Matrix Theory

矩阵论

顾桂定　张振宇　编

上海财经大学出版社

矩阵论

顾桂定　张振宇　编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论/顾桂定,张振宇编．—上海：上海财经大学出版社，2017.12

ISBN 978-7-5642-2793-7/F・2793

Ⅰ.①矩…　Ⅱ.①顾… ②张…　Ⅲ.①矩阵论　Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 174276 号

□ 责任编辑　刘光本
□ 责任电邮　lgb55@126.com
□ 责编电话　021—65904890
□ 封面设计　钱宇辰

JU ZHEN LUN
矩　阵　论
顾桂定　张振宇　编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市中山北一路 369 号　邮编 200083)
网　　址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海叶大印务发展有限公司印刷装订
2017 年 12 月第 1 版　2017 年 12 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16　13.75 印张　318 千字
定价：45.00 元

内容简介

本书比较全面地介绍了矩阵理论的基础知识。全书共分九章，分别介绍了线性空间与内积空间，线性变换和矩阵的Jordan标准形，范数与极限，矩阵函数与函数矩阵，矩阵分解，一些特殊矩阵，非负矩阵，Kronecher积与矩阵方程和最小二乘问题。附录简述了一元多项式的有关概念和性质。每一章都配备习题，以便读者学习与巩固。

本书可作为理工科以及财经类院校的研究生和高年级本科生的学习教材，也可作为有关专业教师和工程技术人员的参考书。

前 言

上海财经大学于2000年设立应用数学系，2001年开始招收本科生，2005年获得应用数学专业硕士点授予权。作为该专业的基础必修课，从2007年起开设《矩阵论》课程，由编者担任主讲教师。

传统意义上《矩阵论》更多地在理工科类学校开设。作为财经类学校，授予学生《矩阵论》中的哪些内容，讲到何种程度，一直是我们思考的问题。前几年，我们主要通过编写讲义给学生们授课，其中一些内容主要参阅了[4,3,7]（见“参考文献”）中的有关章节作为讲课线索，而在非负矩阵和最小二乘问题方面我们讲了比较多的内容，这主要是考虑到在财经类院校的数量经济、统计学（多元统计）等领域用到了许多这方面的知识。2015年底，我们申请到上海财经大学《矩阵论》精品课程建设项目。借此机会，我们把编写出版一本《矩阵论》教材作为该项目的一项主要工作。

基于前几年的授课讲义，我们重新整理补充了一些内容，以成完整系统。本书共分九章，前七章和附录由顾桂定编写，后两章由张振宇编写。第一章和第二章介绍线性空间与内积空间、线性变换与矩阵的Jordan标准形，这部分内容属于《高等代数》中的知识，主要是为非数学专业毕业的学生准备。第三章介绍范数与极限，这是矩阵分析运算中所要用到的工具。第四章介绍矩阵函数与函数矩阵，通过矩阵多项式的概念与性质引进了矩阵函数的定义。第五章介绍矩阵分解，主要有三角分解、QR分解、Schur分解和奇异值分解。第六章介绍一些特殊矩阵，包括正规矩阵、Hermite矩阵及其正定矩阵、不可约矩阵和投影矩阵。第七章介绍非负矩阵，包括M-矩阵理论。第八章和第九章分别介绍矩阵方程和最小二乘问题。考虑到一些内容涉及多项式的性质，我们在附录里简述了一元多项式的有关概念和性质。此外，每一章都配备一些习题。

感谢上海财经大学研究生院以及数学学院对本书出版给予的支持，感谢上海财经大学出版社刘光本编辑为本书出版付出的辛勤劳动。本书的出版也得到了国家自然基金项目（No.11371105，No.11671246）的资助，在此一并表示感谢。由于编者水平有限，书中不妥之处敬请读者指正。

编　者

2017年12月

目录

第一章

线性空间与内积空间

本章介绍线性空间的基本概念与理论.这是学习矩阵轮的重要基础.若在线性空间里再引进内积运算,则该线性空间成了内积空间,其是三维几何空间的推广.

