中国海洋大学教材建设基金资助出版

高等学校文科教材

大学数学基础教程

张若军 刘文静 编

清华大学出版社

大学数学基础教程

张若军　刘文静　编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

全书内容共分上、下两篇，上篇介绍数学文化，包括数学概述、常用的数学思想与方法简介、三次数学危机、数学美学、数学国际以及数学的新进展共 6 章内容；下篇介绍数学的应用，包括代数学应用、几何学应用、分析学应用、概率统计应用及运筹学应用共 5 章内容.

根据文科的特点，本书强调数学基本思想的阐释，省略烦琐的计算和证明，叙述上力求简洁直观、浅显易懂. 本书选材较宽泛，且注重阐释数学的文化价值及数学理论的应用价值. 每章后面的思考题、自主探索或合作研究的习题内容，旨在强调对学生的思维训练和学习能力的培养，以期达到文理通融，提高文科生数学素养的目的. 考虑到教学学时的限制，教师可根据需要灵活选择内容和组织教学.

本书便于教学和自学，适合作为艺术类、体育类专业以及对数学要求较为宽松的文科专业的大学数学教材，同时可作为感兴趣的学习者的一本参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础教程/张若军，刘文静编. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48617-6

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①张…　②刘…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 256922 号

责任编辑：汪　操　赵从棉
封面设计：刘艳芝
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：17.25　　**字　　数**：377 千字
版　　次：2017 年 12 月第 1 版　　**印　　次**：2017 年 12 月第 1 次印刷
定　　价：49.00 元

产品编号：074965-01

前言

FOREWORD

数学作为历史悠久且源远流长的科学，如今，在世界各地的学校教育的各个阶段、各个层面已然成为学习时间最长、对升学考试和素质培养都非常重要的一门课程. 21 世纪，数学对科技的发展与进步更是举足轻重、不可或缺. 因此，一个有修养学识的当代人，需要具备一些数学素质，能够对世界和自身多些理性的思考，而非仅仅是感性的强大.

2015 年秋季学期，我校教务处决定为音乐表演专业、体育专业以及少数民族本科生开设“大学数学”课程. 此前，21 世纪初至今，我校已经为新闻与传播、政治学与行政学、外语等人文专业开设了“大学数学”课程. 但此“大学数学”非彼“大学数学”，面对高中数学基础要求相对较低，学生对数学更具“抵触”情绪，且在全国高校几无开设此类课程的情形，授课教师面临一系列难题：如何选择合适的内容编写教材，进而制订教学大纲？采用何种教学模式更有效？怎样的考核方式更能体现公平与合理？……

作为教学的依据与载体，教材是课程教学首先要解决的问题. 经过几番深入讨论，我们授课教师达成较为一致的意见，那就是：采用更多样的视角，不太过数学化的追求细枝末节、面面俱到，不用太多的数学技术铺垫，但要做到通俗易懂，再兼具一点点有趣. 然而，数学教师总觉得前期不奠定些基础，后期讲述就不清楚. 教师习惯了纯数学的讲授，哪怕是非常复杂或技巧性很强的数学题，教师明白以后，似乎可以一劳永逸，因为自己懂得，所以也觉得简单，但却忽略了学生的感受. 事实上，如铁桶般严密无懈可击的数学定义、定理、命题大多数时候恰是学生“惧怕”数学之源，对教师而言却是——不严谨则难以忍受，甚至“痛苦”得很. 许多优秀的数学科普读物在某些地方似乎不够严格详细，但更少高高在上、曲高和寡的感觉，至少让人了解数学思想的普适性和应用的广泛性. 尽管严肃与通俗二者微妙的平衡很难把握，但在教材的编写中也许可以做一尝试.

