弦激励和响应也是经常遇到的。例如,我们说电力网内任何一处的电压一般是正弦电压,这只是一种近似的说法,实际上,从发电机产生的电压到电力网内任何一处的电压都不可能完全准确地按照正弦规律变化,而往往是接近正弦函数的非正弦周期函数。当电路中含有非线性元件时,即使是理想的正弦激励也将导致非正弦波形的响应。

在无线电工程和其它电子工程中,通过电路传送的信号,例如由语言、音乐、图象等转换过来的电信号,雷达、自动控制以及电子计算机中大量使用的脉冲信号等,都是非正弦信号(non-sinusoidal signal)。

代表周期性激励与响应的周期函数,可以利用傅里叶级数分解为一系列不同频率的简谐分量。根据叠加定理,线性电路对非正弦周期性激励的稳态响应,等于组成激励信号的各简谐分量分别作用于电路时所产生的响应相叠加的结果,而响应的每一简谐分量可利用适用于正弦稳态分析的相量法求得。

组成周期信号的各个不同频率的简谐分量,各有一定的幅值和初相。将它们的幅值和初相分别按照它们的频率依次排列起来,就构成了所谓的幅值频谱和相角频谱。这样的频谱,可以表明周期信号中各频率分量的分布状况,便于分析周期信号通过电路时所产生的物理过程以及信号通过电路后它的各频率分量的幅值和初相发生的变化。这对于研究如何正确地传送信号是很重要的。

对于非周期信号(non-Periodic signal),借助于傅里叶积分变换,也可作出幅值频谱和相角频谱。非周期信号的频谱与周期信号的频谱之间既有联系又有区别。

§ 5-1 周期函数的傅里叶级数展开式

设周期函数 $f(t)$ 的周期为 T , 即

$$f(t) = f(t+T)$$

且满足狄里赫利条件(Dirichlet condition):

- (1) 函数 $f(t)$ 在任一周期内绝对可积,即对于任意时刻 t_0 , 积分 $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt$ 存在;
- (2) 函数 $f(t)$ 在任一周期内具有有限个极大值和极小值;
- (3) 函数 $f(t)$ 在任一周期内具有有限个不连续点;

则函数 $f(t)$ 可以展开为傅里叶级数(Fourier series), 即

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (5-1-1)$$

式中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$; n 为正整数; $\frac{a_0}{2}$ 、 a_n 及 b_n 称为傅里叶系数, 可按下列公式求得:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \tag{5-1-2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_1 t dt \tag{5-1-3}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_1 t dt \tag{5-1-4}$$

为方便起见, 通常将以上三式中的积分区间取为 $[0, T]$ 或 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 。

将式(5-1-1)中频率相同的余弦项与正弦项合并, 且表示为余弦函数, 即

$$a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t = A_n \cos (n\omega_1 t + \theta_n)$$

参看图(5-1-1)所示相量图, 可以得出下列关系:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n &= -\operatorname{tg}^{-1} \frac{b_n}{a_n} \end{aligned} \right\} \tag{5-1-5}$$

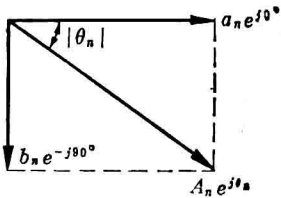


图 5-1-1 同频率的余弦项与正弦项的合成

于是, 函数 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式又可表示为

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos (n\omega_1 t + \theta_n) \tag{5-1-6}$$

式(5-1-6)中的常数项 $\frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2}$ 。由式(5-1-2)可以看出, 此常数项实际上就是函数 $f(t)$ 在一周期内的平均值, 称为 $f(t)$ 的恒定分量(直流分量)。简谐分量 $A_1 \cos (\omega_1 t + \theta_1)$ 与原周期函数 $f(t)$ 具有相同的频率 $\left(f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{T}\right)$, 称为 $f(t)$ 的基波(fundamental harmonic) 或一次谐波(first harmonic)。其余任意的一个简谐分量 $A_n \cos (n\omega_1 t + \theta_n)$ ($n > 1$), 其角频率 $n\omega_1$ 为基波角频率 ω_1 的 n 倍, 称为 $f(t)$ 的 n 次谐波(n th harmonic)。二次和二次以上的谐波可统称为高次谐波(higher order harmonic)。将周期函数分解为傅里叶级数的方法称为谐波分析(harmonic analysis)。