§1.1 集合与映射

集合与映射是学习本章及下章线性变换所需的概念.

一、集合

集合是数学中最基本的概念之一.**集合**是指根据研究需要把一些具有共性特征的个体放在一起而构成的总体.例如,全体有理数可以构成一个集合,某个线性方程组解的全体也可以构成一个集合.构成一个集合的个体称为该集合的**元素**.由数构成的集合称为**数集**.如全体有理数构成的集合是一数集.集合一般用大写字母表示,如 A, B, S 等,而元素一般用小写字母表示,如 a, b 等.若 a 为集合 S 中的元素,称为 **a 属于 S**,用记号 $a \in S$ 表示;若 a 不是 S 中的元素,称为 **a 不属于 S**,用记号 $a \notin S$ 表示.

集合是由元素构成的,故表示集合的方式一般有两种:**列举法**和**概括法**.列举法就是把一个集合的所有元素一一列举出来,如由元素 0, 2, 4, 6, 8 构成的集合 S,则可以写成 $S=\{0, 2, 4, 6, 8\}$;而概括法则是把构成集合 S 的元素特征表示出来,如由平面上单位圆上的点构成的集合 S,可以写成 $S=\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}$.

对于一些特殊数集,我们用专用记号表示:C 表示复数全体,R 表示实数全体,Q 表示有理数全体,Z 表示整数全体,N 表示自然数(包括零)全体,N^+ 表示正整数全体.不包含任何元素的集合,称为**空集**,记作$\varnothing$.

设 A, B 是两个集合,若 A 中的元素都是 B 中的元素,则称 A 是 B 的一个**子集**,记作 $A \subseteq B$,即若 $x \in A$,则有 $x \in B$.若 $A \subseteq B$,且有 $x \in B$,但 $x \notin A$,则称 A 是 B 的一个**真子集**.若 A, B 两个集合含有相同的元素,则称 A, B **相等**,记作 $A=B$,也即若 $A \subseteq B$,同时 $B \subseteq A$,则 $A=B$.

我们约定空集$\varnothing$是任何集合的子集,显然集合 A 也是其本身的一个子集.

下面我们给出集合的两种运算.

定义 1.1 设 A, B 是两个集合,把既属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的**交集**,记为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}.$$

把属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

例如，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 3, 4\}$，则 $A \cap B=\{2, 3\}$，$A \cup B=\{1, 2, 3, 4\}$. 显然 $A \cap B$ 既是 A 的子集，也是 B 的子集；而 A 与 B 都是 $A \cup B$ 的子集.

交集与并集的定义可以推广到多个集合.

运算规则 设 A, B, C 是三个集合，则

(1) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.

(2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

证明 我们证明(3)的第一式，其余留作习题.设 $x \in A \cap (B \cup C)$，则 $x \in A$，$x \in B \cup C$. 若 $x \in B$，则 $x \in A \cap B$；若 $x \in C$，则 $x \in A \cap C$. 无论何种情形，都有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，即

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

反之，设 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$. 由此推出 $x \in A$，$x \in B$，或 $x \in A$，$x \in C$. 无论何种情形，都有 $x \in A \cap (B \cup C)$，即

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

如此，成立 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

定义 1.2 设 F 是含有数 0 和 1 的数集，若 F 中任意两个数(可以相同)的和、差、积和商(除数不为零)仍然是 F 中的数，则称 F 是一个**数域**.

例如，全体复数 C 是一个数域，全体实数 R 和全体有理数 Q 也都是数域，但全体整数 Z 则不是数域.

为方便起见，我们把 F 中两个数的某种运算结果仍然在 F 中说成是 F 关于该运算封闭.因此，数域 F 可以说成是含有数 0 和 1 且关于四则运算封闭的数集.