基于以上的认识，本书分为上、下两篇编写，上篇介绍数学文化，下篇介绍数学的应用. 上篇的编写原则是叙述简单扼要，每章后设置 5～8 个思考题，为课后的进一步讨论学习之用. 下篇的主要编写原则如下：

(1) 省略复杂的计算和技巧性的证明，不设烦琐的例题、习题，代之以更加基础平实的

内容；

(2) 阐述简洁清晰，对概念、定理、结论的来龙去脉交代清楚；

(3) 每章后的习题分为自主探索、合作研究两部分，鼓励个体较深入的学习探究以及提升与人合作的研究能力.

在课程成绩评定方面，教师可以考虑采用过程式考核的评价标准，最终成绩包括出勤、课上表现、课后作业、自主探索或合作研究的报告、期末的闭卷考试几部分，这样的评价方式更能体现对学习过程的有效监督，成绩组成也更趋于合理.

数学教师思想的转变在课程的教学中是十分重要的，教师千万不要将艺术体育类的大学数学课程等同于理工科的高等数学课程，不要奢望目标宏大到将文科学生训练成合格的理工科学生——熟练高等数学的基本概念、掌握必备的计算技能和证明技巧，以及应用数学解决实际问题的初步能力等.若沿袭高等数学课程多年一成不变的模式，则我们的教学将是失败中的失败，师生都将身心俱疲.鉴于此，本书的初衷是在短时间内向学生传递一些重要的数学文化与数学应用的内容.而要做到这一点，唯一可行的方案就是在内容取舍上“偷工减料”——但还要不至于显得莫名其妙，的确很难！我们今天的探索，就在于为艺术体育类的大学数学课程寻找一个基调，尽管众口难调.

对于此类课程，也许由数学大家以百家讲坛的模式来讲述更为理想，更能做到雅俗共赏.作为教学一线的普通基层教师，在开设此类课程时，更多的是以有限的能力去尽力做一些尝试，能让艺术体育类专业的学生即使不能爱上数学，至少不再惧怕数学.希望我们的尝试能有些许成效.编者十分赞赏将此类课程定位为：减少对数学累积的“仇恨”，搭建一座文理通融的桥梁，传递一缕文化的馨香，培养一点数学的素养.教材的前言、第 1 章至第 8 章由张若军编写，第 9 章至第 11 章由刘文静编写，最后由张若军统稿.教材的内容是按照一个学期，每周 3 学时安排的.在具体的教学过程中，教师可根据需要做出删减或增补.带“*”的内容难度较大，可作为课外的选读.

编者十分感谢中国海洋大学教务处对本书出版提供资助和大力支持，也感谢数学科学学院多年来对数学公共课教学的重视，尤其是方奇志教务长、谢树森院长、李长军副院长给予的关心和鼓励.还要感谢编者的许多同事在教材编撰方面提供的帮助，使得本书得以顺利付梓.鉴于编者的数学和写作水平，书中的错漏之处在所难免，期待广大同行批评指正，以便日后有机会进行修订.更希望本书能够抛砖引玉，以期未来有更优秀的、更适合的此类教材出版，能更好地实现数学教育人文化的目标.

编　者

2017 年 7 月

目录

CONTENTS

上篇　数学文化

下篇　数学的应用

上篇

数学文化

数学文化是在数学的产生和发展过程中，人类社会实践所创造的有价值、有意义的物质财富和精神财富的总和，特指精神财富．虽然数学不能直接创造物质财富，但其在推动所有科学技术的发展方面都扮演着极其重要、不可替代的角色．同时，数学传承的精神、思想和方法深刻地影响着人们的思维和世界观．因此，数学是人类文化的重要组成部分，数学文化是数学和人文的结合．本篇撷取数学文化的部分主要内容，从宏观的角度解释数学的本质、简介数学的发展史、认识数学的价值、领略数学的思想方法、直面数学危机、品味数学之美、追踪数学热点．通过本篇的学习，我们可以从不同于以往数学知识的层面审视数学、感悟数学，以更多样的角度对数学有更透彻的理解和更丰富的体验．

