应用型本科系列规划教材

大学数学

线性代数

■ 李志林　涂庆伟　王　强　主编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

应用型本科系列规划教材

大学数学

线性代数

■ 李志林　涂庆伟　王　强　主编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇　江

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.线性代数/李志林,涂庆伟,王强主编
.—镇江:江苏大学出版社,2017.7
ISBN 978-7-5684-0510-2

Ⅰ.①大… Ⅱ.①李… ②涂… ③王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材②线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O13②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 165700 号

大学数学——线性代数
Daxue Shuxue—Xianxing Daishu

主　　编/李志林　涂庆伟　王　强
责任编辑/张小琴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编:212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/镇江文苑制版印刷有限责任公司
开　　本/787 mm×1 020 mm　1/16
印　　张/11
字　　数/250 千字
版　　次/2017 年 7 月第 1 版　2017 年 7 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-5684-0510-2
定　　价/26.00 元

前　言

线性代数是一门应用十分广泛的数学学科，是理工科和经济管理类本科各专业的一门重要的基础理论课程．线性代数为研究和处理涉及许多变量的线性问题提供了有力的数学工具，这一工具在工程技术、经济科学和管理科学中都有广泛的应用．学习本课程的目的是，使学生掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，培养其应用线性代数的基本思想和基本方程来分析和解决实际问题的能力．

独立学院作为我国高等教育（本科）的一种新型办学模式之一，其学生相对而言，基础差异更大，更加有个性化发展需求；其所用教材，往往需要兼顾教材的实用性和理论性．本书根据应用型本科院校对线性代数课程教学的要求，并参考研究生入学考试大纲，结合编者多年来在全日制本科院校和独立学院各专业课程教学及教材建设的经验，于内容的编排、概念的叙述、方法的应用等方面，力求用通俗易懂的语言介绍线性代数的基本知识和理论．

本书内容包括行列式、矩阵、向量空间与线性方程组、特征值与特征向量和实二次型等．其特点是：

（1）科学性与通俗性相结合．为了加深对概念的理解，培养逻辑推理能力，大部分定理和结论都给出证明，这有助力于对这些定理的掌握，便于读者自学；对于某些证明过程复杂的定理和性质，省略了其证明过程，仅做了直观的说明．

（2）精选例题和习题．在引入重要概念和阐述重要方法时，精选了相关的典型例题，便于读者更容易掌握所学知识．同时，每一节都精选了相关的习题，并在书后附有答案或提示．希望通过系统练习，帮助读者巩固和掌握所学知识．

（3）注重理论联系实践．简单介绍 MATLAB 及其在线性代数中的运用，引导读者应用数学及计算机来解决实际问题．

本书可作为高等院校理工科及经济管理等本科专业的线性代数教材，也可作为上述各专业领域读者的教学参考书．

限于编者的水平，尽管已对全书进行了认真仔细的推敲和审阅，但难免还会存在一些疏漏，恳请同行、专家和广大读者批评指正．

编　者

2017 年 7 月

目录

Contents ....

第一章　行　列　式

线性方程组是线性代数中的一个重要基础部分，来源于求解线性方程组的行列式，不仅在线性代数中占有最基本、最常用、最有力的工具地位，同时也被广泛应用于数学和其他学科领域.

本章从二元、三元线性方程组出发，探索其展开规律；然后逐步深入介绍 n 阶行列式的概念、基本性质、按行(列)展开定理，以及应用行列式求解线性方程组.

第一节　二阶、三阶行列式

读者在中学时已通过解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式的定义. 在此，我们先进行简单的复习.

一、二阶行列式

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1}$$

二阶行列式表示的代数和，可以用画线的方法(见图 1-1)记忆，即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积.

