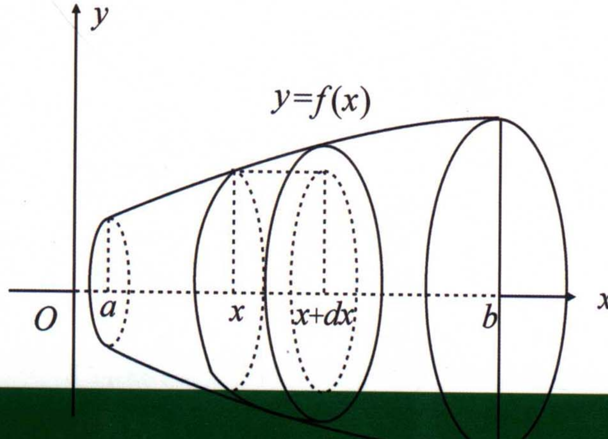
微积分（第二版）

主编　夏建业
副主编　赵梅春　陈锡祯

广东金融学院成人高等教育系列教材

weijifen



$$V=\int_a^b \pi f_{(x)}dx$$

暨南大学出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

广东金融学院成人高等教育系列教材

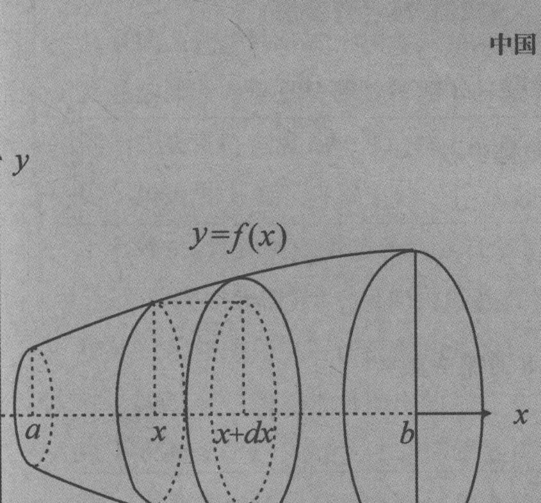
weijifen

微积分

（第二版）

主　编　夏建业　副主编　赵梅春 陈锡祯

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS
中国 · 广州



$$V=\int_a^b \pi f_{(x)} dx$$

图书在版编目（CIP）数据

微积分/夏建业主编. —2 版 . —广州：暨南大学出版社，2012. 8
（广东金融学院成人高等教育系列教材）
ISBN 978 - 7 - 5668 - 0277 - 4

Ⅰ. ①微…　Ⅱ. ①夏…　Ⅲ. ①微积分—成人高等教育—教材　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 184189 号

出版发行：暨南大学出版社

地　　址：中国广州暨南大学
电　　话：总编室（8620）85221601
　　　　　营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　　编：510630
网　　址：http：//www. jnupress. com　http：//press. jnu. edu. cn

排　　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　　刷：广州百思得彩印有限公司

开　　本：787mm × 960mm　1/16
印　　张：18. 875
字　　数：346 千
版　　次：2008 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 2 版
印　　次：2012 年 8 月第 3 次
印　　数：10001—16000 册

定　　价：38. 00 元

目 录

第一章　函数与极限

○ **本章学习要点**

(1) 掌握函数的定义，会求函数的定义域及函数值，特别是分段函数的定义域.

(2) 掌握反函数、复合函数、初等函数的概念.

(3) 掌握函数极限的定义；理解左、右极限的定义；会求分段函数在分界点的左、右极限；熟练掌握极限的四则运算法则，以及两个重要极限的公式.

(4) 了解函数连续性的概念、初等函数的连续性；会求函数的间断点.

(5) 知道几个常用的经济函数，实际中会建立一些简单经济问题的函数关系.

(6) 了解无穷小量与无穷大量的定义，以及它们的关系；掌握无穷小量的性质.

(7) 了解闭区间连续函数的一些简单性质.