第1章

数学概述

数学是打开科学大门的钥匙……忽视数学必将伤害所有的知识，因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的．更为严重的是，忽视数学的人不能理解到他自己这一疏忽，最终将导致无法寻求任何补救的措施．

——罗杰·培根(R. Bacon，约 1214—1293，英国哲学家、自然科学家)

人类的发展史就是不断认识、适应和改造自然的历史，在这一过程中，数学随之产生和发展起来．作为几千年来人类智慧的结晶和人类文明的一个重要组成部分，数学所蕴含的精神、思想和方法是我们取之不尽、用之不竭的宝贵财富．

今天，数学已渗透到人类生活的各个领域，成为衡量一个国家发展、科技进步的重要标准，现代的人才应具备一定的数学基本素质也成为共识．本章将从多个视角探讨究竟“什么是数学？”

1.1 数学的定义与内容

1.1.1 数学的诸多定义

数学，起源于人类早期的生产活动，为中国古代六艺之一(六艺中称之为“数”)，也被古希腊学者视为哲学的起点．数学的英语为 Mathematics，源自于古希腊语，意思是“学问的基础”．

伟大的革命导师恩格斯(F. V. Engels，德，1820—1895)早在 19 世纪就曾说过：“数学是研究现实世界中的数量关系与空间形式的一门科学．”这是一个一度得到大家广泛共识的数学的定义．但是，随着现代科学技术和数学科学的发展，人类进入信息时代，“数量关系”和“空间形式”具备了更丰富的内涵和更广泛的外延．“混沌”“分形几何”等新的数学分支出现，而这些分支已经很难包含在上述定义之中．

如今，数学已经发展成了一个蔚为壮观、极为庞大的领域，对“什么是数学？”这个基本问题的回答却仍是众说纷纭．英国哲学家、数学家罗素(B. Russell，1872—1970)曾说过：“数

学是我们永远不知道我们在说什么,也不知道我们说的是否对的一门学科."而法国数学家波雷尔(E. Borel,1871—1956)则说:"数学是我们确切知道我们在说什么,并肯定我们说的是否对的唯一的一门科学."两位数学大家给出了表面看似相悖的回答!

南京大学的方延明教授(1951—)在其编著的《数学文化》一书中,搜集了 14 种数学的定义抑或是人们对数学的看法:万物皆数说,符号说,哲学说,科学说,逻辑说,集合说,结构说,模型说,工具说,直觉说,精神说,审美说,活动说,艺术说.

(1) 万物皆数说认为数的规律是世界的根本规律,一切都可以归结为整数与整数之比.此说来源于古希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras of Samos,约前 560—前 480)及其学派,毕达哥拉斯曾说:"数学统治着宇宙."

(2) 符号说认为数学是一种高级语言,是符号的世界.德国数学家希尔伯特(D. Hilbert,1862—1943)曾说:"算术符号是文字化的图形,而几何图形则是图像化的公式;没有一个数学家能缺少这些图像化的公式."

(3) 哲学说认为数学等同于哲学.古希腊的亚里士多德(Aristotle,前 384—前 322)曾说:"新的思想家虽说是为了其他事物而研究数学,但他们却把数学和哲学看作是相同的."

(4) 科学说认为数学是精密的科学.德国数学家、有"数学王子"之称的高斯(J. C. F. Gauss,1777—1855)曾说:"数学是科学的皇后,数论是数学的皇后."

(5) 逻辑说认为数学推理依靠逻辑.持有"逻辑说"者强调数学是不需要任何特定概念的,只需要通过逻辑概念就可以导出其他数学概念.

(6) 集合说认为数学各个分支的内容都可以用集合论的语言表述.集合无处不在,每个数学问题都可以纳入到集合的范畴."集合说"已经成为现代数学的基础.