傅里叶级数是一个收敛的无穷三角级数。由于这个级数的收敛性, 周期函数中各谐波幅值随着谐波次数的增高而变化的总趋势是逐渐减小。因此, 在工程上, 利用傅里叶级数对周期函数作谐波分析时, 一般只需取为数不多的若干个谐波叠加起来, 就能在某种程度上近似地表达原有的周期函数。应予考虑的谐波数目的多寡, 视已知周期函数的傅里叶级数的收敛速度和具体要求而定。

一个周期函数包含哪些谐波以及这些谐波的幅值, 决定于周期函数的波形, 各谐波的初相不仅决定于周期函数的波形, 还与坐标系原点的位置有关。工程上常见的周期函数的波形, 往往具有某种对称特性。根据波形的对称性, 可以直观地判断哪些谐波应该存在, 哪些谐波不应该存在。这样就更便于对周期函数进行谐波分析。

下面分别讨论三种对称的周期函数的傅里叶级数展开式的特点。

(1) 奇函数(odd function)

奇函数 $f(t)$ 满足下列条件:

$$f(t) = -f(-t) \quad (5-1-7)$$

奇函数的波形对称于坐标系的原点。图 5-1-2 是一个奇函数的波形的例子。奇函数的傅里叶级数式为

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_1 t \quad (5-1-8)$$

即奇函数只能包含属于奇函数 ($\sin n\omega_1 t$) 类型的谐波分量。奇函数的谐波分量的系数为

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (5-1-9)$$

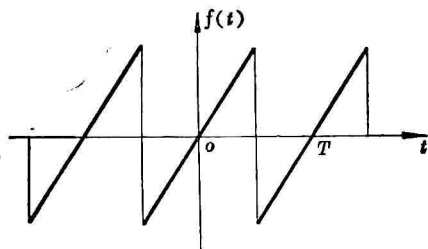


图 5-1-2 奇函数的波形示例

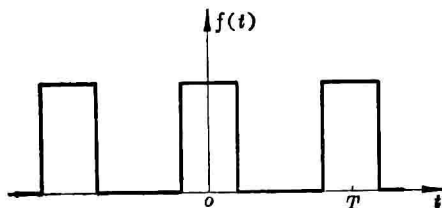


图 5-1-3 偶函数的波形示例

(2) 偶函数(even function)

偶函数 $f(t)$ 满足下列条件:

$$f(t) = f(-t) \quad (5-1-10)$$

偶函数的波形对称于坐标系的纵轴。图 5-1-3 是一个偶函数的波形的例子。偶函数的傅里叶级数式为

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t \quad (5-1-11)$$

即偶函数只能包含恒定分量和属于偶函数 ($\cos n\omega_1 t$) 类型的谐波分量。偶函数的谐波分量的系数为

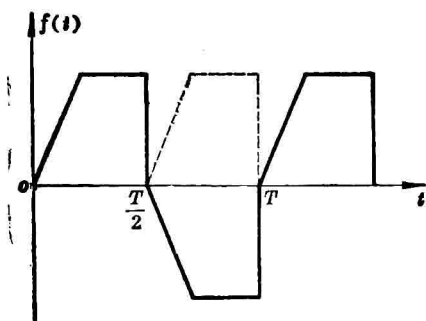
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt \quad (5-1-12)$$

(3) 奇谐波函数(odd harmonic function)

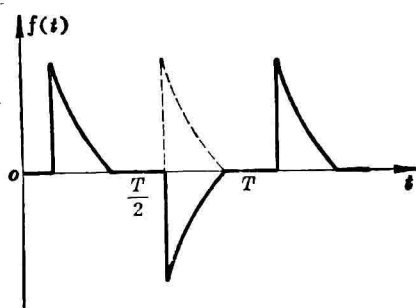
奇谐波函数 $f(t)$ 满足下列条件:

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (5-1-13)$$

即任何两个相差半周期的函数值大小相等, 符号相反。就一周期内的波形来看, 后半周是前半周改号(正号变成负号, 负号变成正号)后的重复; 或者说, 后半周对横轴的镜象是前半周的重复。因此, 可称为半波对称(half-wave symmetry)。图 5-1-4 是两个奇谐波函数的波形的例子, 图中



(a)



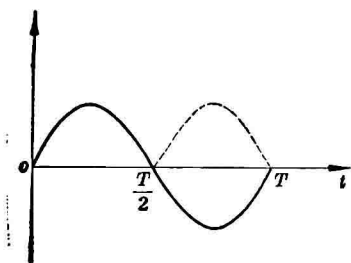
(b)

图 5-1-4 奇谐波函数的波形示例

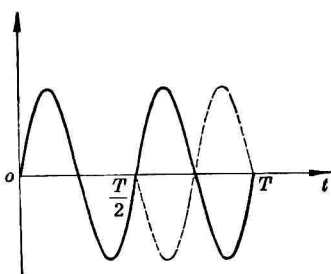
的虚线部分是后半周对横轴的镜象。

这种函数中所包含的谐波分量,当然也应该具有与这种函数相同的特性,即应满足式(5-1-13)所示条件。

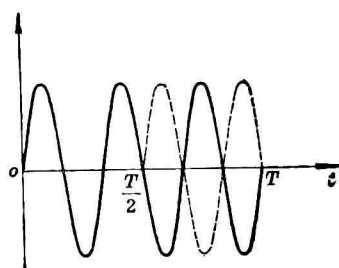
图 5-1-5 中画出了三个谐波的波形。显而易见,基波和三次谐波能满足上述条件,就是说,它们的后半周对横轴的镜象(图中的虚线部分)是它们的前半周的重复;二次谐波则不然。事实上,凡是奇次(1, 3, 5, 7, ...)谐波都具有上述特性,而偶次(2, 4, 6, ...)谐波及恒定分量则否。因此,满足式(5-1-13)所示条件的周期函数只含有奇次谐波,而不可能包含恒定分量及偶次谐波。这也就是奇谐波函数命名的根据。奇谐波函数的特性亦可称为奇次对称性。



(a) 基波



(b) 二次谐波



(c) 三次谐波

图 5-1-5 三个谐波的波形

奇谐波函数的傅里叶级数为

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

或

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n) \quad (n=1, 3, 5, \dots) \quad (5-1-14)$$

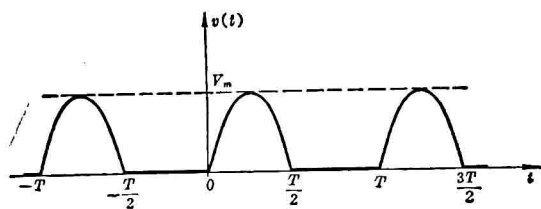
系数 a_n 和 b_n 可根据式(5-1-12)和式(5-1-9)求出,但须注意式中 n 只取奇数。

最后,尚须指出:一个周期函数是否具有半波对称性,仅决定于该函数的波形,但是,一个周期函数是否为奇函数或偶函数,则不仅与该函数的波形有关,也和时间起点的选择有关,例如,将

图5-1-5(a)、(b)和(c)各波形的起点分别右移 $\frac{T}{4}$ 、 $\frac{T}{8}$ 和 $\frac{T}{12}$ 以后,奇函数就变成了偶函数。

