考研必备

考研数学

海文考研

万学教育

数学
基础必做660题

（客观题专练）

主编 丁 勇 邬丽丽 副主编 周晓燕

- 讲授客观题独有答题技巧
- 呈现小题大做解题思路
- 精选题目提供练手好材料
- 夯实基础迈好考研第一步

中国政法大学出版社

考研必备 考研数学

万学教育 海文考研

数学基础必做660题

（客观题专练）

主　编　丁　勇　邬丽丽　副主编　周晓燕

编　委

邬丽丽　丁　勇　李兰巧　周晓燕　郭　媛　张喜珠

崔新月　雷滨华　刘　曦　洪　欢　吴　娜　巫天超

孙　森　方晓敏　郭啸龙　全　忠　江国才　陈生生

李英男　吴若曦　魏定畅　徐　婕　吴晓林　冯建轩

中国政法大学出版社

2018・北京

图书在版编目（CIP）数据

考研数学基础必做660题/丁勇主编.—北京：中国政法大学出版社，2018.3
ISBN 978-7-5620-8140-1

Ⅰ.①考… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－习题集 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第046218号

出 版 者	中国政法大学出版社
地　　址	北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址	北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　　话	010-58908285(总编室) 58908433(编辑部) 58908334(邮购部)
承　　印	三河市人民印务有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	22
字　　数	450千字
版　　次	2018年3月第1版
印　　次	2018年3月第1次印刷
定　　价	59.80元

前言

Preface

全国硕士研究生招生考试自从1987年统考以来，数学考试大纲出现过三次大的修订。自2009年第三次修订至今，几乎没有变化，但每年考试都有创新的题目出现，不过仔细分析都可以通过基本方法得以解决。这就要求考生不仅要打下坚实的基础，而且还能够将基本概念、基本理论、基本方法融会贯通。要达到这一目的，必须有符合大纲要求、接近真题难度、体现命题规律的"好题"进行训练。基于此，万学考研图书编委会特邀全国著名考研数学辅导专家，根据近年来数学考研命题规律，精心编排、巧妙梳理编写成本书，希望对考生复习有较大的帮助。

本书属题集类用书，书中设计选取的习题全部为客观题，即选择题和填空题两大类。依据最新《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》规定的考试范围及要求，将编写的题目部分及对应的答案解析部分按题型进行划分，并在各分类中按所属学科进行编排（即数学1、数学3包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大部分，数学2包括高等数学、线性代数两大部分）。内容编排体现了全面、深入揭示客观题高分秘诀的特点。

独创作答技巧综述，全面实用 在本书最开始即对客观题常见作答技巧进行全面梳理，并结合简例加以示范，使考生在解题之前即对客观题的解答方法进行总体把握。

题目选取精当，结构清晰合理 题目选取完全基于最新数学考试大纲的规定，摒弃偏题怪题，重视"三基"，并将近年来命题规律融入其中；题目虽然是针对客观题设计，但覆盖面广，难易兼备，拓展性好，对解答题的复习也有着全面引领的作用。并且根据"学科－题型"的层次对题目分类，条理清晰。

题解详尽到位，完整规范 题目解析部分立足于基础阶段复习需要，又不乏对提高阶段复习的帮助，步骤完整规范；提供一题多解开拓考生思路；重视答题技巧，并在关键点精辟点拨。

特别提示 本书适合数学1、数学2、数学3及数农考生使用，对于数学1～3分别适用的题目，书中以上标"①"、"②"、"③"表示，数农考生可参考数学3的适用范围。书中收入了适量真题，对真题，在题号后以"年份^{卷种}"的形式表示，如高等数学第26题选自2009年数学2与数学3真题，表示为"26.(2009$^{[2][3]}$)"。本书中涉及的数学符号力求与教育部考试中心发布的最新考试大纲及使用最广泛的高校教材保持一致，便于读者识别。

我们相信，致力于深度挖掘、展现客观题解题技巧、完全基于考试大纲规定内容的复习特点而编写的《考研数学基础必做660题》必将在市场竞争中掀起新热潮，使参加考研的考生在短时期内得到有效的数学解题训练，迅速提高应试水平，达到事半功倍的效果。

限于编者水平和时间，书中疏漏与错误之处在所难免，恳请读者指正。

编　者

2018年1月

目录

Contents

客观题解题方法与技巧概述

全国硕士研究生招生考试数学试题中共有三种题型：选择题(8 个)、填空题(6 个)、解答题(9 个)，其中选择题、填空题即客观题 14 个题目，每小题 4 分共 56 分，占总分(150 分)的37.3%. 纵观历年考研数学考试成绩，考生在客观题部分得分率较低，导致考研数学成绩不理想，失去了竞争优势. 究其原因主要有：一是考生对数学考试大纲中规定的基本概念和基本理论的理解存在欠缺，甚至有所偏废；二是考生对基本方法掌握得不牢靠，计算的准确率较低；三是考生缺乏解答客观题的方法与技巧.

