应用型本科院校“十三五”规划教材/数学

线性代数

主编　李世巍　丁 敏

Linear Algebra

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

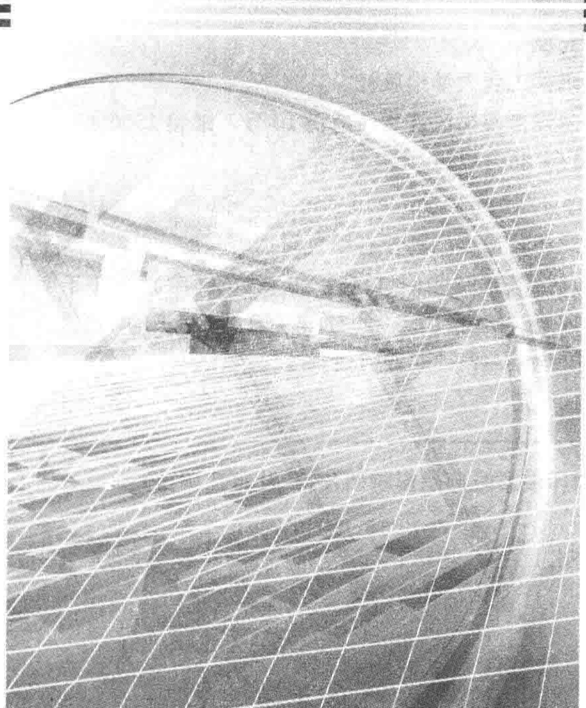
哈爾濱工業大學出版社

应用型本科院校“十三五”规划教材/数学

线性代数

主编　李世巍　丁 敏

Linear Algebra



哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书共分为6章，内容包括行列式、矩阵、向量组及线性方程组的解、特征值及矩阵对角化、二次型、Matlab实验。各章均附有相当数量的习题。第1～5章(带*号的章节和课后习题，对经管类专业的学生不要求)完全满足教学基本要求。第6章为数学实验内容，供有需要的学生学习。

本书适合作为应用型本科院校工科类、经管类专业的教材，也可作为高等继续教育、高等院校网络教育教材或自学参考书，对于参加全国高等教育自学考试工科类、经济类与管理类专业的读者，也不失为一本有指导价值的读物。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李世巍，丁敏主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.1

应用型本科院校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5603-6426-1

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①李…②丁…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第002410号

策划编辑　杜　燕
责任编辑　李长波
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江艺德印刷责任有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张8.5　字数195千字
版　　次　2017年1月第1版　2017年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6426-1
定　　价　20.00元

序

哈尔滨工业大学出版社策划的《应用型本科院校“十三五”规划教材》即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的《应用型本科院校“十三五”规划教材》，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据前黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标

及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

《应用型本科院校“十三五”规划教材》的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

前 言

本书的编写以应用型技术技能型人才的培养要求为依托，以分类教学因材施教的基本理念为基础。本书介绍了线性代数的基本知识，可作为高等院校非数学专业“线性代数”课程的试用教材和教学参考书。本书第 1～5 章内容分别为：行列式、矩阵、向量组及线性方程组的解、特性值及矩阵对角化、二次型，约需 32 学时，第 6 章是 Matlab 实验，主要介绍了 Matlab 软件在线性代数中的一些应用，属于数学实验上机内容，可供有需要的专业选用。各章配有适量习题。丁敏主要负责本书第 1,2 章的编写，李世巍主要负责本书第 3～6 章的编写。

在本书的编写过程中很多老师提供了很大的帮助。对以上为本书编写提供意见和帮助的老师，表示衷心感谢。

由于编者的水平有限，若出现疏漏和不妥之处请批评指正，以便再版时修订。

编　者

2016 年 12 月

目　录

第 1 章 行列式

1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

在线性代数中，将含两个未知量两个方程式的线性方程组的一般形式写为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法容易求出未知量 x_1, x_2 的值，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{2}$$

这就是二元方程组的解的公式.但这个公式不好记，为了便于记这个公式，引进二阶行列式的概念.

称记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为二阶行列式，它表示两项的代数和：$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3}$$

二阶行列式所表示的两项的代数和，可用下面的对角线法则记忆：从左上角到右下角两个元素相乘取正号，从右上角到左下角两个元素相乘取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$- \qquad +$$

由于公式(3) 的行列式中的元素就是二元方程组中未知量的系数，因此又称它为二元方程组的系数行列式，并用字母 D 表示，即有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

如果将 D 中第一列的元素 a_{11}, a_{21} 换成常数项 b_1, b_2，则可得到另一个行列式，用字母 D_1 表示，于是有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和：$b_1a_{22}-b_2a_{12}$，这就是公式(2) 中 x_1 的表达式的分子.