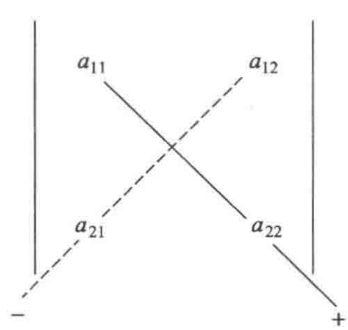

图 1-1

例 1 $\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8\times 2-(-1)\times 3 = 19.$

二、三阶行列式

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为**三阶行列式**，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{2}$$

三阶行列式表示的代数和，也可以用画线的方法（见图 1-2）记忆，其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项.

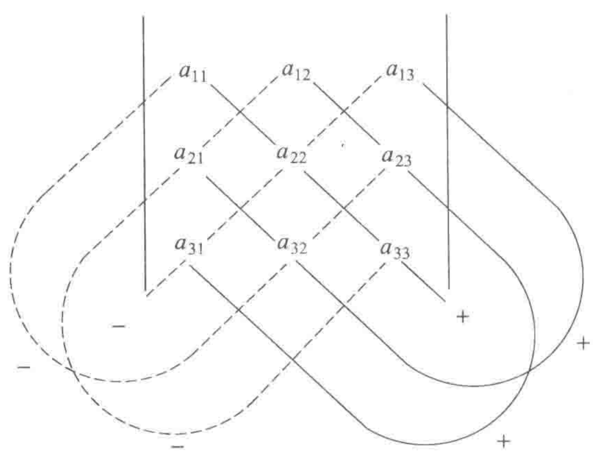

图 1-2

例 2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times 0\times 6+2\times 5\times(-1)+3\times 4\times 0-1\times 5\times 0-$

$2\times 4\times 6-3\times 0\times(-1)$

$=-10-48=-58.$

例 3　a,b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

解　$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$$

若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零. 因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，给定行列式等于零.

第二节　n 阶行列式的定义

为了把二阶、三阶行列式推广到 n 阶行列式，必须找出二阶和三阶行列式计算公式的共同规律，为此需要先给出排列的概念.

一、排列

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

n 级排列的一般形式为 $j_1j_2\cdots j_n$，其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 均是 $1,2,\cdots,n$ 中的某一个数，且互不相等。下标表示这 n 个数的次序，如 j_3 表示排列中第三个数.

例如，321 是一个三级排列，51423 是一个五级排列.

我们知道，由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的不同的 n 级排列总个数是 $n!$；其中 $12\cdots n$ 显然是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排列起来，称为 n 级标准排列.

定义 2　在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**；一个排列中逆序的总个数称为这个排列的逆序数. n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

定义 3　逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例 1　三级排列共有六个不同的排列，即

$$123,231,312,132,213,321$$

其中 123 是标准排列. 在排列 231 中，因为 2 排在 1 前面，但 $2>1$，所以形成一个逆序；同理 31 也形成一个逆序，于是有 $\tau(231)=2$，三级排列 231 是一个偶排列，而由于 $\tau(213)=1$，所以 213 是奇排列. 容易算出，123，312 都是偶排列；132，321 都是奇排列.

定义 4　将一个排列中某两个数的位置互相对换而其余的数不动，就得到另一个排列，这种对排列的变换方法称为对换.

例如，排列 2413 经过 2 与 3 对换就得到排列 3412.

定理 1　任一排列经过一次对换后必改变其奇偶性.

证明略.

二、n 阶行列式

现分析二阶、三阶行列式展开式的共同特征.第一节中已经得到关于三阶行列式的展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1}$$

分析式(1)可以得到以下结论:

① 三阶行列式是一个数,即 $3!=6$ 项的代数和,每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积.

② 每一项的各元素都有两个下标,第一个下标表示这个元素所在行的序数,第二个下标表示这个元素所在列的序数.当每一项中各元素的行指标是 1,2,3 的标准排列时,其列指标都是 1,2,3 的一个三级排列,并且每一个排列对应着三阶行列式的一项.

③ 每一项的符号,当其行指标是标准排列时,由列指标排列的奇偶性决定;列指标排列是偶排列时,该项取正号;列指标排列是奇排列时,该项取负号.