练习题

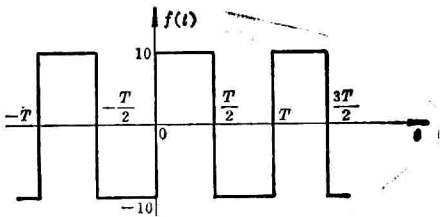
5-1-1 试求图题 5-1-1 所示半波整流电压波形的傅里叶级数。



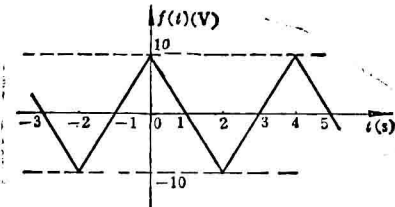
图题 5-1-1

5-1-2 试求图题 5-1-2 所示波形的傅里叶级数。

5-1-3 试求图题 5-1-3 所示波形的傅里叶级数。



图题 5-1-2



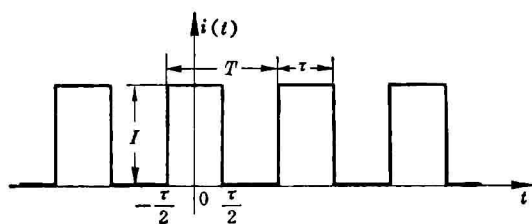
图题 5-1-3

§ 5-2 线性电路对周期性激励的稳态响应

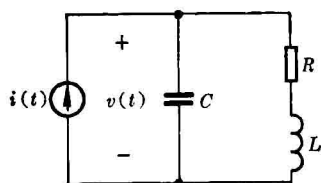
由于电气工程、无线电工程和其它电子工程中常见的周期函数一般都能满足狄里赫利条件,即都能展开为傅里叶级数,故作用于线性电路的非正弦周期性激励,均可分解为一系列不同频率的谐波分量之和。如果周期性激励源为电压源,则等效于一系列谐波电压源相串联;如果周期性激励源为电流源,则等效于一系列谐波电流源相并联。根据叠加定理,为了寻求线性电路对非正弦周期性激励的稳态响应,可令构成周期性激励的各谐波激励源逐一单独作用于电路,并应用分析正弦稳态电路的相量法,分别计算出相应的响应,再由频域变换到时域,然后将各谐波激励源所引起的时域响应叠加起来,就得到线性电路对非正弦周期性激励的稳态响应。下面举例说明计算法则和步骤。

例 5-2-1 图 5-2-1b 表示一个由线圈与电容器相并联的谐振电路的模型,电路的参数为 $R=20\Omega$, $L=1\text{mH}$, $C=1000\text{pF}$ 。设电路的输入激励是一个周期性矩形脉冲电流 $i(t)$ 如图 5-2-1a 所示,图中脉冲幅值 $I=\frac{\pi}{2}\text{mA}$,脉冲重复周期 $T=6.28\mu\text{s}$,脉冲持续时间 $\tau=\frac{T}{2}$,试求此并联谐振电路的端电压 $v(t)$ 。

解 (1) 对周期性激励电流进行谐波分析



(a) 周期性矩形脉冲电流激励



(b) 电路图

图 5-2-1 求并联谐振电路对周期性激励的响应

图 5-2-1a 所示矩形脉冲在一周期内的函数式为

$$i(t) = \begin{cases} I & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2} \text{ 及 } \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

因函数的波形具有偶函数对称性,故其傅里叶级数展开式中不含正弦函数项,即

$$b_n = 0$$

其余弦函数项的系数为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) \cos n\omega_1 t \, dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} I \cos n\omega_1 t \, dt \\ &= \frac{4I}{n\omega_1 T} \sin \frac{n\omega_1 \tau}{2} = \frac{2I}{n\pi} \sin \frac{n\omega_1 \tau}{2} \end{aligned} \quad (5-2-1)$$

或表示为

$$a_n = \frac{2I}{n\pi} \sin \left(\frac{\tau}{T} n\pi \right) \quad (5-2-2)$$

$i(t)$ 的直流分量为

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} i(t) \, dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{\tau}{2}} I \, dt = \frac{\tau}{T} I \quad (5-2-3)$$

将 $I = \frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$ 代入式(5-2-3)及式(5-2-2),得

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

从而

$$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0$$

$$a_1 = 1 \quad a_3 = -\frac{1}{3} \quad a_5 = \frac{1}{5} \quad a_7 = -\frac{1}{7} \cdots$$

