普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学（经管类）

（下册）

GAODENG SHUXUE (JINGGUANLEI)

史 悦 李晓莉 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学(经管类)

(下册)

史 悦 李晓莉 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容提要

本书内容根据高等院校经管类专业高等数学课程的教学大纲及“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成. 全书注重从学生的数学基础出发，通过实际问题引入数学概念，利用已知数学工具解决新问题，并将数学方法应用于实际问题，特别是结合学生的专业特点，精选了许多高等数学方法在经济理论上的应用实例. 在这个过程中培养学生的数学素养、建模能力、严谨的思维能力，创新意识及应用能力. 本书力求数学体系完整，深入浅出.

全书分为上、下两册，下册包括：无穷级数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线曲面积分共四章内容. 书末附有向量代数与空间解析几何一章，可以根据不同院校不同专业课程体系的安排选择讲授，并附有便于学生查阅的常用面积体积公式、常见曲面方程及图形、习题参考答案与提示.

本书适合作为各类普通高等院校经济管理类各专业高等数学课程的教材及参考书目.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 ：经管类. 下册 / 史悦，李晓莉编. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2017.3
ISBN 978-7-5635-5043-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①史… ②李… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 014090 号

书　　名： 高等数学(经管类)(下册)
著作责任者： 史　悦　李晓莉　编
责 任 编 辑： 徐振华　马晓仟
出 版 发 行： 北京邮电大学出版社
社　　址： 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部： 电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail： publish@bupt.edu.cn
经　　销： 各地新华书店
印　　刷： 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本： 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张： 17.25
字　　数： 447 千字
版　　次： 2017 年 3 月第 1 版　2017 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5043-2　　定　价：38.00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前　　言

数学不仅是一门科学，一种计算工具，更是一种严谨的思维模式.高等数学作为各级高等院校的重要基础课，随着课程改革的深入，更加注重培养学生的创新能力和数学建模的应用能力，因此全书注重从学生的数学基础出发，首先突出数学建模的思想，通过实际问题引入数学概念（即建立数学模型），体现数学概念的来源，避免生硬地直接引入数学概念；其次在建立模型之后，注意引导解决模型所提出问题的思想方法，在此过程中特别强调发散性思维对解决问题的思路和创新方法的影响，开阔学生思路，引导学生对解决问题的各种想法进行实践，体现研究问题的一般过程；最后利用已知数学概念和方法应用于实际问题，结合学生的专业特点，精选了许多高等数学方法在经济理论上的应用实例，并为提高学生的学习兴趣引入了实际生活中许多应用的实例，使得教师在教学过程中能够培养学生的数学素养、建模能力、严谨的思维能力、创新意识及应用能力.

书中对例题的选择注重典型多样，富有启发性，着重基本概念和基本方法的理解，不片面追求技巧性与难度.在每节的习题选择上也体现了这一基本原则，但在每章的总习题中注重知识的综合应用与常用技巧的训练.本书在编写过程中，融入了编者多年的教学经验，在整体内容上力求数学体系完整、深入浅出，适于经管类学生的学习难度与后续经济、管理类课程的应用衔接，对于＊号部分可根据专业及学生基础进行教学并可指导学生进行课下阅读.

全书分为上、下两册，下册包括：无穷级数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线曲面积分.书末附有向量代数与空间解析几何一章，可以根据不同院校不同专业课程体系的安排选择讲授，并附有便于学生查阅的常用面积体积公式、常见曲面方程及图形、习题参考答案与提示.

本书的完成要感谢北京邮电大学理学院及数学系的支持和各位数学系同仁的帮助，同时要感谢北京邮电大学教务处、北京邮电大学出版社的大力支持.数学系同仁对本书的内容提出了许多宝贵的意见，出版社从编审到出版付出了很大的精力，实则本书是大家共同努力的结晶，在此表示感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误及不当之处在所难免，敬请各位专家、同行、读者指出，以便今后改进、完善、提高.