二、映射

定义 1.3 设 A, B 是两个集合，若有某个法则，记作 σ，对每个 $x \in A$，在 B 中都有唯一的元素 $y \in B$ 按该法则与 x 对应，记作 $y=\sigma(x)$，则称法则 σ 是 A 到 B 的一个**映射**，记作 σ: $A \to B$；并称 y 是 x 的**像**，x 是 y 的**原像**；A 称作 σ 的**定义域**，而称 $\sigma(A) = \{y \mid y=\sigma(x), x \in A\} \subseteq B$ 为 σ 的**值域**.

例 1.1 (1) 设 $A=[-1, 1]$，定义

$$\sigma(x) = x^2, \quad x \in A,$$

这是 $A \to R$ 的一个映射，且 $\sigma(A)=[0, 1]$.

(2) 记 N_2 是全体偶数，定义

$$\sigma(n) = 2n, \quad n \in N.$$

这是 $N \to N_2$ 的一个映射，且 $\sigma(N)=N_2$.

定义 1.4　设 $\sigma: A \to B$ 是一个映射.

(1) 若 $\sigma(A)=B$，则称 σ 是**映上的或满射**，即对任意 $y \in B$，存在 $x \in A$，使得

$$\sigma(x)=y.$$

(2) 若当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $\sigma(x_1) \neq \sigma(x_2)$，则称 σ 是 **1-1 的或单射**.

(3) 若映射 σ 既是映上的又是 1-1 的，则称 σ 是 **1-1 对应或双射**.

如例 1.1 中(2)的映射是一个 1-1 对应，而(1)则不是.

所谓**可列集**，我们可以定义为：与 N 存在一个 1-1 对应的集合.因此 N_2 是个可列集，其元素和自然数全体 N 一样多，尽管 N_2 是 N 的一个真子集.

下面我们再介绍一些有关映射的概念.

设 σ 与 τ 都是 $A \to B$ 的映射，若对任意 $x \in A$，都有

$$\sigma(x)=\tau(x),$$

则称映射 σ, τ **相等**，记作 $\sigma=\tau$.

一个自身到自身的映射，即

$$\sigma(x)=x, \quad \forall x \in A,$$

则称 σ 是一个**恒等映射**，记作 ι.

设 $\sigma: A \to B$，$\tau: B \to C$，定义**乘积映射** $\tau\sigma$，

$$\tau\sigma(x)=\tau(\sigma(x)), \quad \forall x \in A,$$

其是 $A \to C$ 的一个映射.

下面我们定义逆映射.

设 $\sigma: A \to B$ 是 1-1 的映射，则对任意 $y \in \sigma(A)$，存在唯一的原像 $x \in A$，使 $y=\sigma(x)$，现定义：

$$\sigma^{-1}(y)=x, \quad y \in \sigma(A),$$

则称 σ^{-1} 是 σ 的**逆映射**(此时也称 σ 是—**可逆映射**)，其是 $\sigma(A) \to A$ 的一个 1-1 映射.

如例 1.1 中(2)的映射，其逆映射是 $N_2 \to N$ 的映射：

$$\sigma^{-1}(m)=\frac{1}{2}m, \quad m \in N_2.$$

显然，$\sigma^{-1}\sigma=\sigma\sigma^{-1}=\iota$.

例 1.2　设映射 $\sigma: A \to B$ 和 $\tau: B \to C$ 都是 1-1 对应，证明 σ^{-1} 和 $\tau\sigma$ 也是 1-1 对应.

证明　我们就 σ^{-1} 来证，$\tau\sigma$ 留作习题.由于 σ 是映上的，故 σ^{-1} 对任意 $y \in B$ 都有定义，即其是 $B \to A$ 的映射.由逆映射的定义，σ^{-1} 是映上的.而对 B 中任意 $y_1 \neq y_2$，存在 $x_1 \neq x_2 \in A$，使 $y_1=\sigma(x_1)$，$y_2=\sigma(x_2)$，也即

$$x_1=\sigma^{-1}(y_1), \quad x_2=\sigma^{-1}(y_2),$$

而 $x_1 \neq x_2$，即 σ^{-1} 也是 1－1 的.如此，σ^{-1} 是 1－1 对应.

