俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Smirnov Advanced Mathematics (Volume II(2))

斯米尔诺夫高等数学

（第二卷·第二分册）

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著　　斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

斯米尔诺夫高等数学

Smirnov Advanced Mathematics (Volume Ⅱ(2))

（第二卷 · 第二分册）

● [俄罗斯] 斯米尔诺夫 著

● 斯米尔诺夫高等数学编译组 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08-2016-040 号

内容简介

本书共分四章:重积分、曲线积分、反常积分及依赖于参变量的积分,向量分析及场论,微分几何基础,傅里叶级数.理论部分叙述扼要,应用部分叙述详尽.

本书适合高等学校数学及相关专业师生使用,也适合数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

斯米尔诺夫高等数学.第二卷.第二分册/(俄罗斯)斯米尔诺夫著;斯米尔诺夫高等数学编译组译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.3

ISBN 978-7-5603-6523-7

Ⅰ.①斯… Ⅱ.①斯… ②斯… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 050805 号

书名:Курс высшей математики

作者:В. И. Смирнов

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 18.75 字数 366 千字
版　　次 2018 年 3 月第 1 版 2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6523-7
定　　价 68.00 元

目录

第3章 重积分、曲线积分、反常积分及依赖于参变量的积分

§1 重积分

54. 容积

到现在为止我们所讲作为和的极限的定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

是就函数 $f(x)$ 确定在 OX 轴的一个线段(a,b)上的情形考虑的. 换句话说,积分区域总是某一个直线段.

在这一节中我们把积分概念推广到下列情形:积分区域是平面上某一个区域,或是空间中某一个区域,或者甚至是随便一个曲面上的某一个区域. 在这一节的讨论中,我们利用对面积与容积的直觉看法,而不细讲有关取极限时一些论点的根据. 在本章的最后一节我们再讲严格讨论的基本关键. 我们由两次积分的概念开始,它联系着计算容积的问题,就像上面写的积分联系着计算面积的问题一样,所以,在引进两次积分的概念之前,我们先看计算容积的问题.

我们知道，计算介于曲线 $y=f(x)$，OX 轴以及两个纵坐标：$x=a$，$x=b$ 之间的面积问题，是利用定积分的概念解决的，而这面积正是由上面写的定积分来表达的[I,87].

现在我们来看一个类似的问题，就是计算物体的容积 v，这物体的界面是已知的曲面(S)，它的方程是

$$z=f(x,y) \tag{1}$$

平面 XOY，以及一个柱面(C)，这个柱面的母线平行于 OZ 轴，它把(S) 投影到平面 XOY 的区域(σ) 上(图 33).

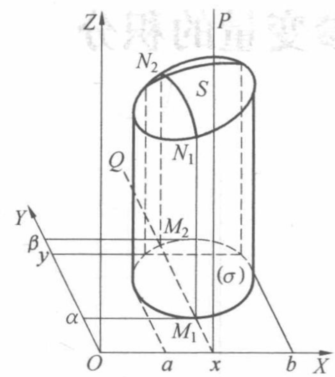

图 33

在[I,104] 中我们讲过用定积分计算物体的容积，为此只需要知道物体的平行断面. 对于现在的问题我们也应用这个方法.

为简单起见，我们设曲面(S) 整个在平面 XOY 之上，并且平行于坐标轴的直线与(σ) 的界线(l) 相交时至多交于两点.

用平行于平面 YOZ 的平面把所考虑的物体分开，这些平面与平面 XOY 的交线是平行于 OY 轴的直线(图 33 与 34(a),(b)). 把两个极端断面的横坐标各记作 a 与 b. 这也就是把界线(l) 分为两部分(1) 与(2) 的界线上的点的横坐标，这两部分(1) 与(2) 中，一个是平行于 OY 轴的直线穿入区域(σ) 的位置，一个是穿出的位置(图 34(a),(b)). 每一部分各有它的方程