编　者

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第八章　无穷级数

无穷级数是高等数学的一个重要组成部分．一方面，它是数列极限的一种新的表现形式，因此可以借助数列极限的理论来研究它，从而把极限中的收敛与发散的概念发展得更加深入；同时，随着判别级数敛散性的一系列方法的建立又促进了极限理论的发展．另一方面，级数是表示函数、研究函数的性质以及进行数值计算及求解微分方程等问题的有力工具．

本章首先讨论常数项级数，介绍无穷级数的一些基本概念、性质和判敛方法，然后讨论函数项级数特别是幂级数的收敛特点及性质，并讨论如何将函数展开成幂级数与傅里叶(Fourier)级数的问题，其中傅里叶级数是电子信息理论研究中重要的数学工具．

第一节　常数项级数的概念与性质

本节内容是学习级数特别是数项级数审敛法的基础，而数项级数审敛法又是数项级数的重点；从数学思想角度来看，进一步体现了从初等数学到高等数学的本质变化，即由有限到无限，由静止到运动的转变；也更进一步体现了极限在高等数学中的基础作用．

一、数项级数的概念

1. 实例

人们认识事物在数量方面的特性，往往有一个由近似到精确的过程．在这种认识过程中，会遇到由有限个数相加到无穷多个数相加的问题．

例 1　求半径为 R 的圆面积 A 的精确值．

分析　在上册中我们利用数列极限按照正多边形面积的极限是圆面积的思想求过圆的面积．现在可具体按如下方法计算：首先作圆的内接正六边形，算出其面积 a_1，它与圆面积 A 的误差较大．为了更准确地计算出 A 的值，我们再以这个正六边形的每一边为底分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形(图 8-1)，算出这六个等腰三角形的面积之和 a_2，则 a_1+a_2(即内接正十二边形的面积)就是 A 的一个比 a_1 近似程度更好的近似值．同样地，在这正十二边形的每一边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这十二个等腰三角形的面积之和 a_3，则 $a_1+a_2+a_3$(即内接正二十四边形的面积)是 A 的比 a_1+a_2 近似程度更好的近似值．如此继续下去，内接正 3×2^n 边形的面积

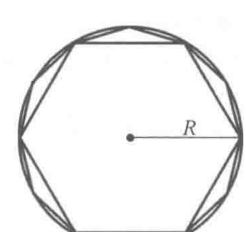

图 8-1

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

就逐步逼近圆面积 A.

如果内接正多边形的边数无限增多,即 n 无限增大,则和 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 的极限就是所求圆面积 A 的精确值,即

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=A.$$

注意到这时的极限问题等价于上述无穷多个数依次相加(无穷和)$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$的运算问题.

例 2 无限循环小数的精确表达实际上也可以归结为一个无穷和的问题,例如

$$0.\dot{3}=0.333\cdots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots.$$

将上面两例抽象化、模型化,就要研究一般的无穷多个数依次相加的运算问题.

2. 数项级数的概念

定义 1 设$\{u_n\}$是一个无穷数列,将$\{u_n\}$中各项依次相加构成的表达式:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

或记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,称为(常数项)**无穷级数**,简称**级数**.其中第 n 项 u_n 称为级数的**一般项**(或**通项**).

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 前 n 项 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的和 $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,称为该级数的**部分和**.当 $n=1,2,3,\cdots$ 时,$s_1,s_2,s_3,\cdots$ 构成一数列$\{s_n\}$,称为该级数的**部分和数列**.

例 3 写出下列级数

$$2\sqrt{x}-\frac{3}{2}x+\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{5}{4}x^2+\cdots$$

的一般项 u_n,并将级数以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的形式表示.

解 先将上述级数写成更有规律的形式

$$\frac{2}{1}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{4}x^{\frac{4}{2}}+\cdots,$$

于是有

$$u_1=\frac{1+1}{1}x^{\frac{1}{2}},u_2=(-1)^{2-1}\frac{2+1}{2}x^{\frac{2}{2}},\cdots,u_n=(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}x^{\frac{n}{2}},\cdots.$$

故所给级数一般项为 $u_n=(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}x^{\frac{n}{2}}$,级数可写为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}x^{\frac{n}{2}}$.

上述级数只是一个形式上的定义,怎样理解无穷级数中无穷多个数相加,这些数是如何相加的?最后的结果又会怎样?可见,无穷多个数的“求和”是一个新的问题.

在例 2 中,由初等数学知识我们已经知道这个循环小数等于$\dfrac{1}{3}$.注意到,此时级数

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

的部分和为 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}3\times10^{-k}$,容易得到下面的极限

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{3}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{10^n}}{1-\dfrac{1}{10}}=\frac{1}{3}.$$

由此启发我们，级数的和可以作为其部分和数列 s_n 的极限而确定. 即通过观察部分和数列 $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$ 的极限，来把握无穷多个数相加的含义，并理解得到的结果. 利用极限通过有限项相加来认识、研究无限项相加(级数)是数学中一个重要的思想方法. 由此，我们引进无穷级数收敛与发散的概念.