函数是微积分中最重要的基本概念之一，也是微积分研究的主要对象. 本章主要介绍变量与变量之间相互关系的函数及其函数的极限. 有关函数的概念、表示法、性质及一些基本函数等方面的知识，在中学已有介绍. 本章只做总结性概括与复习，并做适当补充与提高，以便今后应用. 函数的极限是研究变量的变化对另一个变量所产生的影响，微分与积分都是以极限作为它的理论基础，它是贯穿整个微积分学的重要工具.

第一节　函数的概念

为了研究的方便，我们先来介绍在微积分的研究过程中，经常会遇到的几个基本术语和概念.

一、常量与变量

在研究或观察自然、社会和经济现象的过程中，经常会涉及各种各样的

量. 尽管它们杂乱纷繁，但是归结起来却只有以下两类：

(1) 在研究或观察过程中，始终保持不变的量，如甲、乙两地的距离、地基坚实的楼房高度、匀速直线运动的速度、某个商店的某种商品在某一天的单价等，这种量称之为**常量**. 在数学上，人们常用英文字母 a, b, c 等来表示常量.

(2) 在研究或观察过程中，不时发生变化(即可取不同值) 的量，如行驶汽车上的存油量、一年中某商品的销售量、正在行驶的汽车与目的地的距离等，这种量称之为**变量**. 在数学上，人们常用英文字母 x, y, z 等来表示变量.

值得注意的是:① 一个量究竟是常量还是变量，完全由研究或观察过程的具体条件来决定. 同一个量，在这个过程中是常量，而在另一过程中却可能是变量. 比如速度，在匀速运动中，它是常量；在匀加速运动中，它却是变量. ② 常量与变量是相对的，它们在一定条件下是可以相互转化的. 比如物理学中的重力加速度，在小范围内它是常量，而在大范围内它却是变量. 又如，一根铝制的筷子的长度，在某一小时或更短的时间范围内，它是个常量；可是在一天或者一月、一年的时间范围内，它却是个变量，因为它的长度会随气温等因素而变化.

二、区间与邻域

1. 区间

研究变量首先要确定变量的取值范围，在本书中如无特殊说明，变量的取值都是实数. 实数与数轴上的点一一对应(这里不再重述这一对应关系)，因此直接把实数与数轴上的对应点统称为“点 a”. 变量在其变化过程中所有可能的一切取值，构成了实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集 D. 而最常见的变量的取值范围是区间及其并集.

有限区间：

(1) 满足不等式 $a < x < b$ 的一切实数的集合称为开区间，记作(a, b).

(2) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的一切实数的集合称为闭区间，记作$[a, b]$.

(3) 满足不等式 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$ 的一切实数的集合称为半开半闭区间，分别记作$[a, b)$ 或$(a, b]$.

以上四种区间统称为以 a, b 为端点的有限区间.

无限区间：

数集$\{x \mid x > a\}$, $\{x \mid x \geqslant a\}$, $\{x \mid x < b\}$ 以及$\{x \mid x \leqslant b\}$ 都叫做无限区间，分别记作$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$. 这些区间对应在数轴上是一条射线.

实数集 $\mathbf{R}$ 本身也可以用区间$(-\infty, +\infty)$ 表示.

例 1　用区间表示下列不等式

(1) $|x-2| \leqslant 1$；(2) $|2x+1| > 2$

解　(1) $|x-2| \leqslant 1$ 的解集为

$$x \,\Big|\, |x-2| \leqslant 1 \quad = \quad x \,\Big|\, -1 \leqslant x-2 \leqslant 1$$

$$= \quad x \,\Big|\, 1 \leqslant x \leqslant 3 \quad = [1, 3]$$

(2) $\Big|2x+1\Big| > 2$ 的解集为

$$x \,\Big|\, 2x+1 \,\Big| > 2 \quad = \quad x \,\Big|\, 2x+1 < -2 \text{ 或 } 2x+1 > 2$$

$$= \quad x \,\Big|\, x < -\frac{3}{2} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}$$

$$= \quad -\infty, -\frac{3}{2} \cup \frac{1}{2}, +\infty$$

2. 邻域

邻域也是一种区间. 由于它是微积分的一个常用概念，一般区间无法取代它的作用，因此有必要对它进行专门的介绍. 所谓“点 x_0 的邻域”，实质上就是一个以点 x_0 为中心的开区间. 数学上常用的邻域有以下两种：