故电流 $i(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$i(t) = \frac{\pi}{4} + \cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t$$

$$-\frac{1}{7}\cos 7\omega_1 t + \cdots \text{ mA} \quad (5-2-4)$$

(2) 计算电路对各次谐波的策动点阻抗

图 5-2-1b 所示电路在以电压 $v(t)$ 为响应时的网络函数是策动点阻抗函数

$$H(j\omega) = Z(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}(R + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + (R + j\omega L)} = \frac{R + j\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega CR} \quad (5-2-5)$$

式中角频率 $\omega = n\omega_1$ 。基波角频率 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6.28 \times 10^{-6}} = 10^6 \text{ rad/s}$, 则 $\omega = 10^6 n \text{ rad/s}$ 。再将电路参数 R, L, C 之值代入式(5-2-5), 可以得到策动点阻抗随谐波次数 n 而改变的函数式

$$\begin{aligned} Z(jn\omega_1) &= \frac{20 + j10^6 n \times 10^{-3}}{(1 - 10^{12} n^2 \times 10^{-3} \times 1000 \times 10^{-12}) + j10^6 n \times 1000 \times 10^{-12} \times 20} \\ &= \frac{20 + j10^3 n}{(1 - n^2) + j2 \times 10^{-2} n} \end{aligned} \quad (5-2-6)$$

分别令 n 等于 1, 3, 5, 7, 即可求得电路对各相应谐波的策动点阻抗

$$Z(j\omega_1) = \frac{20 + j1000}{j2 \times 10^{-2}} \approx \frac{j1000}{j2 \times 10^{-2}} = 50000 \Omega = 50 \text{ k}\Omega$$

$$Z(j3\omega_1) = \frac{20 + j3000}{(1 - 3^2) + j6 \times 10^{-2}} = \frac{3000e^{j89.82^\circ}}{8e^{j179.57^\circ}} = 0.375e^{-j89.95^\circ} \text{ k}\Omega$$

$$Z(j5\omega_1) = \frac{20 + j5000}{(1 - 5^2) + j10 \times 10^{-2}} = \frac{5000e^{j88.77^\circ}}{24e^{j179.78^\circ}} = 0.208e^{-j89.99^\circ} \text{ k}\Omega$$

$$Z(j7\omega_1) = \frac{20 + j7000}{(1 - 7^2) + j14 \times 10^{-2}} \approx \frac{j7000}{-48} = 0.146e^{-j90^\circ} \text{ k}\Omega$$

电路对直流分量的策动点电阻为

$$R = 20 \Omega = 0.02 \text{ k}\Omega$$

这是由于, 对直流分量来说, 电容相当于开路, 电感相当于短路。此外, 也可以由式(5-2-6)令 $n=0$ 求得。

(3) 求激励源的直流分量及各谐波分量单独作用时的电压响应

当直流分量单独作用时所产生的电压响应为

$$\frac{V_0}{2} = R \cdot \frac{I_0}{2} = R \cdot \frac{a_0}{2} = 0.02 \times \frac{\pi}{4} = 0.0157 \text{ V}$$

各谐波分量单独作用时的电压响应(相量)为

$$\dot{V}_1 = Z(j\omega_1) \dot{I}_1 = 50 \times 1e^{j0^\circ} = 50e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{V}_3 = Z(j3\omega_1) \dot{I}_3 = 0.375e^{-j89.95^\circ} \times \frac{1}{3}e^{j180^\circ} = 0.125e^{j90.05^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{V}_5 = Z(j5\omega_1) \dot{I}_5 = 0.208e^{-j89.99^\circ} \times \frac{1}{5}e^{j0^\circ} = 0.0416e^{-j89.99^\circ} \text{ V}$$

$$\dot{V}_7 = Z(j7\omega_1) \dot{I}_7 = 0.146e^{-j90^\circ} \times \frac{1}{7}e^{j180^\circ} = 0.0208e^{j90^\circ} \text{ V}$$