§1.2 线性空间及其基与维数

在线性代数里，我们学习了由全体 n 维实向量(有序数组)构成的向量空间 R^n，在 R^n 中我们具体定义了向量的加法和数乘两种运算，且满足一定的运算性质.本节我们要把这一向量空间推广到抽象的线性空间.这里的抽象主要体现在：集合中的元素是抽象的，其可以是有序数组(R^n 中的向量)，也可以是 $m \times n$ 的实矩阵或 n 次多项式，等等；加法和数乘的两种运算也是抽象的，其可以这样定义，也可以那样定义，只要满足一定的运算规则.见线性空间的定义和例 1.8.

一、线性空间的定义

定义 1.5 设 V 是一非空集合，F 是一数域.在 V 中定义两种运算：

(1) **加法**：对任意 $\alpha, \beta \in V$，存在唯一的 $\eta \in V$ 与它们对应，称为 α 与 β **的和**，记为 $\eta = \alpha + \beta$.

(2) **数乘**：对任意 $\alpha \in V$，$k \in F$，都存在唯一的 $\delta \in V$ 与它们对应，称为 k 与 α 的**数量乘积**(简称**数乘**)，记为 $\delta = k\alpha$.

如果 V 中的这两种运算满足下述八条规则(其中，$\alpha, \beta, \gamma \in V$，$k, l \in F$)：

1° 交换律 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$；

2° 结合律 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$；

3° 存在零元素 $0 \in V$，使 $\forall \alpha \in V$，有 $\alpha + 0 = \alpha$；

4° 存在负元素，即对 $\alpha \in V$，存在元素 $\beta \in V$，使 $\alpha + \beta = 0$；

5° $1\alpha = \alpha$；

6° 结合律 $k(l\alpha) = (kl)\alpha$；

7° 分配律 $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$；

8° 分配律 $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$.

则称 V 是数域 F 上的**线性空间**.若 $F = R$，则称 V 为**实线性空间**；若 $F = C$，则称 V 为**复线性空间**.

注记 在 V 中定义了两种运算，可以简叙为：定义的两种运算关于 V 是封闭的，即 $\alpha + \beta \in V$，$k\alpha \in V$.

线性空间 V 中的加法和数乘统称为**线性运算**.V 中的元素也可称为**向量**，线性空间也可称为**向量空间**.这里的向量意义已很广泛，不再仅指 R^n 中的 n 维向量 (其可以称为有序数组).

例 1.3 R^n 按通常向量加法和数乘的定义，构成一实线性空间.

解 首先 R^n 非空；其次在 R^n 上定义了加法和数乘的运算，即对任意 R^n 中任意向量 $\alpha = [a_1 \ \ \cdots \ \ a_n]^T$，$\beta = [b_1 \ \ \cdots \ \ b_n]^T$ 和任意实数 k，定义了加法和数乘：

$$\alpha + \beta = [a_1 + b_1 \ \ \cdots \ \ a_n + b_n]^T,$$

$$k\alpha=[ka_1 \quad \cdots \quad ka_n]^T.$$

显然，$\alpha+\beta\in R^n$，$k\alpha\in R^n$，即R^n关于上述的加法和数乘封闭.最后如此定义的加法和数乘满足定义1.5中的八条规则，其中零元素即为零向量$0=[0 \quad \cdots \quad 0]^T$，负元素即为负向量$-\alpha=[-a_1 \quad \cdots \quad -a_n]^T$. 因此$R^n$是一实线性空间.

一般地，我们用F^n表示数域F上n维向量(有序数组)的全体，即

$$F^n=\{\alpha \mid \alpha=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{bmatrix}, a_i\in F\},$$

按通常向量的加法和数乘，F^n构成了数域F上的线性空间，其元素α表示的是列向量.