$$y_1=\varphi_1(x),y_2=\varphi_2(x) \tag{2}$$

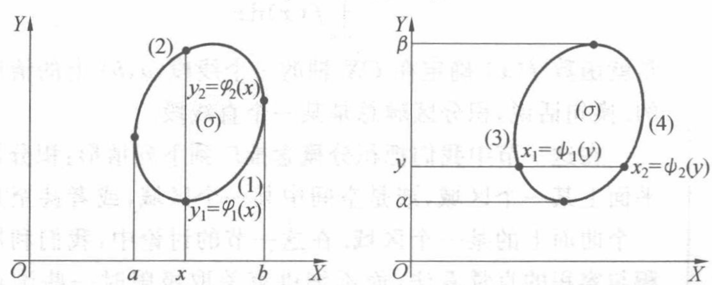

图 34

与 YOZ 距离为 x 的平面 PQ 在物体上截下的断面，它的面积是依赖于 x 的，我们把它记作 $S(x)$. 于是就有[I,104]

$$v=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

现在只要求函数 $S(x)$ 的表达式，这函数就是图形 $M_1N_1N_2M_2$ 的面积. 它

位于平面 PQ 上,它的界线是平面 PQ 与曲面 (S) 相交的曲线 N_1N_2,平行于 OY 轴的直线 M_1M_2 以及两个纵坐标 M_1N_1 与 M_2N_2.

在所考虑的断面上,由于所有的点的 x 是常数,曲线 N_1N_2 的纵坐标可以算作是 y 的函数,这个函数是当 x 是常数时由下面这方程确定的

$$z=f(x,y)$$

这时自变量 y 取在区间 (y_1,y_2) 上,其中 y_1 与 y_2 是直线 M_1M_2 穿入区域 (σ) 与穿出这个区域的点的纵坐标.

根据[I,87]可以写成

$$S(x)=\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)\mathrm{d}y$$

代入到(3)中就有

$$v=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1}^{y_2}f(x,y)\mathrm{d}y \tag{4}$$

如此我们得到容积的一个表达式,它写成两次积分的形状,这里先把 x 看作常数,对 y 求出积分,然后把所得到的结果对 x 求积分.

用平行于平面 XOZ 的平面分割所给的物体,我们得到同一个容积的另一个表达式

$$v=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}y\int_{x_1}^{x_2}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{5}$$

其中 x_1 与 x_2 是 y 的已知函数

$$x_1=\psi_1(y),x_2=\psi_2(y) \tag{6}$$

而 α 与 β 各表示界线 (l) 上的 y 的两个极端值(图 33 与 34(a),(b)).

公式(4)与(5)是在两个假定下推出的:1. 曲面 (S) 整个位于平面 XOY 之上;2. 曲面 (S) 在平面 XOY 上的投影 (σ) 的界线 (l) 与平行于一个坐标轴的任何直线最多交于两点. 若不满足条件 1,则公式(4)与(5)的右边所给出的不是真正的容积,而是容积的代数和,其中位于平面 XOY 之上的容积带(+)号;位于其下的带(—)号. 若不满足条件 2,例如(图 35),界线 (l) 与直线 $x=$常数的交点有几对,则需要把区域 (σ) 分为几部分,使得每一部分满足条件 2,与这对应的,曲面 (S) 与容积 v 也就被分为几部分,计算每一部分的容积时,公式(4)是适用的.

例 1 正棱柱的截断的容积(图 36). 底是由坐标轴 OX,OY 与直线 $x=k$,$y=l$ 形成的. 截面的方程是

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}+\frac{z}{\upsilon}=1$$

在这情形下公式(4)给出

$$v=\int_0^k\mathrm{d}x\int_0^l z\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^k \mathrm{d}x\int_0^l v\left(1-\frac{x}{\lambda}-\frac{y}{\mu}\right)\mathrm{d}y$$

$$=v\int_0^k \mathrm{d}x\left(y-\frac{xy}{\lambda}-\frac{y^2}{2\mu}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=l}$$

$$=v\int_0^k\left(l-\frac{xl}{\lambda}-\frac{l^2}{2\mu}\right)\mathrm{d}x$$

$$=v\left(kl-\frac{k^2 l}{2\lambda}-\frac{kl^2}{2\mu}\right)$$

$$=kl\cdot v\left(1-\frac{k}{2\lambda}-\frac{l}{2\mu}\right)=\sigma h$$

其中 σ 是底面积，h 是上截面的对角线交点$\left(对应于 x=\frac{k}{2}, y=\frac{l}{2}\right)$的纵坐标.