(4) 将响应的直流分量及各谐波分量相叠加, 求出电压响应

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{V_0}{2} + \operatorname{Re}[\dot{V}_1 e^{j\omega_1 t}] + \operatorname{Re}[\dot{V}_3 e^{j3\omega_1 t}] \\ &\quad + \operatorname{Re}[\dot{V}_5 e^{j5\omega_1 t}] + \operatorname{Re}[\dot{V}_7 e^{j7\omega_1 t}] + \dots \\ &= 0.0157 + 50 \cos \omega_1 t + 0.125 \cos(3\omega_1 t + 90.05^\circ) \\ &\quad + 0.0416 \cos(5\omega_1 t - 89.99^\circ) \\ &\quad + 0.0208 \cos(7\omega_1 t + 90^\circ) + \dots \text{ V} \end{aligned}$$

值得注意的是, 激励 $i(t)$ 的基波幅值为三次谐波幅值的 3 倍, 为七次谐波幅值的 7 倍, 而响应 $v(t)$ 的基波幅值则为三次谐波幅值的 400 倍, 为七次谐波幅值的 2400 倍。可见本例中谐振电路的作用是大大突出了基波分量, 同时抑制了其它频率的谐波分量, 使响应电压基本上是一个角频率等于基波角频率的正弦电压。这是由于并联谐振电路近似地谐振于基波频率 $[Z(j\omega_1)]$ 近似地为纯电阻性], 并联谐振阻抗等于 $50\text{k}\Omega$, 其值较电路对其余各谐波的阻抗之值大得多。电路的网络函数 (即策动点阻抗函数) 的幅频特性如图 5-2-2 所示。此图表明了电路对基波的策动点阻抗与对各高次谐波的策动点阻抗的差异。

综上所述, 计算线性电路对周期性激励的稳态响应的主要步骤如下: 首先利用傅里叶级数将时域中的激励函数展开为一系列不同频率的谐波分量 (这是由时域到频域的变换); 其次, 用相量法计算电路对各谐波激励源的响应相量 (这是频域中的计算); 最后, 写出响应的傅里叶级数式 (这是将频域计算结果变回时域进行叠加)。可以看出, 这种分析方法的基本思想是把时域问题变为频域问题来计算, 故可称为线性电路对周期性激励的稳态响应的频域分析法, 其理论基础就是线性电路所遵从的叠加定理。

用频域法分析线性电路对周期性激励的稳态响应时, 应注意以下几个原则:

(1) 当激励函数中的直流分量单独作用时, 电容相当于开路, 即电容支路中不存在电流的直流分量, 电感相当于短路, 即电感两端间不存在电压的直流分量。

(2) 当激励函数中的各谐波分量分别作用时, 由于感抗与谐波次数成正比 ($X_{L_n} = n\omega_1 L$), 容抗与谐波次数成反比 ($X_{C_n} = \frac{1}{n\omega_1 C}$), 因而电路对不同谐波所呈现的阻抗 (或导纳) 也必然不同。更一般地说, 由于网络函数是角频率的函数, 在计算响应的各谐波分量时, 必须利用相应频率下的网络函数。

(3) 令激励函数中的各次谐波分别作用时求得的频域响应, 必须变成时域响应才能进行叠加。也就是说, 只能用各次谐波的时域函数式进行加减, 而不可用它们的相量进行加减。

练习题

5-2-1 以波形如图 5-2-1 所示、角频率为 314 rad/s 的电流 $i(t)$ 分别激励 1 H 的电感和 $100\text{ }\mu\text{F}$ 的电容。

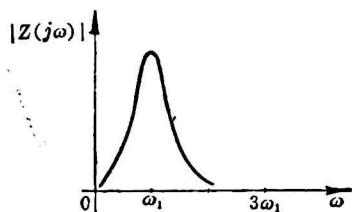
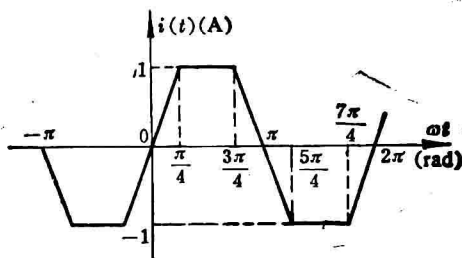