同理将 D 中第二列的元素 a_{12}，a_{22} 换成常数项 b_1，b_2，可得到另一个行列式，用字母 D_2 表示，于是有

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

按二阶行列式的定义，它等于两项的代数和：$a_{11}b_2-b_1a_{21}$，这就是公式(2) 中 x_2 的表达式的分子.

于是二元方程组的解的公式又可写为$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \end{cases}$，其中 $D\neq 0$.

例 1.1 解二元线性方程组$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=14,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-21$$

所以

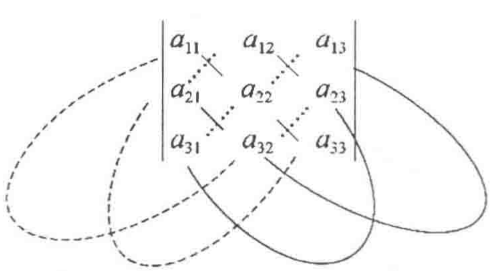
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3$$

1.1.2 三阶行列式

称记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为三阶行列式. 三阶行列式所表示的六项的代数和，也用对角线法则来记忆：从左上角到右下角三个元素相乘取正号，从右上角到左下角三个元素取负号，即



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{4}$$

注 1 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

注 2 三阶行列式包括3! 项，每一项都是位于不同行、不同列的三个元素的乘积，其

中三项为正，三项为负.

例 1.2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

解　$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-1\times5\times0-$

$$2\times4\times6-3\times0\times(-1)=-58$$

1.2　n阶行列式

1.2.1　全排列及其逆序数

定义 1.1　把n个不同的元素排成一列，称为这n个元素的全排列(或排列)，n个不同的元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示，称为排列数 $P_n=n!$.

规定各元素之间有一个标准次序. 以 n 个不同的自然数为例，规定由小到大为标准次序.

定义 1.2　在一个排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，若数 $i_s>i_t$，则称这两个数组成一个逆序.

定义 1.3　一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列.

计算排列逆序数的方法：

方法 1　分别计算出排在 $1,2,\cdots,n$ 前面比它大的数码的个数并求和，即先分别算出 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素的逆序数，则所有元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.

方法 2　分别计算出排在 $1,2,\cdots,n$ 后面比它小的数码的个数并求和，即先分别算出 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素的逆序数，则所有元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.

例 1.3　求排列 32 514 的逆序数.

解　$t=0+1+0+3+1=5$，奇排列.

例 1.4　计算下列排列的逆序数，并讨论其奇偶性.

(1)217 986 354；

(2)$n(n-1)(n-2)\cdots21$.

解　(1)$t=0+1+0+0+1+3+4+4+5=18$.

(2)$t=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

1.2.2　对换

定义 1.4　在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种做出新排列的变换称为对换. 将相邻两个元素对调，称为相邻对换.

例如在排列 32 145 中，将 2 与 4 对换，得到新的排列 34 125.

看到：奇排列 32 145 经对换 2 与 4 之后，变成了偶排列 34 125. 反之，也可以说偶排列 34 125 经对换 4 与 2 之后，变成了奇排列 32 145.

定理 1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列 $a_1\cdots a_k abb_1\cdots b_m$，经对换 a 与 b，得排列 $a_1\cdots a_k bab_1\cdots b_m$，那么 $t(a_1\cdots a_k bab_1\cdots b_m)=t(a_1\cdots a_k abb_1\cdots b_m)\pm 1$，所以，经一次相邻对换，排列改变奇偶性.

再证一般对换的情形.

设排列

$$a_1\cdots a_k ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n \tag{5}$$

经对换 a 与 b，得排列

$$a_1\cdots a_k bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n \tag{6}$$

事实上，排列(5)经过 $2m+1$ 次相邻对换变为排列(6). 根据相邻对换的情形及 $2m+1$ 是奇数，所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证明 由定理知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此，推论成立.