(7) 结构说(关系说)强调数学语言、符号的结构及联系方面,认为数学是一种关系学.此说来源于 20 世纪上半叶著名的法国布尔巴基学派所主张的"数学是研究抽象结构的理论".

(8) 模型说认为数学是研究各种形式的模型,如微积分是物体运动的模型,概率论是偶然与必然现象的模型,欧氏几何是现实空间的模型,非欧几何是超维空间的模型.英国数学家、逻辑学家怀特黑德(A. N. Whitehead,1861—1947)说过"数学的本质就是研究相关模式的最显著的实例".

(9) 工具说认为数学是所有其他知识工具的源泉.法国数学家笛卡儿(R. Descartes,1596—1650)曾说:"数学是一个知识工具,比任何其他由于人的作用而得来的知识工具更为有力,因为它是所有其他知识工具的源泉."

(10) 直觉说认为数学的来源是人的直觉,数学主要是由那些直觉能力强的人推进的.荷兰数学家布劳威尔(L. Brouwer,1881—1966)曾说:"数学构造之所以称为构造,不仅与这种构造的性质本身无关,而且与数学构造是否独立于人的知识以及与人的哲学观点都无关,它是一种超然的先验直觉."

(11) 精神说认为数学不仅是一种技巧,更是一种精神,特别是理性的精神.此说来自美国近代数学教育家克莱因(M. Klein,1908—1992),他曾说:"数学是一种精神,特别是理性

的精神，能够使人的思维得以运用到最完美的程度.”

(12) 审美说认为数学家无论是选择题材还是判断能否成功的标准，主要是美学的原则.古希腊哲学家、数学家普洛克拉斯(Proclus，411—485)就曾说过："哪里有数，哪里就有美."

(13) 活动说认为数学是人类最重要的活动之一. 20世纪奥地利著名的学术理论家、哲学家波普尔(K. Popper，1902—1994)曾说："数学是人类的一种活动."

(14) 艺术说认为数学是一门艺术. 法国数学家波雷尔就坚信"数学是一门艺术，因为它主要是思维的创造，靠才智取得进展，很多进展出自人类脑海深处，只有美学标准才是最后的鉴定者".

方延明教授的观点是：从数学学科的本身来讲，数学是一门科学，这门科学有它的相对独立性，既不属于自然科学，也不属于人文、社会或艺术类科学；从它的学科结构看，数学是模型；从它的过程看，数学是推理与计算；从它的表现形式看，数学是符号；从对人的指导看，数学是方法论；从它的社会价值看，数学是工具. ……用一句话来概括：数学是研究现实世界中数与形之间各种模型的一门结构性科学.

美国数学家、数学教育家柯朗(R. Courant，1888—1972)在其科普名著《什么是数学》一书的序言中说："数学，作为人类智慧的一种表达形式，反映生动活泼的意念，深入细致的思考，以及完美和谐的愿望，它的基础是逻辑和直觉、分析和推进、共性和个性."同时，在该书第一版修正版的序言中，他还说："除非学生和教师设法超越数学的形式主义，并努力去把握数学的实质，否则产生受挫和幻灭的危险将会更甚."

综上，尽管人们对数学的认识和看法不尽相同，但独特而唯一的数学带给世界的改变毋庸置疑是巨大的.

1.1.2 数学科学的内容

大数学家高斯曾说过："数学是科学之王，它常常屈尊去为天文学和其他自然科学效劳，但在所有的关系中，它都堪称第一."

随着科学技术的迅猛发展，数学的地位日益提高，这是因为当今科学技术发展的一个重要特点是高度的、全面的定量化，而定量化实际上就是数学化. 因此，人们把数学看成是与自然科学、社会科学并列的一门科学，称为数学科学.

数学科学按内容可大致分为五大分支：①纯粹数学(基础数学)；②应用数学；③计算数学；④概率论与数理统计；⑤运筹学与控制论.