图 5-2-2 策动点阻抗函数的幅频特性

试求电压响应 $v_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 。



图题 5-2-1

§ 5-3 非正弦周期电流和电压的有效值·平均功率

5-3-1 有效值

在本书 § 4-10 中曾经指出, 周期电流和电压的有效值就是它们的方均根值。例如, 周期电流 $i(t)$ 的有效值为

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt} \quad (5-3-1)$$

设非正弦周期电流 $i(t)$ 可展开为傅里叶级数

$$i(t) = \frac{I_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n) \quad (5-3-2)$$

下面将研究 $i(t)$ 的有效值 I_{eff} 与 $i(t)$ 的各次谐波的幅值 $I_1, I_2, \dots$ 及恒定分量 $\frac{I_0}{2}$ 之间的关系。

将式(5-3-2)代入式(5-3-1)得

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{I_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n) \right]^2 dt}$$

将上式积分号内直流分量与各次谐波之和的平方展开, 再分别求各项在原周期电流一周期内的平均值, 结果有以下四种类型的项:

$$(1) \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{I_0}{2} \right)^2 dt = \left(\frac{I_0}{2} \right)^2$$

$$(2) \frac{1}{T} \int_0^T I_n^2 \cos^2(n\omega_1 t + \theta_n) dt = \frac{I_n^2}{2}$$

$$(3) \frac{1}{T} \int_0^T 2 \left(\frac{I_0}{2} \right) I_n \cos(n\omega_1 t + \theta_n) dt = 0$$

$$(4) \frac{1}{T} \int_0^T 2 I_n I_m \cos(n\omega_1 t + \theta_n) \cdot \cos(m\omega_1 t + \theta_m) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

因此, 周期电流 $i(t)$ 的有效值可按式计算:

$$I_{eff} = \sqrt{\left(\frac{I_0}{2} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} I_n^2} \quad (5-3-3)$$

或

$$I_{eff} = \sqrt{\left(\frac{I_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{neff}^2} \quad (5-3-4)$$

式中 $I_{neff} = \frac{I_n}{\sqrt{2}}$ 为 n 次谐波分量的有效值。由此可见, 非正弦周期电流的有效值, 等于它的直流分量及各谐波分量有效值的平方之和的平方根。

例 5-3-1 计算例 5-2-1 中的周期性矩形脉冲电流 $i(t)$ 的有效值 (高次谐波考虑到七次谐波为止)。

解 周期性矩形脉冲电流 $i(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$i(t) = \frac{\pi}{4} + \cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_1 t \text{ mA}$$

其中直流分量及各次谐波的幅值分别为

$$\frac{I_0}{2} = \frac{\pi}{4}$$
$$I_1 = 1 \quad I_3 = \frac{1}{3} \quad I_5 = \frac{1}{5} \quad I_7 = \frac{1}{7}$$

根据式(5-3-3)可求得电流 $i(t)$ 的有效值

$$I_{eff} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^2}{2}}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49}\right)} = 1.097 \text{ mA}$$

此外, 也可根据 $i(t)$ 的时间函数式直接按均方根值计算电流的有效值

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt}$$
$$= \sqrt{\frac{\tau}{T} I^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = 1.11 \text{ mA}$$

前者由于忽略了谐波次数 $n > 7$ 的各高次谐波项, 得到有效值的误差约为百分之一。

5-3-2 非正弦周期电流电路中的平均功率

设二端网络输入端口的周期电压及周期电流分别为 $v(t)$ 与 $i(t)$, 二者的参考方向一致, 则此二端网络吸收的瞬时功率及平均功率分别为

$$p(t) = v(t)i(t)$$
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt$$

如果周期电压、电流均可展开为傅里叶级数, 即

$$v(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n)$$

$$i(t) = \frac{I_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_1 t + \beta_n)$$

则二端网络吸收的平均功率为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{V_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \right] \times \left[\frac{I_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_1 t + \beta_n) \right] dt$$