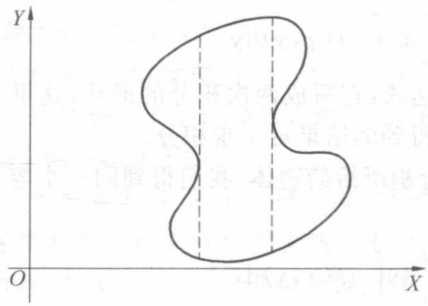

图 35

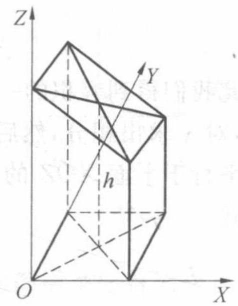

图 36

例 2　求椭圆体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的容积. 用平面 $z=$ 常数截这椭圆体时，得到椭圆具有半轴长

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},\ b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

于是利用

$$S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

求得未知容积是

$$v=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc$$

55. 二重积分

为了得到曲线 $y=f(x)$ 下的面积的近似式，我们[I,87] 把它分为竖条，并且用一些矩形来替代每一个竖条的面积，这些矩形的底各是每一个竖条的底，而高等于这个竖条上曲线的纵坐标的某一个中间值. 当竖条的数目增加而每一

个都趋向零时,差误 $\to 0$,于是由近似式取极限就成为定积分,它给出面积的准确表达式.

计算容积时也可以用类似的想法. 把区域 (σ)(图 37) 分成很多个任意形状的小单元 $\Delta\sigma$,这里我们一方面用 $\Delta\sigma$ 记这些个小区域,另一方面也用 $\Delta\sigma$ 记它们的面积. 以每一个这样的单元为底作一个柱体直到与曲面 (S) 相交,就把容积 v 分为单元容积. 显然,我们可以取一个柱体的容积作为这样的单元容积的近似值,这个柱体的底也是 $\Delta\sigma$,而高是一个纵坐标,也就是投影为 $\Delta\sigma$ 的曲面单元上任何一点的 z 的值. 换句话说,这就是在 $\Delta\sigma$ 上任取一点 N,为简短起见,把曲面 (S) 上对应于点 N 的点 M 的纵坐标记作 $f(N)$,也就是函数 $f(x,y)$ 在点 N 的值,我们就得到单元容积为 $f(N)\Delta\sigma$,于是

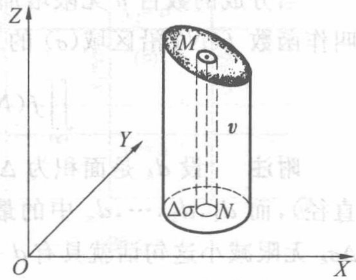

图 37

$$v \sim \sum_{(\sigma)} f(N)\Delta\sigma$$

这里要对于填满面积 (σ) 的所有的单元面积 $\Delta\sigma$ 求和.

每一个单元 $\Delta\sigma$ 愈小,而单元的数目 n 愈多时,所得到的近似公式就愈准确,取极限后可以写成

$$\lim \sum_{(\sigma)} f(N)\Delta\sigma = v$$

抽去几何的形象,不管函数 $f(N)$ 的几何意义,我们还是可以确定这个和的极限,这个极限叫作函数 $f(N)$ 沿区域 (σ) 的二重积分,并且表示成

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\mathrm{d}\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(N)\Delta\sigma$$

这个极限的存在是很明显的,因为像我们以上所讲的,这个极限应当给出以上我们所作的容积 v. 自然这种论证不是严格的,不过,对于具有一般条件的 $f(N)$ 以及所有的连续函数的任何情形,上述极限的存在可以严格证明.