(1) 有心邻域：以 x_0 为中心，长度等于 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 叫做点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0, \delta)$. 即

$$U(x_0, \delta) = x \,\Big|\, |x-x_0| < \delta, \delta > 0$$

$$= x \,\big|\, x_0-\delta < x < x_0+\delta$$

$$= (x_0-\delta, x_0+\delta)$$

(2) 无心邻域：在微积分中还常常用到集合 $x \,\Big|\, 0 < |x-x_0| < \delta, \delta > 0$ 这是从点 x_0 的邻域中除去点 x_0 本身所得的集合，叫做点 x_0 的去心邻域，记作 $U_0(x_0, \delta)$. 即

$$U_0(x_0, \delta) = x \,\Big|\, 0 < |x-x_0| < \delta, \delta > 0$$

$$= x \,\Big|\, x \in (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$$

$$= (x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$$

三、函数的概念

研究自然现象或技术过程时，所需处理的变量往往不止一个，而且各个变量的变化不是孤立的，而是相互联系的. 变量之间的相互关系大多表现为函数

关系. 为了揭示变量之间的这种依赖性，我们先来考察几个实际例子.

例2　一辆汽车以每小时50千米的速度在公路上做匀速行驶. 在这个过程中，汽车所走的路程 s 与行驶的时间 t 都是变量. 由物理学的计算公式可知，它们之间的关系为

$$s = 50t \qquad t \in [0, +\infty)$$

当 t 在区间 $[0, +\infty)$ 内任取一个值时，均可由上式所示的规则得到一个 s 的值与之对应. 比如，当 $t = 6$ 时，通过规则"50 倍 t"就得到 $s = 50 \times 6 = 300$ 与 $t = 6$ 对应.

例3　某洗衣机厂记录了某种型号洗衣机的销售情况，并将销售量 y(单位：台）与销售价格 x(单位：元／台）列表如下：

表1－1

销售价格(x)	50	80	100	150
销售量(y)	12 500	10 500	8 500	6 500

显然，当 x 在价格集合 $\{50, 80, 100, 150\}$ 中任取一个值(如 $x = 80$) 时，均可按表1－1所示的对应规则(价格下方的数字是该价格下的销售量）唯一地确定一个销售量 y 的值($y = 10\ 500$) 与之对应. 将上述两个例子所揭示的变量之间的这种依赖(或对应）关系予以抽象，并加以概括，就得到下面的定义.

定义1.1　设某变化过程中有两个变量 x 与 y, D 是一个非空数集，如果对于变量 x 在数集 D 中所取的每一个值，按照一定的对应规律 f, 变量 y 都有确定的值与之对应，则称变量 y 是定义在数集 D 上的变量 x 的函数. 记作

$$y = f(x), \ x \in D \tag{1.1}$$

并称变量 x 为自变量，变量 y 为 x 的函数(或称因变量). 自变量 x 的取值范围 D, 称为函数的定义域，记作 $D(f)$. 对于 $x_0 \in D(f)$ 所对应的 y 值，记作

$$y_0 \text{ 或 } f(x_0) \text{ 或 } y\big|_{x=x_0} \tag{1.2}$$

称为当 $x = x_0$ 时 $y = f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}$, 称为函数 $y = f(x)$ 的值域，记作 $Z(f)$.

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应规则. 对应规则也常常用 h, g, φ 等表示.

为了更好地理解函数的定义，现特作如下说明：

(1) 定义中的符号"f"，表示变量 x 与 y 直接的某种对应规则，或者说它

是把定义域 D[或 $D(f)$] 中的元素 x 变为值域 $Z(f)$ 中元素 y 的一个运算法则.

例如，在函数 $y=f(x)=2x^2+2x-5$ 中，符号"f"就是一个"把 D 中的 x 变为 $Z(f)$ 中的元素 y"的一个对应法则. 其具体含义就是把[自变量]变为"$2\cdot$[自变量]$^2+2\cdot$[自变量]-5".