在客观题中，选择题比填空题得分率更低，是因为选择题考查的内容较广泛，有考查基本概念、基本理论的题目，也有考查基本方法的题目，还有考查基本运算能力的题目，因此解题的方法也就较多，如推理法、反例排除法、赋值法、几何图形法、利用四个选项之间的矛盾等方法. 如果不能将“三基”理解透彻，融会贯通，同时又对选择题的解题方法不熟悉，丢分也就成为自然. 填空题一般都是计算题，但由于其只看结果，不看过程，因此，如果计算的准确率不高的话，填空题也很容易丢分. 同时，同一道题如果以客观题形式出现往往会有更巧妙更简单的方法. 虽然客观题都可以用求解主观题的方法得到结果，但这些常规方法往往比简捷方法花费更长的时间. 因此，要提高求解客观题的速度与得分率，就需要考生不仅要吃透基本概念和基本理论，提高计算的准确率，更重要的是掌握求解客观题的方法与技巧. 下面就客观题解题技巧进行独创性的归纳总结，以期提高考生解答客观题的效率.

一、选择题的解题方法与技巧

全国硕士研究生招生考试数学试卷中的选择题是单项选择题. 所谓的单项选择题就是四个选项中只有一个选项是正确的. 常见的解题方法有以下几种.

1. 推理法

通过直接计算或由已知条件通过演绎推理得出某个选项正确，这种方法通常称为推理法.

例 1 (2011[2][3])已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　)

(A)$k=1,c=4$.　　(B)$k=1,c=-4$.　　(C)$k=3,c=4$.　　(D)$k=3,c=-4$.

【解析】 应选(C).

方法 1 因为当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}$$

$$=\frac{3}{ck}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^{k-1}}+\frac{1-\cos 3x}{x^{k-1}}\right)$$

$$=\frac{3}{ck}\lim_{x\to 0}\left[\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^{k-1}}+\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x^{k-1}}\right]=1,$$

从而 $k-1=2$，即 $k=3$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{cx^k}=\frac{1}{c}\left(-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}\right)=\frac{4}{c}=1,\quad c=4.$$

故应选(C).

方法2　因为当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3),\quad \sin 3x=3x-\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3),$$

所以,由已知条件知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\cdot\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{3!}(3x)^3+o(x^3)}{cx^k}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+o(x^3)}{cx^k}=1,$$

于是 $k=3,c=4$. 故应选(C).

评注

即便都是推理法,如果方法采用不得当,所造成的解题速度的差异也是较大的. 方法1用的是常规方法,利用等价无穷小将问题转化为已知极限求参数;方法2虽然也是将问题转化为已知极限求参数,但由于利用泰勒公式,使得问题较为简便.

例2　(2012[1][2][3])设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdot\cdots\cdot(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$(　)

(A)$(-1)^{n-1}(n-1)!$.　(B)$(-1)^n(n-1)!$.　(C)$(-1)^{n-1}n!$.　(D)$(-1)^n n!$.

【解析】　应选(A).

利用导数的定义求 $f'(0)$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdot\cdots\cdot(e^{nx}-n)-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}(e^{2x}-2)\cdot\cdots\cdot(e^{nx}-n)=\lim_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdot\cdots\cdot(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

故应选(A).

评注

求一元函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处的导数,一般应先求导函数 $f'(x)$,再求 $f'(x_0)$. 对于本题如果是这样的话,考生就会陷入命题人设置的"陷阱". 由于函数表达式的特殊性,用导数的定义求 $f'(0)$ 非常简捷.

例3　(2012[1][2][3])曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为(　　)

(A)0.　(B)1.　(C)2.　(D)3.

【解析】　应选(C).

应同时考虑水平渐近线、铅直渐近线与斜渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$,所以 $y=1$ 是曲线的水平渐近线,同时说明曲线无斜渐近线.

又因为 $\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$,　$\lim\limits_{x\to -1}y=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$,

所以 $x=1$ 是曲线的铅直渐近线,$x=-1$ 不是曲线的铅直渐近线.

综上所述,应选(C).

例 4 (2009[1][2][3])设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵.若 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$.