近半个多世纪以来，现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科分类与科学研究的方法. "数、理、化、天、地、生"这些曾经以纵向发展为主的基础学科与日新月异的技术相结合，使用数值、解析和图形并举的方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域，在数学科学内部也产生了新的研究领域和方法，如混沌、分形几何等. 数学科学如同浩瀚的大海，至今已发展成拥有100多个学科分支的庞大体系. 尽管如此，其核心领域还是代数学(研究数的理论)、几何学(研究形的理论)及分析学(沟通形与数且涉及极限运算的部分)，它们构成了数

学科学金字塔的底座.

数学科学的内容除了初等数学中的算术、代数、立体几何、平面解析几何包含的内容外,大部分分散在数学系本科阶段的诸多课程内,如数学分析、高等代数、空间解析几何、常微分方程、复变函数、实变函数、泛函分析、近世代数、拓扑学、数论等. 除此之外,大学本科阶段还要学习一些课程,这些课程不属于三大核心领域,但也是非常重要的. 例如,关于随机数学、计算数学、模糊数学、最优化理论和方法等内容的课程,这些课程的基础理论和计算的知识仍属于上述三大核心领域. 当然,数学科学还有很多更深的内容在本科阶段是接触不到的,而是放在数学专业的研究生阶段学习.

所谓随机数学就是指所研究的数学问题受随机因素的影响. 随机数学的规律性是体现在对事件进行大量重复试验的基础之上,或者说是统计规律. 现实中的系统与对象避免不了随机因素的影响,研究这类问题就必须运用随机数学的理论与方法. 例如,人口统计、天文观测、产品质量控制、疾病预防、地震预报等问题的研究中就需要随机模型. 因为随机因素的影响无处不在,所以随机数学的理论与方法将会更为迅速的发展与普及,其应用将越来越广泛地渗透到人类生产活动、科学研究的各个方面. 大学本科阶段开设的课程中,"概率论""数理统计""随机过程"属于随机数学的范畴.

计算数学是研究数值近似的理论和方法的科学. 例如,对高于四次的代数方程来说,已经没有代数解法了,所以,要把它们的根准确地算出来,一般来说是非常困难甚至是不可能的,有时也不必要,于是人们就用各种近似的方法来求这些解. 对于一般的超越方程(超越方程是等号两边至少有一个含有未知量的初等超越函数式的方程,如指数方程、对数方程、三角方程、反三角方程等),也只能采用数值分析的方法进行求解. 在求定积分时,如何利用简单的函数去近似替代所给的函数,以便于求解,也是计算方法的一项主要内容. 在计算机科学高速发展的今天,研究新的算法尤为重要. 大学本科阶段开设的课程中,"计算方法"和"数值逼近"属于计算数学的范畴.

模糊数学是研究和处理模糊性现象的一种数学理论和方法. 在客观世界里,除了确定性现象和随机现象,还普遍存在着模糊现象. 对模糊现象的描述没有分明的数量界限,而模糊性又总是伴随着复杂性出现. 许多复杂系统,如人脑系统、社会系统、航天系统等,参数和变量众多,各种因素交错,具有明显的模糊性. 各门学科,尤其是人文学科、社会学科及其他"软科学"近年来的数学化、定量化趋势把模糊性的数学处理问题推向中心地位. 更重要的是,随着电子计算机、控制论、系统科学的迅速发展,要使计算机能像人脑那样对复杂事物具有识别能力,就必须研究和处理模糊性. 大学本科阶段开设的"模糊数学"课程阐述了模糊数学的理论、方法和应用.

最优化理论和方法中的"最优化",通俗地讲,是指用尽可能小的代价来获得尽可能大的效益. 最优化理论和方法是近几十年形成的应用数学学科,主要运用数学方法研究各种系统的优化途径及方案,为决策者提供科学决策的依据. 它的主要研究对象是各种有组织系统的管理问题及其生产经营活动,目的在于针对所研究的系统,求得一个合理运用人力、物力和