定义 2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 s_n 收敛于 s，即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**，并称 s 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s,\text{或 } u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=s;$$

否则，称此级数**发散**.

当级数收敛时，$r_n=s-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$ 称为该级数的**余项**. 部分和 s_n 是级数和 s 的近似值，所产生的误差为 $|r_n|$.

由定义 2，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性(收敛或发散)及求和问题，就转化为部分和数列 s_n 当 $n\to\infty$ 的敛散性及其极限值的问题. 因此我们说级数是数列极限的另一种表现形式.

例 4　写出级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$($a\neq0$，称为**几何级数**或**等比级数**，$q$ 称为该级数的公比)的部分和 s_n，并说明该级数的敛散性，若收敛指出其和.

解　因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$，所以部分和

$$s_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q\neq1,\\ na, & q=1\end{cases}$$

当 $|q|<1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q},$$

于是该级数收敛且和为 $\dfrac{a}{1-q}$；

当 $|q|>1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\infty,$$

此时级数发散；

当 $q=-1$ 时，部分和数列为 $s_n=\dfrac{a}{2}[1-(-1)^n]$，因为其两子列 $s_{2m}=0$，$s_{2m-1}=a(a\neq0)$，$m=1,2,\cdots$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在，因此级数发散；当 $q=1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}an$ 亦不存在，所以级数亦发散.

总之，有

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q|<1 \\ 发散, & |q| \geqslant 1 \end{cases}.$$

例 5 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性.

解 因为$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$,从而该级数的部分和

$$s_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}$,所以该级数收敛,且其和为$\dfrac{1}{2}$.

例 6 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 发散.

证 此级数的部分和为 $s_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. 因为当 $n\to\infty$时,$s_n\to+\infty$,于是所给级数发散.

二、收敛级数的基本性质

下面利用数列极限的性质,来研究级数的一些基本性质.

性质 1(收敛级数的线性性质)

(1) 设 k 为任意常数,若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = ks$.

一般地,级数的每一项同乘一个不为零的常数后,它的敛散性不变.

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = s$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n \pm \beta v_n) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \beta\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \alpha s \pm \beta\sigma,$$

其中 $\alpha,\beta\in \mathbf{R}$ 为常数.

证 只证(2).

设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n \pm \beta v_n)$ 的部分和分别为 s_n,σ_n 及 τ_n,则有

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n}(\alpha u_k \pm \beta v_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n} u_k \pm \beta\sum_{k=1}^{n} v_k = \alpha s_n \pm \beta\sigma_n,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\alpha \lim_{n\to\infty}s_n\pm\beta \lim_{n\to\infty}\sigma_n=\alpha s\pm\beta\sigma.$$

这表明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha u_n \pm \beta v_n)$ 收敛,且和为 $\alpha s \pm \beta\sigma$.

对于性质 1,还需注意,两个发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 逐项相加或相减所得的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 并不一定发散,例如,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 都发散,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}((-1)^{n-1}+(-1)^n) = 0+0+\cdots+0+\cdots$ 是收敛的.

推论　若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 一定发散. 即一个收敛级数与一个发散级数逐项相加所得的级数必定发散.

证　用反证法. 设 $w_n=u_n+v_n$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 收敛，则因为 $v_n=w_n-u_n$，又 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，由性质 1，有 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sum_{n=1}^{\infty}(w_n-u_n)$ 收敛. 这与已知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散矛盾！故 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 即 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散.

例 7　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\cos n\pi\right)$ 的敛散性.

解　由例 4 知等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\pi=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，因此由上面的推论知，所给级数发散.

例 8　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{3}{(n+1)(n+2)}\right]$ 的和.

解　由于等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，且和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$

又由本节例 5 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}$，根据性质 1(2)，$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{3}{(n+1)(n+2)}\right]$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{3}{(n+1)(n+2)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}.$$

性质 2　在级数中去掉、增加或改变有限项，不改变级数的敛散性（当然，在收敛时，其和一般是不同的）.

证　只证明“在级数中去掉有限项，不改变级数的敛散性”.