若我们设 $f(N)=1$,则得到区域 (σ) 的面积 σ 的一个表达式是二重积分的形状

$$\sigma = \iint_{(\sigma)} \mathrm{d}\sigma$$

我们来叙述二重积分的完整定义:设 (σ) 是一个有界的平面区域,$f(N)$ 是这个区域上的点的函数,就是说,在区域 (σ) 的每一点 N 处取确定值的一个函数. 把区域 (σ) 分为 n 个部分区域,并设 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$ 是这些部分的面积,而 $N_1,N_2,\cdots,N_n$ 各为这些部分上的任一点. 作出乘积的和

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\cdot\Delta\sigma_k$$

当分成的数目 n 无限增加并且每一个部分区域无限减小时，这个和的极限叫作函数 $f(N)$ 沿区域(σ) 的二重积分

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\mathrm{d}\sigma=\lim\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta\sigma_k$$

附注　设 d_k 是面积为 $\Delta\sigma_k$ 的部分区域中两点间的最大距离(这个区域的直径)，而 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 中的最大的数是 d. 在定义中所说的每一个部分区域 $\Delta\sigma_k$ 无限减小这句话就具有 $d\to 0$ 的意义. 如果用字母 I 来记积分的数值，则上述定义就相当于：对于给定的任何正数 ε，存在这样一个正数 η，使得[参考 I，87] 只要 $d\leqslant\eta$，则

$$\left|I-\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta\sigma_k\right|\leqslant\varepsilon$$

在这一章的最后，讨论重积分的完整理论时，我们再讲面积的严格定义，并且更准确地讲可以求积分的那样的区域(σ) 的概念，以及如何把它分成各部分区域，并且对于连续函数 $f(N)$ 以及某些类的间断函数，来证明上述和的极限的存在.

56. 二重积分的计算法

把二重积分考虑作容积，我们可以把二重积分化为两次积分.

对于区域(σ) 应用直角坐标系，设用边 $\Delta x,\Delta y$ 平行于坐标轴的矩形来分割面积得到单元 $\Delta\sigma$(图 38)，并设(x,y) 是点 N 的坐标. 这时可以写成

$$f(N)=f(x,y)$$
$$\Delta\sigma=\Delta x\Delta y$$
$$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

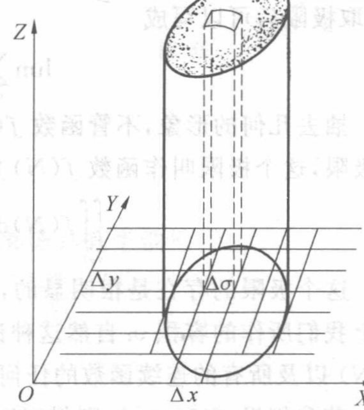

图 38

并且

$$\iint_{(\sigma)} f(N)\mathrm{d}\sigma=\lim\sum_{(\sigma)} f(x,y)\Delta x\Delta y$$
$$=\iint_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

另一方面，应用[54] 中所讲的用两次积分来表达容积的方法，这可以写成

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}y\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\mathrm{d}x \qquad (7)$$

这就给出计算二重积分的法则，而与函数 $f(x,y)$ 的几何意义无关.

若是先对 y 求积分，则先把 x 算作常数，而积分限 y_1 与 y_2 是 x 的函数，这两个函数是由[54]中公式(2)所确定的. 若先对 x 求积分，也有类似的情况. 只有当积分区域是个矩形而它的边平行于坐标轴时，在两次积分中先求积分的积分限才可能是常数，而不依赖于第二次积分的积分变量. 若(σ)是介于直线(图 39)

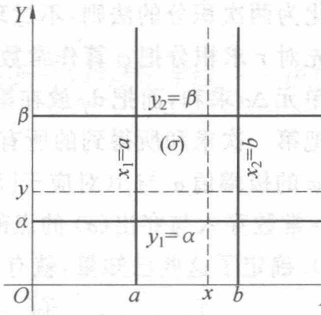

图 39

$$x_1=a, x_2=b, y_1=\alpha, y_2=\beta$$

的矩形区域，则

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x \tag{8}$$

表达式 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 叫作在直角坐标系中的面积单元.

注意，在公式(7)中把 x 看作常数先对 y 求积分这件事，就对应于沿着平行于 OY 轴的一竖条内所含的矩形求和，其中所有的矩形有相同的宽度 $\mathrm{d}x$，它被提出在第一次求积分的记号之外. 第二次对 x 求积分对应于把沿平行于 OY 轴的各条求和所得的所有结果再相加. 在本章最后一节中我们讲公式(7)与(8)的严格根据.

现在我们用极坐标 (r,φ) 来处理区域(σ). 这时曲面(S)的方程应当写成 $z=f(r,\varphi)$.