比如，当 $x=\sqrt{3}$ 时，其对应的函数值为

$$f(\sqrt{3})=2\cdot(\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}-5=1+2\sqrt{3}$$

当 $x=a-1$ 时，其对应的函数值为

$$f(a-1)=2(a-1)^2+2(a-1)-5=2a^2-2a-5$$

为了方便，关于 y 与 x 的函数关系，在没有明示函数符号时，也可将此函数直接写为 $y(x)$. 如 $y=x^2-3$，为了计算上的方便，有时也可直接写为 $y(x)=x^2-3$. 只不过这里的 y 既可视为因变量，也可视为"对应规则".

(2) 由于函数的定义域 $D(f)$ 和对应规则 f 确定以后，其值域 $Z(f)$ 也随之确定，因此，定义域和对应规则就成了决定函数的两个要素，而与变量所采用的字母名称无关.

例如，为求正方形的面积表达式. 甲：设边长为 x，面积为 y，得

$$y=x^2\quad(x>0)$$

乙：设边长为 z，面积为 s，得

$$s=z^2\quad(z>0)$$

由于这两个函数的定义域相同[都是$(0,+\infty)$]，对应规则也相同(都是[自变量]^2)，所以它们是同一个函数. 正是由于上述原因，数学上常把函数 $f(x)$、$f(z)$ 等均称为函数 f，而把 $f(a)$ 称为函数 f 在 $x=a$ 时的值.

例4　关系式 $y=x$ 与关系式 $y=\sqrt{x^2}$ 是否为相同的函数?

解　这两个函数定义域相同，但对应关系不同. 第二个函数可表示为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，所以不是相同的函数.

例5　关系式 $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 与关系式 $y=x+2$ 是否为相同的函数?

解　第一个函数的定义域为 $x\neq2$ 的实数，而第二个函数的定义域是全体实数. 它们的定义域不同，故不是相同的函数.

注意：

(1) 给定一个 y 与 x 的关系式不一定是函数.

(2) 函数决定于对应关系 f 与定义域 $D(f)$ 两个要素，两个函数相同当且仅当这两个要素都相同.

例6　设某商品的单价为 k(k 在一定的条件下是一常量)，你所买的商品的

数量为x，你所付的款为y，y与x的关系为$y=kx$．x的取值由实际情况来确定．若为笔或笔记本，x的取值是非负整数．在反映实际问题的函数关系中，自变量x具有非常具体的实际意义，这种函数的定义域应由x所表示的实际意义来确定．

四、函数的定义域

函数的定义域指的是能使函数表达式有意义的全体自变量的值的集合．寻求函数的定义域时，应遵循以下规律：

（1）分式的分母不等于0；

（2）负数不能开偶次方；

（3）零和负数没有对数；

（4）正弦、余弦的绝对值不超过1.

例7　求函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\arcsin\dfrac{x+1}{3}$的定义域．

解　x必须满足不等式$x^2-1>0$，解集为 $x \mid x<-1$ 或 $x>1$ ，即$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$．

又由$\left|\dfrac{x+1}{3}\right|\leqslant 1$的解集为 $x \mid -4\leqslant x\leqslant 2$ ，即$[-4,2]$．所求函数的定义域为(用区间表示)$[-4,-1)\cup(1,2]$．

五、分段函数

例8　某汽车公司一郊区专线汽车的票价y可表示为路程x的函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2, & 0<x\leqslant 5\\ 3, & 5<x\leqslant 8\\ 4, & 8<x\leqslant 10\end{cases}$$

这是一个分段函数．火车、长途汽车的票价与路程也有类似的函数关系．

例9　设银行活期存款的年利率为r_0，一年定期存款的年利率为r_1，某人存入银行a元，设y为存款时间t的本利和．

$$y(t)=\begin{cases}a\left(1+\dfrac{r_0}{12}t\right), & 0<t<12\\ a(1+r_1), & t=12\\ a(1+r_1)+a\left[1+\dfrac{r_0}{12}(t-12)\right], & 12<t<24\end{cases}$$

在日常生活中经常会遇到上面两例那样表示的函数，邮局邮资的计算也是如此，我们称这样的函数为**分段函数**. 分段函数的定义域被分为若干个互不相交的区间，在不同的区间或区间的端点上，函数值由不同的解析表达式计算，区间的端点为分界点.