设 $u_1+u_2+\cdots+u_k+u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}+\cdots$ 的部分和为 s_n，将级数的前 k 项去掉，得级数

$$u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}+\cdots,$$

于是新级数的部分和为

$$\sigma_n=u_{k+1}+\cdots+u_{k+n}=s_{k+n}-s_k,$$

其中 s_{k+n} 是原来级数的前 $k+n$ 项的和. 因为 s_k 是常数，所以当 $n\to\infty$ 时，σ_n 与 s_{k+n} 同时收敛或发散，即去掉有限项后，新级数与原级数敛散性相同.

由此可见，级数是否收敛，取决于 n 充分大以后一般项 u_n 的状况，而与级数前有限项的状况无关. 例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ 收敛，因为此级数可视为例 5 中级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$ 增加了一项 $\frac{1}{2}$ 而得到 .

性质 3　收敛的级数在求和过程中满足结合律. 即将收敛级数的项任意加括号所得的新级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$$

仍收敛,并且其和不变.

证 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为s_n,加括号后所成的上述新级数的前k项部分和为A_k,则

$$A_1=u_1+\cdots+u_{n_1}=s_{n_1},$$

$$A_2=u_1+\cdots+u_{n_1}+u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2}=s_{n_2},$$

$$\vdots$$

$$A_k=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})=s_{n_k}$$

$$\vdots$$

可见,数列$\{A_k\}$是数列$\{s_n\}$的一个子数列.由数列$\{s_n\}$的收敛性以及收敛数列与其子数列的关系可知,数列$\{A_k\}$收敛,且有相同的极限.即加括号后所成的级数收敛,且其和不变.

此性质的逆否命题为:若加括号后所成的级数发散,则原来的级数也发散.我们常用这个结论证明级数发散,例如在例7中知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\cos n\pi\right)$发散,所以级数$\frac{1}{4}-1+\frac{1}{4^2}+1+\frac{1}{4^3}-1+\cdots+\frac{1}{4^n}+(-1)^n+\cdots$发散.但要注意性质3的逆命题不一定成立,例如级数$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$是收敛的,但去括号后的级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$是发散的,即收敛级数不能任意去括号.

性质4 (级数收敛的必要条件)若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$u_n\to 0(n\to\infty)$.

证 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为s_n,且$s_n\to s(n\to\infty)$,则

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0.$$

例9 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$发散.

证 因为

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}\neq 0,$$

由性质4知,所给级数发散.

注意 级数的一般项趋于零并不是级数收敛的充分条件.有些级数虽然一般项趋于零,但仍然是发散的,请见下例.

例10 证明**调和级数**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散.

证 用反证法证明.

若调和级数收敛,设它的部分和为s_n,且$s_n\to s(n\to\infty)$,从而对此级数的部分和s_{2n},也有$s_{2n}\to s(n\to\infty)$.于是

$$s_{2n}-s_n\to 0(n\to\infty).$$

但另一方面

$$s_{2n}-s_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},$$

故 $s_{2n}-s_n$ 不趋于零($n\to\infty$),矛盾.这表明调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

这里值得注意的是,虽然调和级数在 n 越来越大时,它的项越来越小,但这些项的和会逐渐非常缓慢地增大,并可以超过任何有限值.调和级数的这种特性使一代又一代数学家困惑并为之着迷.它的发散性是由法国学者尼古拉·奥雷姆(1323—1382)在极限概念被完全理解之前约 400 年首次证明的.下面的数字可以帮助我们更好地理解此级数.它的前 1 000 项的和约为 7.485;前 100 万项的和约为 14.357;前 10 亿项的和约为 21.更有学者估计过,为了使调和级数的和约为 100,需相加 10^{43} 项.这些项有多长呢?试想如果我们将这些项写在一个很长的纸带上,设每一项只占 1 mm 长的纸带,必须使用 10^{43} mm 长的纸带,这个长度大约是 10^{25} 光年,但科学家已知的宇宙的尺寸仅有 10^{12} 光年.

三*、数项级数的应用举例

1. 关于数 e 的表示

将函数 e^x 在点 $x=0$ 展开为 n 阶泰勒公式:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!},\xi \text{ 在 } 0,x \text{ 之间}.$$

令 $x=1$,得到 $e=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$,其中 $\xi\in(0,1)$.当 $n\to\infty$ 时,$\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\to 0$.此时有

$$e=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots,$$

于是无理数 e 被表示为无穷多个数之和.

2. 政府投资能否拉动社会消费的问题

人们在挣到钱之后,一部分用于消费,另一部分用于储蓄.他们所消费的钱被别人挣到,第二轮挣到钱的人同样将其中一部分用于消费,其他用于储蓄.其中的消费部分成为第二轮消费.这样的过程会继续下去,经济学家称之为消费链.