1.2.3 n 阶行列式的定义

利用排列及逆序的概念，可以对前述二阶和三阶行列式给出新的解释. 根据二阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

二阶行列式的值是两项的代数和，每一项是来自于不同行、不同列两个元素的乘积，并且每个这样的乘积都出现在右边的展开式中. 在展开式中，一项带正号，一项带负号. 不难直接验证，带正号的项，其列指标构成的排列为偶排列；而带负号的项，其列指标构成的排列为奇排列，因此二阶行列式的值可重新描述为

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}&=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}= \\ &(-1)^{\tau(1\,2)}a_{11}a_{22}+(-1)^{\tau(2\,1)}a_{12}a_{21}= \\ &\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2} \end{aligned}$$

其中求和符号表示对所有二阶排列求和.

类似地，三阶行列式的值可重新写为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

上式中，求和符号表示对所有三阶排列求和.

通过以上分析可知，二阶和三阶行列式都是来自于不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和($n=2,3$)，求和总数为 $n!$；每一项乘积前面带有正负号，当该乘积项 n 个元素的行标成自然排列时，其符号由这些元素的列标所构成排列的奇偶性确定.

“+” 123 231 312 （偶排列）

“-” 321 213 132 （奇排列）

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

将其推广，有 n 阶行列式定义.

定义 1.5 由排成 n 行 n 列的 n^2 个元素 $a_{ij}, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,n$ 构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，常记为 D. 其定义式为

$$D = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中记号 $\sum$ 为求和号，这里表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为行列式的一般项.

注 (1) 行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的线性方程组的需要而定义的；

(2) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；

(3) n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积；

(4) 一阶行列式的符号 $|a|=a$，不要与绝对值符号相混淆，一般不使用此符号.

注 n 阶行列式也可以定义为 $D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$.

例 1.5 计算 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解 由行列式定义，和式中仅当 $p_1=n, p_2=n-1,\cdots,p_{n-1}=2,p_n=1$ 时

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \neq 0$$

所以

$$D=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 321)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

相关结论：

(1) 上三角形行列式(主对角线下方元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) 下三角形行列式(主对角线上方元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 对角形行列式(主对角线以外元素全为零的行列式)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

1.3 行列式的性质

对任给的 n 阶行列式，若其不具有特殊形状，如上三角或者下三角，利用定义求值会非常烦琐，例如对于五阶行列式，若利用五阶行列式的定义求值，求和符号中共需计算 $5!=120$ 项，每一项都是五个数的连乘积，工作量比较大. 因此，需要讨论 n 阶行列式性质，以达到简化计算的目的，这是本节讨论的主要内容.

定义 1.6 考虑 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，将它的行依次变为相应的列，得

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等($D^{\mathrm{T}}=D$).

事实上，若记

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$b_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

所以

$$D^{\mathrm{T}}=\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=D$$

注　行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的结论,对列也同样成立.

性质 1.2　互换行列式的两行($r_i\leftrightarrow r_j$)或两列($c_i\leftrightarrow c_j$),行列式变号.

例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

推论　若行列式 D 有两行(列)完全相同,则 $D=0$.

证明　互换相同的两行,则有 $D=-D$,所以 $D=0$.

性质 1.3　行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k,等于数 k 乘以此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　(1)D 中某一行(列)所有元素的公因子可提到行列式符号的外面;

(2)D 中某一行(列)所有元素为零,则 $D=0$.

性质 1.4　行列式中如果有两行(列)元素对应成比例,则此行列式等于零.

性质 1.5　若行列式某一行(列)的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和.这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　由行列式定义

$$\begin{aligned} D=&\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots(a_{ip_i}+b_{ip_i})\cdots a_{np_n}= \\ &\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}+ \\ &\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

性质1.6 行列式D的某一行(列)的各元素都乘以同一数k加到另一行(列)的相应元素上,行列式的值不变($D\xlongequal{r_i+kr_j}D$),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

计算行列式常用方法:利用性质 1.2,1.3,1.6,特别是性质 1.6 把行列式化为上(下)三角形行列式,从而较容易地计算行列式的值.

例 1.6 计算行列式

$$(1)D=\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix};(2)D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 $(1)D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-3r_1]{r_2+2r_1}-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & -6 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+4r_1]{r_3+8r_2}$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 58 & 62 \\ 0 & 0 & 30 & 37 \end{vmatrix}\xlongequal{r_4-\frac{30}{58}r_3}-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 58 & 62 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{143}{29} \end{vmatrix}=$$

$$-\left[1\times(-1)\times 58\times\frac{143}{29}\right]=286$$

$$(2)D\xlongequal{r_1+\sum_{i=2}^{4}r_i}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,4]{r_i-r_1}6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$6\times(1\times 2\times 2\times 2)=48$$

此方法称为归边法.

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$(1)D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \quad (a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n);$$