画出曲线族 $r=$常数以及 $\varphi=$常数，就是同心圆周以及通过原点的半线，我们得到单元 $\Delta\sigma$(图 40). 半径为 r 与 $(r+\Delta r)$ 的圆弧以及斜角为 φ 与 $(\varphi+\Delta\varphi)$ 的两条半线交成的曲线图形 $\Delta\sigma$，可以考虑作边长为 Δr 与 $r\Delta\varphi$ 的矩形，所差的只是高阶的无穷小，于是

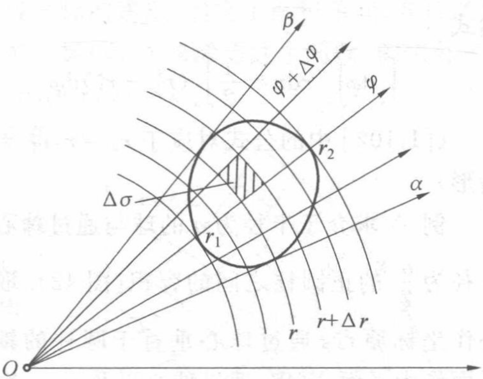

图 40

$$\Delta\sigma=r\Delta r\Delta\varphi$$

这时可以写成

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\mathrm{d}\sigma=\lim\sum_{(\sigma)} f(r,\varphi)r\Delta r\Delta\varphi=\iint\limits_{(\sigma)} f(r,\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

这里我们得到一个二重积分，它的被积函数是 $f(r,\varphi)r$. 为要计算它，可以

应用化为两次积分的法则，不过现在只是 r 与 φ 占有了 x 与 y 的地位.

先对 r 求积分把 φ 算作常数，这对应于沿着介于两个半线 φ 与 $(\varphi+\mathrm{d}\varphi)$ 之间的单元 $\Delta\sigma$ 求和，而把 $\mathrm{d}\varphi$ 放在第一次求积分的记号之外. 第二次对 φ 求积分对应于把第一次求和所得到的所有结果相加. 应用上述法则时，我们首先标记出变量 φ 的极端值 α 与 β（对应于[54] 中 x 的极端值）. 以后对于固定的 φ 找出半线 $\varphi=$常数穿入与穿出 (σ) 的点的向量半径 r_1 与 r_2（这对应于在[54] 中确定 y_1 与 y_2）. 确定了这些已知量，就有

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} f(r,\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1}^{r_2} f(r,\varphi)r\mathrm{d}r \tag{9}$$

其中 r_1 与 r_2 是 φ 的已知函数.

图 40 对应于坐标原点在界线 (l) 外的情形. 若原点在界线 (l) 内，则可把 φ 看作是由 0 变到 2π，并且对于给定的 φ 值，r 由 0 变到 r_2，其中 r_2 来自曲线 (l) 的方程：$r_2=\psi(\varphi)$，这就给出（图 41）

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r_2} f(r,\varphi)r\mathrm{d}r$$

表达式

$$r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \tag{10}$$

叫作极坐标系中的面积单元.

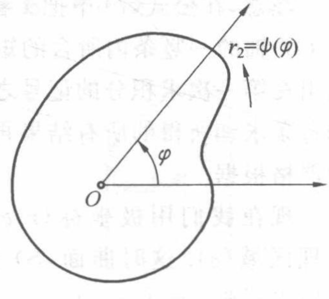

图 41

特别地，若 $f(N)=1$，我们就得到在[I，102] 中所讲的曲线所包围的面积的极坐标表达式

$$\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2^2-r_1^2)\mathrm{d}\varphi$$

（[I，102] 中的公式对应于 $r_2=r, r_1=0$ 的情形）

例 求介于半径为 a 的球与通过球心的半径为 $\frac{a}{2}$ 的正圆柱之间的容积（图 42）. 取球心作坐标原点，通过球心垂直于圆柱的轴的平面作为平面 XOY，通过球心以及平面 XOY 与圆柱的轴的交点的直线作为 OX 轴. 根据对称性，可以说，未知容积是介于平面 ZOX，XOY 以及上半球之间的一部分圆柱体的容积的四倍.