例 10　求函数 $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ x^2 - 1, & 1 < |x| < 2 \end{cases}$ 的定义域.

解　这是一个分段函数，解不等式 $|x| < 1$ 和 $1 < |x| < 2$，得 $(-1, 1)$ 和 $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

所以函数的定义域是 $(-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2)$.

注意：虽然分段函数在定义域内不同的子区间上有不同的解析式，但它是同一函数关系式，其定义域是各子区间的并集.

六、函数的表示法

由函数的定义可知，变量之间的对应规则 f 是确定函数的要素之一，至于这个 f 是什么形式，定义本身并未加以限制. 在通常情况下，表示函数的方法有下面三种：

(1) 公式法：这是一个用数学式子来表示变量之间对应关系的方法. 如例 2 中的 $s = 50t, t \in [0, +\infty)$，就是这种方法.

(2) 列表法：这是一个用表格来表示变量之间对应关系的方法. 如例 3 中的表 1－1，就是这种方法.

(3) 图像法：这是一个用图像来表示变量之间对应关系的方法.

七、隐函数

有一些函数的因变量是用自变量表达式表示出来的，这类函数称为**显函数**. 例如 $y = \sin x$, $y = x^2$ 等. 而有些函数，它们的因变量与自变量的对应规则是用一个方程

$$F(x, y) = 0 \tag{1.3}$$

表示的，这类函数称为**隐函数**. 如 $x^2 + y^2 = r^2$.

八、反函数

在函数 $y = f(x)$ 中，x 是自变量，y 是因变量，然而在同一变化过程中存在着函数关系的两个变量究竟哪一个是自变量，哪一个是因变量，并不是绝对的，要视问题的具体要求而定.

例如：某商品在销售中，市场价格为 a 元，如果想从销售量 x 来确定销售

总收入 y，则 x 是自变量，y 是因变量，其函数关系为

$$y = ax \tag{1.4}$$

相反，想从商品销售总收入确定销售量，就得把 y 取作自变量，把 x 作为因变量：

$$x = \frac{y}{a} \tag{1.5}$$

从(1.5) 可知，对于每一个 y，都有唯一的一个 x 与之对应，我们把(1.5) 式叫做函数(1.4) 式的反函数.

1．反函数的定义

把以上分析的思维形式加以抽象，就得到下面的定义.

定义 1.2　设 $y=f(x)$ 为给定的一个函数，如果对其值域 $Z(f)$ 中的每一个值 y 都可以通过关系式 $y=f(x)$ 在其定义域 $D(f)$ 中有唯一一个 x 值与之对应，则得到一个定义在 $Z(f)$ 以 y 为自变量，x 为因变量的函数，我们称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为

$$x = f^{-1}(y) \tag{1.6}$$

习惯上把 x 作为自变量，y 作为因变量，因此将(1.6) 式记为 $y=f^{-1}(x)$，此时的定义域 $D(f^{-1})=Z(f)$，值域 $Z(f^{-1})=D(f)$.

要注意的是 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 表示变量 x 和 y 之间的同一关系，所以它们的图形是同一曲线，而 $y=f^{-1}(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 中将 x，y 交换得到的，所以它们的图形关于 $y=x$ 对称，所以曲线 $y=f^{-1}(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 也是关于 $y=x$ 对称的.

2. 反函数存在的条件

根据定义 1.2 中的两个函数之说，不难看出，并非所有函数的反函数都存在. 比如，从函数 $y=x^2$ 中解出 x，就得 $x=\pm\sqrt{y}$，这样，任给一个 y 值，就有两个 x 的值与之对应. 这一事实说明尽管 $y=x^2$ 是函数，但是它的反解式 $x=\pm\sqrt{y}$ 却并非函数. 那么，一个函数 f 具备什么条件，才存在反函数呢？由定义 1.2 的两个函数之说，函数 $y=x^2$ 中的对应规则 f 必须一一对应. 也就是说，在 $D(f)$ 中任给一个 x，在 $Z(f)$ 中只有一个 y 与之对应；反之，在 $Z(f)$ 中任给一个 y，在 $D(f)$ 中也只有一个 x 与之对应. 把这个条件反映在几何上，就得到下面的反函数存在定理.