这样,式(1)可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

这里 $\sum$ 表示连加,即

$$\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三级排列求和.

定义 5 用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的 n 阶行列式是一个数,它是 $n!$ 项的代数和,每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的 n 级排列,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{2}$$

当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$；当 $n=2,3$ 时就分别是二阶、三阶行列式.

例 2　计算上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　由 n 阶行列式定义可知，展开式中的一般形式为

$$a_{1j_1} \quad a_{2j_2} \quad \cdots \quad a_{nj_n}$$

由于 D 中许多元素为零，所以只需要求出上述一切项中不为零的项即可. 在 D 中，第 n 行元素除 a_{nn} 外，其余元素都是零，所以只有取 $j_n=n$；在第 $n-1$ 行中除 $a_{(n-1)(n-1)}$ 和 $a_{(n-1)n}$ 外都是零，并且因为已经取了 $j_n=n$，所以只有取 $j_{n-1}=n-1$，才可能使对应的乘积不为零；依此类推，D 的 $n!$ 项中，除了排列 $j_1j_2\cdots j_n=12\cdots n$ 对应的乘积项外，其余全为零. 又因为 $\tau(12\cdots n)=0$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积.

同理可求得下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n$$

对于 n 阶行列式的任一项

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

由于乘法的可交换性，可以把该项列指标组成的排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 经过 t 次对换变成标准排列 $1\ 2\cdots n$. 与此同时，行指标组成的标准排列 $1\ 2\cdots n$ 经过 t 次对换变成了排列 $i_1i_2\cdots i_n$，即有

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

根据排列性质的定理 1，可知 $j_1j_2\cdots j_n$ 与 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性，所以

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

因此,n 阶行列式的展开式又有下列表达方法

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{3}$$

第三节　行列式的性质

当行列式阶数较高时,直接根据定义计算 n 阶行列式的值较困难.因此,我们将介绍行列式的一些性质.应用这些性质可以简单地计算出行列式的值,同时这些性质在理论上也有重要意义.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1　行列式与它的转置行列式的值相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证　设 D 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.根据第二节公式(3)有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \\ &= D \end{aligned}$$

性质 1 表明对于一个行列式而言,行和列的地位是对等的,因此凡是有关行的性质,对列也同样成立 .例如在例 2 中,下三角形行列式是上三角形行列式的转置,因此它们的值相等.下面在叙述和证明行列式性质时,我们只对行进行讨论.

性质 2　互换行列式的任意两行(列),行列式改变符号.

证　设给定行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

交换 D 的第 i 行与第 j 行得到

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

按行列式的定义有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(t_1\cdots t_i\cdots t_j\cdots t_n)}b_{1t_1}\cdots b_{it_i}\cdots b_{jt_j}\cdots b_{nt_n} \\ &= \sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(t_1\cdots t_i\cdots t_j\cdots t_n)}a_{1t_1}\cdots a_{jt_i}\cdots a_{it_j}\cdots a_{nt_n} \\ &= \sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(t_1\cdots t_j\cdots t_i\cdots t_n)+1}a_{1t_1}\cdots a_{it_j}\cdots a_{jt_i}\cdots a_{nt_n} \\ &= -\sum_{t_1t_2\cdots t_n}(-1)^{\tau(t_1\cdots t_j\cdots t_i\cdots t_n)}a_{1t_1}\cdots a_{it_j}\cdots a_{jt_i}\cdots a_{nt_n} \\ &= -D \end{aligned}$$

性质 3　若行列式中有两行(列)元素对应相等,则这个行列式等于零.

证　设行列式 D 的第 i 行与第 j 行($i\neq j$)元素对应相等;由性质 2 知,交换这两行后,行列式改变符号;所以新的行列式等于 $-D$. 另外,把元素相同的两行交换,行列式的值不变,仍为 D,因此有 $D=-D$,即 $D=0$.