【解析】 应选(B).

本题主要考查分块矩阵的行列式、伴随矩阵的相关公式以及分块矩阵的逆矩阵.

由 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=6$ 知,矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$ 可逆,从而

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{-1}=(-1)^{2\times2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\\ |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^*\\ |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}.$$

故应选(B).

例 5 (2006[1][3])设 A、B 为两个随机事件,且 $P(B)>0$,$P(A|B)=1$,则必有(　　)

(A)$P(A\cup B)>P(A)$.　　(B)$P(A\cup B)>P(B)$.

(C)$P(A\cup B)=P(A)$.　　(D)$P(A\cup B)=P(B)$.

【解析】 应选(C).

本题主要考查乘法公式与加法公式.

由已知条件与乘法公式有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)=P(B),$$

再由加法公式有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A).$$

故应选(C).

2. 几何图形法

根据题目条件,画出函数 $f(x)$ 的图形,再根据函数图形的特点找出正确选项的方法称为几何图形法.

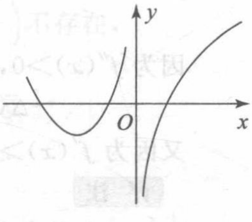

图 1

例 6 (2003[1][2])设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其导函数的图形如图 1 所示,则 $f(x)$ 有(　　)

(A)一个极小值点和两个极大值点.

(B)两个极小值点和一个极大值点.

(C)两个极小值点和两个极大值点.

(D)三个极小值点和一个极大值点.

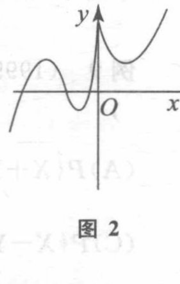

图 2

【解析】 应选(C).

本题主要考查导函数 $y=f'(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图形的关系与一元函数的极值(点).由于已知函数是抽象函数,无法用推理法及反例排除法解决.考虑用 $y=f'(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形之间的关系画出 $y=f(x)$ 的图形,利用定性分析的方法解决该问题.

根据 $y=f'(x)$ 的图形画出 $y=f(x)$ 的图形,如图 2 所示,根据 $y=f(x)$ 的图形知,$f(x)$ 有两个

极小值点和两个极大值点. 故应选(C).

例 7　(2011[2])函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为(　　)

(A)0.　　(B)1.

(C)2.　　(D)3.

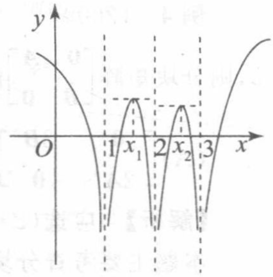

图 3

【解析】　应选(C).

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to3}f(x)=-\infty$,所以 $x=1,x=2,x=3$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线. 又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,由此可画出 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的草图,如图 3 所示,由图形可知,存在两点 x_1,x_2,使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$,即 $f(x)$ 有两个驻点. 故应选(C).

评 注

本题也可用直接计算法求解,即去掉 $f(x)$ 表达式中的绝对值符号,求 $f'(x)$,再令 $f'(x)=0$,求出 $f(x)$ 的驻点. 但这种方法是以花去大量的时间为代价的,因此此类题目用图解法不失为一种好的方法.

例 8　(2006[1][2][3])设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0,f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　)

(A)$0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B)$0<\Delta y<\mathrm{d}y$.　　(C)$\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D)$\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

【解析】　应选(A).

方法 1(几何图形法)　由 $f'(x)>0,f''(x)>0$ 知,函数 $f(x)$ 单调增加,曲线 $y=f(x)$ 是凹的. 由此作函数 $y=f(x)$ 的图形,如图 4 所示.

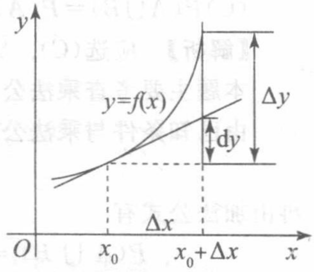

图 4

显然,当 $\Delta x>0$ 时,$\Delta y>\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$. 故应选(A).

方法 2(推理法)　由拉格朗日中值定理,得

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(\xi)\Delta x\quad(x_0<\xi<x_0+\Delta x).$$

因为 $f''(x)>0$,所以 $f'(x)$ 单调增加,从而 $f'(\xi)>f'(x_0)$,于是

$$\Delta y=f'(\xi)\Delta x>f'(x_0)\Delta x=\mathrm{d}y.$$

又因为 $f'(x)>0$,所以 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$. 故应选(A).