例1.4　记$F^{m\times n}$表示数域F上所有$m\times n$矩阵全体，按通常的矩阵加法和数乘，$F^{m\times n}$构成了数域F上的线性空间.

解　首先$F^{m\times n}$非空；其次$F^{m\times n}$关于通常的矩阵加法和数乘是封闭的，即对$F^{m\times n}$中任意矩阵$A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]$和任意数$k\in F$，$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]\in F^{m\times n}$，$kA=[ka_{ij}]\in F^{m\times n}$，最后矩阵加法和数乘满足定义中的八条规则，因此$F^{m\times n}$是数域$F$上的线性空间.

例1.5　$[a,b]$上的连续实函数全体，记作$C_{[a,b]}$，按通常的函数加法和数乘，构成一实线性空间.

解　首先$C_{[a,b]}$非空；其次函数的加法和数乘关于$C_{[a,b]}$是封闭的，即对$C_{[a,b]}$中任意函数$f(x)$，$g(x)$和任意实数k，$f(x)+g(x)\in C_{[a,b]}$，$kf(x)\in C_{[a,b]}$，最后函数的加法和数乘满足八条性质，因此$C_{[a,b]}$是一实线性空间.

一般来说，要验证集合V在数域F上是否构成线性空间，有三个要素：

1°　$V\neq\varnothing$；

2°　V关于所定义的线性运算(加法和数乘)是封闭的，即对任意$\alpha,\beta\in V$和任意$k\in F$，有

$$\alpha+\beta\in V,\ k\alpha\in V;$$

3°　所定义的加法和数乘运算满足定义中的八条规则.

线性空间V有下面一些基本性质.

(1) 零元素0是唯一的.

证明　设0_1，0_2是V中的任意两个零元素，则$0_1=0_1+0_2=0_2+0_1=0_2$.

(2) V中元素的负元素是唯一的.

证明　设β_1，β_2是α的任意两个负元素，则

$$\begin{aligned}\beta_1&=\beta_1+0=\beta_1+(\alpha+\beta_2)=(\beta_1+\alpha)+\beta_2\\&=(\alpha+\beta_1)+\beta_2=0+\beta_2=\beta_2+0=\beta_2.\end{aligned}$$

一般记α的负元素为$-\alpha$.

(3) 对任意 $\alpha \in V, k \in F$，成立 $0\alpha = \theta$ 和 $k\theta = \theta$，且 $k\alpha = \theta$ 当且仅当 $k = 0$ 或 $\alpha = \theta$. 这里的 θ 表示 V 中的零元素，以示与数 0 的区别.

证明 因为

$$\alpha + 0\alpha = 1\alpha + 0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha = \alpha,$$

两边加上 $-\alpha$ 即得 $0\alpha = \theta$. 又因为

$$k\theta + k\alpha = k(\theta + \alpha) = k\alpha,$$

两边加上 $-k\alpha$ 即得 $k\theta = \theta$.

对于最后一个结论的充分性由上面已证得.下面我们来证明必要性.设 $k\alpha = \theta$，若 $k = 0$，则是结论；若 $k \neq 0$，则

$$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}\theta = \theta.$$

(4) 对任意 $\alpha \in V, k \in F$，有 $(-k)\alpha = -(k\alpha)$，特别 $(-1)\alpha = -\alpha$.

证明 因为 $k\alpha + (-k)\alpha = (k + (-k))\alpha = 0\alpha = 0$，所以 $(-k)\alpha$ 是 $k\alpha$ 的负元素，即 $(-k)\alpha = -(k\alpha)$.

利用负元素我们可以定义 α 与 β 的差：

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

易证：$\alpha + \beta = \gamma$，当且仅当 $\alpha = \gamma - \beta$（留作读者自行验证).

再举几个线性空间的实例.

例 1.6 设 $R[x]$ 表示变量 x 的一元实系数多项式全体的集合，包括零多项式.按通常的多项式加法和数乘两种运算，构成一实线性空间，其中零元素 0 为零多项式.