将上式积分号内两个级数的乘积展开, 分别计算各乘积项在原周期电压、电流一周期内的平均值, 结果有以下几种类型的项:

$$(1) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0}{2} \cdot \frac{I_0}{2} dt = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{I_0}{2}$$

$$(2) \quad \frac{1}{T} \int_0^T V_n I_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \cdot \cos(n\omega_1 t + \beta_n) dt \\ = \frac{1}{2} V_n I_n \cos(\alpha_n - \beta_n) = \frac{1}{2} V_n I_n \cos \varphi_n$$

式中 $\varphi_n = \alpha_n - \beta_n$ 为 n 次谐波电压超前于 n 次谐波电流的相角。

$$(3) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0}{2} I_n \cos(n\omega_1 t + \beta_n) dt = 0$$

$$(4) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_0}{2} V_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) dt = 0$$

$$(5) \quad \frac{1}{T} \int_0^T V_n I_m \cos(n\omega_1 t + \alpha_n) \cdot \cos(m\omega_1 t + \beta_m) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

因此, 二端网络吸收的平均功率可按下式计算:

$$P = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{I_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} V_n I_n \cos \varphi_n \\ = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{neff} I_{neff} \cos \varphi_n = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

式中, $P_0 = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{I_0}{2}$ 为电压、电流的直流分量构成的功率, $P_n = V_{neff} I_{neff} \cos \varphi_n = \frac{1}{2} V_n I_n \cos \varphi_n$ 为电压、电流的 n 次谐波构成的平均功率。

由此可见, 非正弦周期电流电路中的平均功率, 等于直流分量构成的功率与各次谐波构成的平均功率之和。必须注意, 只有同频率的电压谐波与电流谐波才能构成平均功率; 频率不相同的电压谐波与电流谐波只能构成瞬时功率, 而不能构成平均功率。

例如, 已知图 5-3-1 所示电路中的周期电压与电流分别为

$$v(t) = 50 + 85 \cos(\omega_1 t - 60^\circ) + 56.6 \cos(2\omega_1 t - 80^\circ) \text{ V}$$

$$i(t) = 1 - 0.707 \cos(\omega_1 t + 70^\circ) + 0.42 \cos(2\omega_1 t - 40^\circ) \text{ A}$$

则此电路吸收的平均功率为

$$P = 50 \times 1 + \frac{85 \times 0.707}{2} \cos[-60^\circ - (70^\circ - 180^\circ)]$$

$$+ \frac{56.6 \times 0.424}{2} \cos[-80^\circ - (-40^\circ)]$$

$$= 50 + 19.3 + 9.2 = 78.5 \text{ W}$$

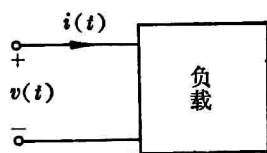


图 5-3-1 非正弦周期电流电路

练习题

5-3-1 已知一无源二端网络的端口电压与电流分别为

$$v(t) = 141 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + 84.6 \cos 2\omega t + 56.4 \cos\left(3\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}$$

$$i(t) = 10 + 56.4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + 30.5 \cos\left(3\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}$$

试求:

- (1) 电压、电流的有效值;
- (2) 网络消耗的平均功率。

5-3-2 以电压 $v(t) = 100 + 20 \cos 314 t + 14 \cos(942 t + 45^\circ) \text{ V}$ 激励一个 10Ω 的电阻, 试求:

- (1) 电流 $i(t)$ 和电压、电流的有效值;
- (2) 电阻消耗的功率。

§ 5-4 傅里叶级数的指数形式

根据欧拉公式, 可得

$$\cos n\omega_1 t = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}$$

$$\sin n\omega_1 t = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2j}$$

因此, 傅里叶级数可改写如下:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{(e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t})}{2} + b_n \frac{(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t})}{2j} \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(a_n - jb_n)}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{(a_n + jb_n)}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\dot{A}_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{A_n^*}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right] \quad (5-4-1)$$

式中, $\dot{A}_n = a_n - jb_n = A_n e^{j\theta_n}$ 是 n 次谐波相量 (参阅图 5-1-1), 其模 A_n 与辐角 θ_n 分别为