性质 4　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

证　设行列式 D_1 的第 i 行有公因子 k,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由定义,有

$$D_1=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$
$$=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$
$$=kD$$

推论 行列式中有一行(列)的元素全为零,行列式的值等于零.

这是性质 4 中 $k=0$ 的特例.

性质 5 若行列式中有两行(列)元素成比例,则行列式的值等于零.

性质 5 可以由性质 3 和性质 4 直接推出.

性质 6 如果行列式的某一行(列)是两组数的和,那么这个行列式就等于两个行列式的和,而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式对应的行一样. 即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{第 } i \text{ 行}$$

则 D 等于以下两个行列式的和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 可以由行列式定义直接证得.

性质 7 若在行列式的某一行(列)元素上加上另一行(列)对应元素的 k 倍,行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 7 可以由性质 5 和性质 6 直接证得.

行列式的性质在行列式的计算和证明过程中起着重要作用,熟练地掌握并且适当地运用行列式的性质,可以简化行列式的计算. 下面举例说明.

方便起见,用记号 $r_i\leftrightarrow r_j$ 表示交换行列式的第 i 行与第 j 行;用记号 $c_i\leftrightarrow c_j$ 表示交换

行列式的第 i 列与第 j 列；用记号 r_i+kr_j 表示把第 i 行的每个元素加上第 j 行每个对应元素的 k 倍；用记号 c_i+kc_j 表示把第 i 列的每个元素加上第 j 列每个对应元素的 k 倍.

例 1　计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$$

解　这个行列式的特点是各行四个数的和都是 6，把第二、三、四各列同时加到第一列，把公因子提出；然后从第二、三、四各列都减去第一列就成为三角行列式. 具体计算如下：

$$D\xlongequal[c_1+c_2+c_3+c_4]{}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1\\c_4-c_1}]{}6\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}=6\times 2^3=48$$

例 2　设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\-a_{12}&0&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\-a_{13}&-a_{23}&0&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{1n}&-a_{2n}&-a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

在这个行列式中 $a_{ji}=-a_{ij}$，这样的行列式称为**反对称行列式**. 证明当 n 是奇数时，反对称行列式 $D=0$.

证

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&\cdots&-a_{1n}\\a_{12}&0&-a_{23}&\cdots&-a_{2n}\\a_{13}&a_{23}&0&\cdots&-a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&a_{3n}&\cdots&0\end{vmatrix}$$

每行提取公因子(−1)，由性质 1 得

$$D=D^{\mathrm{T}}=(-1)^nD$$

当 n 为奇数时，$(-1)^n=-1$，所以 $D=-D$.

所以

$$D=0$$

例 3 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=-2\times(-3)\times 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\times(-3)\times 5\times 1=30$$

计算行列式时，常用行列式的性质，把它化为三角形行列式来计算. 例如化为上三角形行列式的步骤是：如果第一列第一个元素为 0，先将第一行与其他行交换，使第一列第一个元素不为 0；然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行，使第一列除第一个元素外其余元素全为 0；再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式；依此类推，直至使它成为上三角形行列式，这时主对角线上元素的乘积就是行列式的值.

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3+r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4.$$

例 5　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

分析　不难发现,这个 n 阶行列式的特点与例 1 中的四阶行列式一样：各行所有元素之和相等.这类行和相等的计算方法是,利用行列式的性质,将第二列至第 n 列同时加到第一列;然后从第二行至第 n 行都减去第一行,从而化成三角形行列式.

解

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_1+c_{n-1}\\ \vdots \\ c_1+c_3\\ c_1+c_2}]{c_1+c_n} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ \vdots \\ r_{n-1}-r_1\\ r_n-r_1}]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

第四节　行列式按行(列)展开定理

第三节中应用行列式性质简化行列式,简化后行列式阶数不变,但利用定义直接计算高阶行列式是很麻烦的,所以本节我们考虑将高阶行列式化为低阶的方法.这种方法不仅在计算上,在理论上也有很重要的意义.

定义 1　在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫作元素 a_{ij} 的**余子**