定理 1.1　若函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$ 是严格单调增加(或减少)的，则存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z(f)$，且反函数也是严格单调增加(或减少)的.

证明略.

3. 反函数的求法

遵照习惯，今后在求反函数时，可按下述步骤进行：

(1) 从直接函数 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，并判定它是否为函数(即给一个 y 值，是否只能确定一个 x 值).

(2) 当 $x=f^{-1}(y)$ 是函数时，再将 x 与 y 互换，得到函数 $y=f^{-1}(x)$，这就是所求的反函数.

例 11　求 $y=2x+1$ 的反函数.

解　由 $y=2x+1$，可以求出

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y-1}{2},$$

所以 $y=2x+1$ 的反函数为 $y=\frac{x-1}{2}$.

由反函数的定义可知，如果函数 $y=f(x)$ 有反函数，则 x 与 y 必定是一一对应的. 因为 $y=f(x)$ 是函数，故对于每一个 $x\in D(f)$，必有唯一的 $y\in Z(f)$ 与之对应，同样，其反函数 $x=f^{-1}(y)$，对于任一 $y\in Z(f)$ 必有唯一的 $x\in D(f)$ 与之对应. 利用这种关系很容易判断一个函数是否有反函数.

例 12　考察函数 $y=x^2$ 是否存在反函数.

解　对于任一 $y\in(0,+\infty)$ 有两个不同的 x 值与 y 对应，即 x 与 y 不是一一对应的，所以它没有反函数. 但是，如果我们把定义域限制在 $[0,+\infty)$，则有反函数 $x=\sqrt{y}$，同样把定义域限制在 $(-\infty,0]$，则有反函数 $x=-\sqrt{y}$.

例 13　求 $y=e^x$ 的反函数.

解　因为 $y=e^x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的，因而它有反函数 $y=\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，且反函数也是严格单调增加的.

第二节　函数的简单性质

任何一个函数，它都具有其自身的性质. 对于众多函数来说，就可能出现一些函数具有这些性质，而另一些函数具有另外一些性质的情况. 本节主要讨论与几何图形有关的某些函数的性质.

一、函数的奇偶性

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$.

(1) 若对于所有的 $x\in D(f)$ 有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**. 偶函数的图形关于 y 轴对称.

(2) 若对于所有的 $x \in D(f)$ 有 $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $y = f(x)$ 为**奇函数**. 奇函数的图形关于原点对称.

例 1　判断函数的奇偶性.

(1) $f(x) = x^2 + 2\cos x - 3$

解　因为 $D(f) = (-\infty, +\infty)$

而　$f(-x) = (-x)^2 + 2\cos(-x) - 3$

$$= x + 2\cos x - 3 = f(x)$$

所以函数 $f(x) = x^2 + 2\cos x - 3$ 为偶函数.

(2) $f(x) = x\cos x$

解　因为 $D(f) = (-\infty, +\infty)$，而 $f(-x) = (-x)\cos(-x) = -x\cos(x)$

$$= -f(x)$$

所以函数 $f(x) = x\cos x$ 为奇函数.

例 2　设函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 均为奇函数，其定义域为 D，求证：$f(x) \cdot \varphi(x)$ 为偶函数.

证　由 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 均为 D 上的奇函数，得

$$f(-x) = -f(x),\ \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

令 $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$

则有　$F(-x) = f(-x) \cdot \varphi(-x)$

$$= -f(x) \cdot [-\varphi(x)]$$

$$= f(x) \cdot \varphi(x) = F(x)$$

于是，$f(x) \cdot \varphi(x)$ 为偶函数.

一般地，除常函数 $y = 0$ 外，有

(1)(偶函数) + (偶函数) = 偶函数.

(2)(偶函数) · (偶函数) = 偶函数.

(3)(奇函数) + (奇函数) = 奇函数.