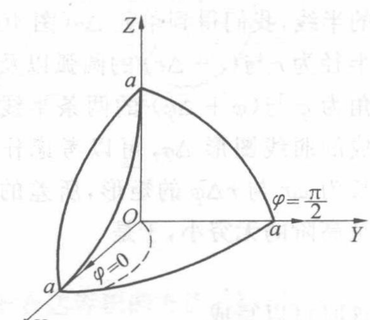

图 42

这里积分区域是圆柱的半个底，它的界线由半圆周

$$r=a\cos\varphi$$

以及 OX 轴上的线段组成,其中角度 φ 由0改变到 $\frac{\pi}{2}$,对应于半线——由 OX 轴到 OY 轴.

球面的方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

在这情形下可以写成

$$z^2=a^2-(x^2+y^2),z=\sqrt{a^2-r^2}$$

所以,未知容积是

$$\begin{aligned}
v&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r\\
&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3-a^3\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{4}{3}a^3\left[\varphi+\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

57. 曲线坐标

在前一段中,我们就直角坐标与极坐标的情形,确定了面积单元,并且考虑了计算积分的问题.现在我们就任何的坐标 (u,v) 来考虑这个问题.依照公式

$$\varphi(x,y)=u,\psi(x,y)=v \tag{11}$$

引用任何的新的变量 u 与 v 来替代直角坐标 x 与 y.

给 u 与 v 所有可能的常数值,在平面上就得到两族线(图43),一般说来,这些线都是曲线.平面上点 M 的位置是由一对数 (x,y) 来确定的,或者根据公式(11),它就被一对数 (u,v) 所确定.这一对数 (u,v) 叫作点 M 的曲线坐标.由方程(11)解出 x 与 y,就得到直角坐标 (x,y) 通过曲线坐标 (u,v) 的表达式

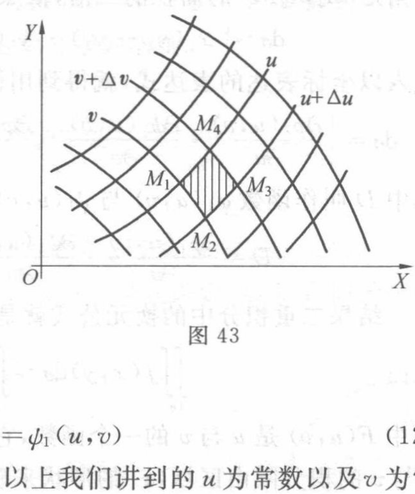

图 43

$$x=\varphi_1(u,v),y=\psi_1(u,v) \tag{12}$$

在极坐标的情形下 u 就是 r,v 就是 φ.以上我们讲到的 u 为常数以及 v 为常数的线叫作曲线坐标 (u,v) 的坐标线.它们形成两族线(在极坐标中是圆周族

与半线族).

现在我们来确定用曲线坐标(u,v)时的面积单元$d\sigma$.

为此我们考虑两对很近的坐标线

$$\varphi(x,y)=u,\varphi(x,y)=u+\mathrm{d}u$$
$$\psi(x,y)=v,\psi(x,y)=v+\mathrm{d}v$$

所形成的面积单元$M_1M_2M_3M_4$(图43).

不计高阶无穷小,这个四边形$M_1M_2M_3M_4$的顶点的坐标就是[I,68]:

$(M_1)x_1=\varphi_1(u,v)$;$y_1=\psi_1(u,v)$;

$$(M_2)x_2=\varphi_1(u+\mathrm{d}u,v)=\varphi_1(u,v)+\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u;$$

$$y_2=\psi_1(u+\mathrm{d}u,v)=\psi_1(u,v)+\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u;$$

$$(M_3)x_3=\varphi_1(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v)=\varphi_1(u,v)+\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v;$$

$$y_3=\psi_1(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v)=\psi_1(u,v)+\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v;$$

$$(M_4)x_4=\varphi_1(u,v+\mathrm{d}v)=\varphi_1(u,v)+\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v;$$

$$y_4=\psi_1(u,v+\mathrm{d}v)=\psi_1(u,v)+\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

由这些公式直接推出,$x_2-x_1=x_3-x_4$与$y_2-y_1=y_3-y_4$,由这两个等式推知,线段M_1M_2与M_4M_3相等而且同向.同理,线段M_1M_4与M_2M_3也是如此,就是说,不计高阶无穷小的话,$M_1M_2M_3M_4$是个平行四边形,它的面积等于三角形$M_1M_2M_3$的面积的二倍,依照解析几何学中已知的公式,就有

$$\mathrm{d}\sigma=|x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+(x_2y_3-x_3y_2)|$$