如果只考虑 $R[x]$ 中次数小于 n 的多项式，再添上零多项式构成的集合

$$R_n[x] = \{a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in R\},$$

则 $R_n[x]$ 也是一实线性空间.

例 1.7 全体复数 C，按数的加法和乘法构成一复线性空间；同样全体实数 R 按数的加法和乘法构成一实线性空间；全体复数 C 也可构成一实线性空间；但全体实数 R 不构成复线性空间.

此例表明，是否构成线性空间与数域 F 有关.另外，对于同一个集合 V 和相同的数域 F，V 是否构成数域 F 上的线性空间与加法和数乘运算的定义有关.

例 1.8 再考虑 R^n，其加法仍按通常的向量加法，但数乘则按如下定义：

$$k \circ \alpha = \alpha, \quad \alpha \in R^n, k \in R.$$

当 $\alpha \neq 0$ 时，$(k+l) \circ \alpha = \alpha$，而 $k \circ \alpha + l \circ \alpha = \alpha + \alpha = 2\alpha$. 故 $(k+l) \circ \alpha \neq k \circ \alpha + l \circ \alpha$，即不满足定义 1.5 中的规则 8°，故 R^n 对于通常的向量加法和上述定义的数乘构不成线性空间.

二、基、维数与坐标

在《线性代数》课程中，我们已经学习过 R^n 中有关向量的线性组合与线性表示、线性

相关与线性无关等概念与性质,这些概念与性质都仅与向量的加法和数乘有关,而与元素本身无关.由于线性空间 V 定义了加法和数乘运算,因此 R^n 中有关线性表示和线性相关等的概念和相应的性质都可以平行移到线性空间 V 里.以下我们就不加证明地列出一些主要性质(这些结论的证明与 R^n 中完全一致).

设 V 是数域 F 上的线性空间,则有下列基本性质:

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(2) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关,而向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关,则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示,且表示法唯一.

(3) 若线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示,则 $s \leqslant t$.

(4) 向量组的等价具有自身性、对称性和传递性.等价的线性无关向量组必含有相同的向量个数.

定义 1.6 若 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是线性空间 V 中的 n 个线性无关的向量,且 V 中的任一向量 α 都可由其线性表示

$$\alpha = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n, \quad x_1, x_2, \cdots, x_n \in F, \tag{1.1}$$

则称 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是 V 的一组**基**,正整数 n 称为 V 的**维数**,记为 $\dim V = n$.这时也称 V 为 n 维线性空间.而称有序数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in F$ 为向量 α 在基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的**坐标**,记作 $x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$,其是 F^n 中的(有序数组)向量.为方便起见,(1.1)式可简写成

$$\alpha = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)x.$$

注记

(1) 由线性无关的性质,一个向量 α 在一组确定的基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的坐标是唯一的.

(2) 线性空间 V 的维数 n 是一有限数时,称 V 是一有限维线性空间;若 n 是一无限数时(表明 V 中有任意多个向量线性无关),则称 V 是一无限维线性空间,如 $C_{[a,b]}$.本课程讨论的问题都是在有限维线性空间上进行.

例 1.9 在线性空间 R^n 中,单位坐标向量组

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

线性无关,且对 $\forall \alpha \in R^n$, α 可由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 线性表示,故 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 R^n 的一组基,于是 $\dim R^n = n$.对于 R^n 中向量 $\alpha = [1 \quad \cdots \quad n]^T$,在基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 下的坐标为 $[1 \quad \cdots \quad n]^T$.同样向量组 $e_n, \cdots, e_2, e_1$ 也是 R^n 的一组基(注意 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 与 $e_n, \cdots, e_2, e_1$ 是 R^n 中两组不同的基),但向量 $\alpha = [1 \quad \cdots \quad n]^T$ 在基 $e_n, \cdots, e_2, e_1$ 下的