为了简化讨论,假定每一个人的消费都等于收入的 q 倍($0<q<1$).称 q 为消费边际倾向,$1-q$ 称为储蓄边际倾向.

假定政府财政投入为 D.考虑下列问题:

(1) 经过 n 轮消费之后,社会总消费为多少?

(2) 政府财政投入最终能带动多大消费?

第一轮收入为 D,消费等于 qD;第二轮收入为 qD,消费等于 q^2D;…;第 n 轮收入为 $q^{n-1}D$,消费等于 q^nD.因此经过 n 轮消费之后,社会总消费为

$$qD+q^2D+\cdots+q^nD=\frac{1-q^n}{1-q}qD.$$

这个过程无限进行下去,社会总消费趋向于极限

$$Q=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}qD=\frac{qD}{1-q}.$$

于是,如果每个人的消费边际倾向等于 q,则政府财政投资 D 最终能拉动社会消费 $\frac{qD}{1-q}$.

在这个问题中,政府投资所起到的消费效应是无穷个轮次消费的总和.

习 题 一

1. 下面关于级数运算的命题是否正确？并请说明理由.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必定发散.

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必定发散.

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则加括号后所得新级数亦发散.

(4) 若加括号后的级数发散，则原级数必发散.

2. (1) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 s_n，则 $s_{2n+1}=u_1+u_3+\cdots+u_{2n+1}$ 是否正确？

(2) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}=u_1+u_3+\cdots+u_{2n-1}+\cdots$，则其部分和 $s_n=u_1+u_3+\cdots+u_{2n+1}$ 是否正确？

3. 下面的运算是否正确？并说明理由.

$0=0+0+0+\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots=1-1+1-1+\cdots$

$=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1.$

4. 用定义判别下列级数的敛散性，并在收敛时求其和：

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n\pi}{6}$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

5. 利用级数的性质，判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$；　(2) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots+\sqrt[n]{0.001}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n+1}$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\dfrac{1+n}{2+n}$；　(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}-\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$；

(6) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3n}+\cdots$；

(7) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots$；

(8) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{10n}+\cdots$.

6. 设(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，分别就(1)、(2) 两种情况讨论下列级数的敛散性：

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+0.001)$；　② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1\,000}$；　③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{u_n}$.

7. (1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+2)$ 收敛，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$；

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}=3$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，并求其和.

8. 设一个小球从 a 米高处下落到地面上. 球每次落下距离 h 时，碰到地面又弹起的距离为 rh，其中 r 是小于 1 的正数，问小球会停止跳动吗？求这个球上下跳动的总距离(图 8-2)，并求 $a=6$，$r=\dfrac{2}{3}$ 时的总距离值，再回答小球会停止跳动吗？为什么？

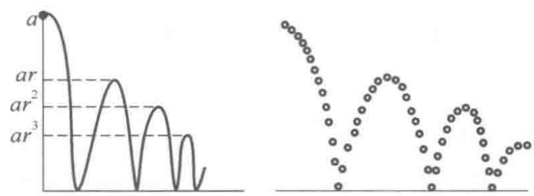

图 8-2

9. 将无限循环小数 5.232 323… 表示成两个整数之比.

第二节　正项级数的审敛法

对于级数的研究，判断级数敛散性是一项很重要的工作，因为若不首先判别级数是否收敛，就不能放心地进行求和运算. 本节从最简单的一类级数——正项级数入手，寻找比定义更简单有效的判断级数敛散性的方法. 这类级数特别重要，以后将看到许多级数的敛散性可归结为正项级数的敛散性问题.

定义 1　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项 $u_n\geqslant 0$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**正项级数**.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是一个正项级数，它的显著特点是部分和数列 $\{s_n\}$ 是单调增加的. 若又设数列 $\{s_n\}$ 有界，根据单调数列收敛原理，得到 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 反之，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，由级数收敛的定义，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在，于是 $\{s_n\}$ 有界. 因此，有下面的结论：

定理 1　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

推论　若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则它的部分和数列 $s_n\to+\infty(n\to\infty)$，也记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=+\infty$.

利用定理 1 不仅可以判别正项级数的敛散性，还可以得到如下关于正项级数的一个基本的审敛法.

定理 2(比较审敛法)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$.

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com