代入以坐标表达的表达式,就得到用任何曲线坐标时的面积单元公式

$$\mathrm{d}\sigma=\left|\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=|D|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中D叫作函数$\varphi_1(u,v)$与$\psi_1(u,v)$对变量u与v的函数行列式

$$D=\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}$$

结果二重积分中的换元公式就是

$$\iint_{(\sigma)}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{(\sigma)}F(u,v)\,|D|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{13}$$

其中$F(u,v)$是u与v的一个函数,它是由$f(x,y)$经过变换(12)得到的结果.u与v的积分限由区域(σ)的形状来确定,就像在[56]中对极坐标所讲的一样.

在变换(11)的公式中,我们把u与v看作点的新的曲线坐标,而平面则看

作是不改变的.我们也可以把 u 与 v 仍然看作是直角坐标,那时公式(11) 就给出平面的变换,使得具有直角坐标(x,y) 的点变换为具有直角坐标(u,v) 的点.这样的变换使得区域(σ) 变形为新的区域(Σ).从这样的观点来看,我们应当把公式(13) 改写成

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{(\Sigma)} F(u,v)\mid D\mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

这里 u 与 v 是区域(Σ) 的点的直角坐标,沿(Σ) 的积分的积分限像在[56] 中所讲的一样来确定.若设 $f(x,y)=F(u,v)=1$,则得到区域(σ) 的面积 σ 的一个表达式是写成沿(Σ) 的积分的形状

$$\sigma=\iint_{(\Sigma)} \mid D\mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

由此看出,照新的观点来看,$\mid D\mid$ 是当区域(Σ) 形变为区域(σ) 时,在指定点的面积的改变系数,也就是在(σ) 中的无穷小面积与在(Σ) 中的对应的面积之比的极限.

例 1 考虑在平面 XOY 上的圆 $x^2+y^2\leqslant 1$,以坐标原点为圆心,1 为半径.依照化为极坐标的公式:$x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$,引用新的坐标,不过我们不把 r 与 φ 考虑作极坐标,而考虑作直角坐标,就是说,算作具有直角坐标(x,y) 的点变换为具有直角坐标(r,φ) 的点.这时显然上述的圆变换为一个矩形,以直线 $x=0,x=1,y=0,y=2\pi$(或 $r=0,r=1,\varphi=0,\varphi=2\pi$) 为界,这里坐标原点 $x=y=0$ 对应于这个矩形的整个一边 $r=0$,而且这矩形的相对两边 $\varphi=0$ 与 $\varphi=2\pi$ 对应于圆的一个相同的半径.应用公式(8) 所表达的在直角坐标系中化二重积分为两次积分的法则,直接看出,当在极坐标中沿上述的圆求积分时,对 r 的积分限应当是 $r=0$ 与 $r=1$,对 φ 的积分限是 $\varphi=0$ 与 $\varphi=2\pi$.类似的可以解释[56] 中所讲的在极坐标中求积分时确定积分限的法则.

在这情形下

$$D=\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial\varphi}-\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r}=r$$

像我们以前讲过的一样,$\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$.

例 2 用第二个观点再看另一个特例,考虑介于坐标轴与直线 $x+y=a$ 之间的直角三角形(σ).位于(σ) 之内的点由下面的不等式确定,就是它们的坐标应当满足这些不等式

$$x>0,y>0,x+y<a \tag{14}$$

引用新的变量(u,v),令

$$x+y=u,ay=uv$$

就是

$$u=x+y, v=\frac{ay}{x+y}$$

或

$$x=\frac{u(a-v)}{a}, y=\frac{uv}{a}$$

我们把(u,v)也考虑作直角坐标. 由最后的公式推知, 不等式(14)在新变量下相当于不等式: $0<u<a, 0<v<a$, 它们确定一个正方形(Σ), 原点是一个顶点, 边是沿坐标轴的方向. (σ)中任何一点(x,y)对应于(Σ)中一个确定的点(u,v), 反之亦然. 我们得到关于D的表达式

$$D=\frac{a-v}{a}\cdot\frac{u}{a}-\frac{u}{a}\cdot\frac{v}{a}=\frac{u}{a}$$

于是公式(13)就有下面的形状

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{(\Sigma)} F(u,v)\frac{u}{a}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