(4)(奇函数) · (奇函数) = 偶函数.

(5)(奇函数) + (偶函数) = 非奇非偶函数.

(6)(奇函数) · (偶函数) = 奇函数.

二、函数的单调性

定义 1.4　如果函数 $y = f(x)$，对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称此函数在区间 (a, b) 内是单调增加的(或称单调递增函数)；当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称此函数在区间 (a, b) 内是单调减少的(或称单调递减函数).

例 3　讨论函数 $f(x) = x^2$ 的单调性.

解　函数的定义域为 $D(f) = (-\infty, +\infty)$

设 x_1, x_2 为 $D(f)$ 中的任意两点，且 $x_1 < x_2$，则

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

由于因子 $(x_1 - x_2) < 0$，而因子 $(x_1 + x_2)$ 符号不定，为使其符号确定，必须使 x_1 与 x_2 同号，因此应分为两种情况予以讨论：

(1) 当 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 时，则有 $x_1 + x_2 < 0$ 且

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > 0$$

即 $f(x_1) > f(x_2)$，于是，函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内（严格）单调减少；

(2) 当 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 时，则有 $x_1 + x_2 > 0$ 且

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < 0$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$，于是，函数 $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内（严格）单调增加.

三、函数的周期性

定义 1.5　对于函数 $y = f(x)$，如果存在正的常数 a，使得

$$f(x + a) = f(x)$$

恒成立，则此函数为**周期函数**. 这个**最小**的正数 a 称为函数的**周期**.

例如 $y = \cos x$，$\cos(x + 2\pi) = \cos x$，所以 $y = \cos x$ 是周期函数，周期是 2π.

例 4　求函数 (1) $y = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$　　(2) $f(x) = \sin x \cos x$ 的周期.

解　(1) 因为

$$\begin{aligned} y(x) &= \cos(3x - \frac{\pi}{4}) \\ &= \cos(3x + 2\pi - \frac{\pi}{4}) \\ &= \cos[(3x + 2\pi) - \frac{\pi}{4}] \\ &= \cos[3(x + \frac{2\pi}{3}) - \frac{\pi}{4}] \\ &= y(x + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned}$$

所以 $y = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{3}$；

(2)
$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin(2x + 2\pi) \\ &= \frac{1}{2}\sin 2(x + \pi) = f(x + \pi) \end{aligned}$$

所以 $f(x) = \sin x\cos x$ 的周期 $T = \pi$.

四、函数的有界性

定义 1.6　设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, (a, b) 可以是函数的整个定义域, 也可以是定义域的一部分. 如果存在一个正数 M, 对于所有的 $x \in (a, b)$, 恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内有界. 如果不存在一个正数 M, 则函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内无界.

例如 $y = \sin x$, 因为 $|\sin x| \leqslant 1$, 所以 $y = \sin x$ 在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

例 5　下列函数为有界函数的是(　　)

(1) $y = a^x$　　$x \in (-\infty, +\infty)$

(2) $y = \ln x$　　$x \in (0, 2]$

(3) $y = a^x$　　$x \in (-\infty, 0]$ 且 $a > 1$

(4) $y = x^3$　　$x \in (-\infty, +\infty)$

解　因为 a^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 满足 $0 < a^x < +\infty$, 只有下界而无上界, 所以(1) 应排除.

因为 $\ln x$ 在 $(0, 2]$ 内, 满足 $-\infty < \ln x \leqslant \ln 2$, 只有上界而无下界, 所以(2) 应排除.

因为 $a > 1$, a^x 在 $(-\infty, 0]$ 内, 满足 $0 < a^x \leqslant 1$, 有下界且有上界, 所以(3) 应当选.

因为 x^3 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 满足 $-\infty < x^3 < +\infty$, 既无下界也无上界, 所以(4) 也应排除.

综上所述, 此题应选(3).

第三节　初等函数

一、基本初等函数

1. 常值函数 $y = c$(c 为常数)　定义域 $(-\infty, +\infty)$

例如, 广州的某些公共汽车票价 y 与路程 x 之间的函数关系 $y = 2$, 就是常值函数.