或者, 依照公式(7)与公式(8)取积分限

$$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{a-x} f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\int_0^a u\mathrm{d}u\int_0^a F(u,v)\mathrm{d}v$$

58. 三重积分

在[55]中所讲的二重积分, 也可以不解释作物体的容积, 而作为分布在平面区域(σ)上的质量. 为此, 我们假想在(σ)上分布着物质. 设Δm是在单元$\Delta\sigma$上的质量, 在$\Delta\sigma$内含有某一点N. 若当$\Delta\sigma$无限缩向点N时, 比$\frac{\Delta m}{\Delta\sigma}$($\Delta\sigma$是上述单元的面积)趋向一个确定的极限$f(N)$, 则这个极限确定出在点$N$处物质分布的面密度

$$\lim\frac{\Delta m}{\Delta\sigma}=f(N)$$

若把(σ)分为小的单元$\Delta\sigma$, 则个别单元的质量就近似等于乘积$f(N)\Delta\sigma$, 而且对于在(σ)上的全部质量可以写出近似式

$$m\approx\sum_{(\sigma)} f(N)\Delta\sigma$$

这里要依照填满(σ)的所有的单元$\Delta\sigma$求和. 每一个单元$\Delta\sigma$愈小时, 这个近似等式就愈准确. 当每一个单元$\Delta\sigma$各方向都无限缩小并且这些单元的数目无限增加时取极限, 我们就有

$$m=\lim\sum_{(\sigma)} f(N)\Delta\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} f(N)\mathrm{d}\sigma$$

用完全类似的方法, 考虑分布在空间的物质的质量, 就引出三重积分的概念. 我们假想某一个介于封闭曲面(S)的空间区域(v). 设在这区域中分布有物

质,它的总质量是 m. 把整个区域(v) 分成 n 个小单元 Δv,并且相应地把每一个小单元的质量记作 Δm. 设当单元 Δv 趋向位于这单元之内的一点 M 时,比$\dfrac{\Delta m}{\Delta v}$有极限. 这个极限就确定了分布的物质在点 M 的(体) 密度.

我们把这个极限记作 $f(M)$

$$\lim \frac{\Delta m}{\Delta v}=f(M)$$

像以前一样,可以写出近似式

$$m \approx \sum_{(v)} f(M)\Delta v$$

这里要依照填满容积 v 的所有的单元求和.

当每个单元 Δv 在各个方向都无限缩小时取极限,就有

$$m=\lim \sum_{(v)} f(M)\Delta v$$

这个物理例子引出了三重积分的一般定义,它与二重积分的定义类似. 设(v) 是三维空间的有界区域,$f(M)$ 是确定于这个区域上的点的函数,就是说,在区域(v) 的每一点 M,这函数取确定的值. 把(v) 分为 n 部分,设 $\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots,\Delta v_n$ 是这些部分的容积,而 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 各是这些子区域上的任何一点.

作出乘积的和

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta v_k \tag{15}$$

当分割的数目 n 无限增加而每一个子区域无限缩小时,这个和的极限叫作函数 $f(M)$ 沿区域(v) 的三重积分

$$\iiint_{(v)} f(M)\mathrm{d}v=\lim \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta v_k$$

附注 [参考 55] 设 d_k 是子区域 Δv_k 的两点间的最大距离(这区域的直径),而 d 是 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 这些数中的最大的数. 每一个子区域无限减小这句话就有 $d\to 0$ 的意义. 若用字母 I 记积分的值,则上述的定义相当于:当给定任何正数 ε 时,存在这样的正数 η,使得只要 $d\leqslant \eta$,就有

$$\left| I-\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta v_k \right| \leqslant \varepsilon$$

在本章末我们再讨论三重积分和二重积分的严格理论.

若在整个区域(v) 上 $f(M)=1$,则得到这区域的容积 v

$$v=\iiint_{(v)} \mathrm{d}v$$

为要计算三重积分,需要把它化为我们已经讲过计算方法的单积分或二重积分.