评 注

本题考查导数的几何应用及微分的几何意义,利用一阶导数的符号确定函数的单调性,利用二阶导数的符号确定函数曲线的凹凸性. 方法 1 借助于函数 $y=f(x)$ 的图形快速找到正确的选项,较方法 2 而言提高了解题速度.

例 9　(1999[1])设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$,则(　　)

(A)$P\{X+Y\leqslant0\}=\dfrac{1}{2}$.　　(B)$P\{X+Y\leqslant1\}=\dfrac{1}{2}$.

(C)$P\{X-Y\leqslant0\}=\dfrac{1}{2}$.　　(D)$P\{X-Y\leqslant1\}=\dfrac{1}{2}$.

【解析】　应选(B).

由于均服从正态分布且相互独立的随机变量的线性组合仍然服从正态分布，所以

$$X+Y \sim N(1,(\sqrt{2})^2), \qquad X-Y \sim N(-1,(\sqrt{2})^2).$$

由正态分布的几何意义知，正态分布的密度函数关于均值左右对称，于是其小于均值的概率为$\frac{1}{2}$，从而

$$P\{X+Y \leqslant 1\}=\frac{1}{2}.$$

故应选(B).

3. 反例排除法

通过满足条件的反例，排除四个选项中的某三个选项，得到正确答案的方法称为反例排除法. 这种方法的关键是举出满足题目条件的反例(特例)，因此需要考生在复习过程中，积累一些简单的反例. 对于例 8，我们也可用反例排除法，快速找到正确选项.

取 $f(x)=x^2, x\in[0,+\infty)$，则 $f'(x)=2x>0$，$f''(x)=2>0$，取 $x_0=1$，则 $\mathrm{d}y=2\Delta x$，$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2-1=2\Delta x+(\Delta x)^2$，由于 $\Delta x>0$，则 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$，排除(B)、(C)、(D). 故应选(A).

例 10 (2002[1][2])设函数 $y=f(x)$在$(0,+\infty)$内有界且可导，则(　　)

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(B)当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(C)当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(D)当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

【解析】 应选(B).

取 $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$，则 $f'(x)=\frac{2x^2\cos x^2-\sin x^2}{x^2}$，因为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{x}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}\right)\text{不存在},$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^2}{x}=0, \qquad \lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2\cos x^2-\frac{\sin x^2}{x^2}\right)=1,$$

排除(A)、(C)、(D). 故应选(B).

例 11 (2005[3])以下四个命题中，正确的是(　　)

(A)若 $f'(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(B)若 $f(x)$在$(0,1)$内连续，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(C)若 $f'(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f(x)$在$(0,1)$内有界.

(D)若 $f(x)$在$(0,1)$内有界，则 $f'(x)$在$(0,1)$内有界.

【解析】 应选(C).

取 $f'(x)=\frac{1}{x}$，在$(0,1)$内连续，但 $f(x)=\ln x$ 在$(0,1)$内无界，排除(A).

取 $f(x)=\frac{1}{x}$，在$(0,1)$内连续，但 $f(x)$在$(0,1)$内无界，排除(B).

取 $f(x)=\sqrt{x}$，在$(0,1)$内有界，但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$在$(0,1)$内无界，排除(D).

故应选(C).

评 注

对于像例10、例11这样的定性题目,由于很难用推理法找出正确选项,反例排除法就成了解决这类问题的有力武器.

例12 (2004[3])设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f'(a)>0$, $f'(b)<0$,则下列结论中错误的是( )

(A)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)>f(a)$. (B)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)>f(b)$.

(C)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f'(x_0)=0$. (D)至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)=0$.

【解析】 应选(D).

取 $f(x)=2-x^2$, $x\in[-1,1]$,则 $f'(x)=-2x$ 在 $[a,b]=[-1,1]$ 上连续,且 $f'(a)=f'(-1)=2>0$, $f'(b)=f'(1)=-2<0$,满足已知条件.

由 $f(x)=2-x^2$ 的图形可知,在 $(-1,1)$ 内, $f(x)>1$,即对任意 $x_0\in(-1,1)$,都有 $f(x_0)\neq0$,这表明(D)选项是错误的.故应选(D).

例13 (2001[3])设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续,又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,则( )

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【解析】 应选(B).

方法1(推理法) 由 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续及 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,得 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)=0$,即 $x=a$ 是 $f(x)$ 的驻点.从而

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a)=-1<0,$$

所以 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

方法2(反例排除法) 取 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2$,则 $f'(x)=-(x-a)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,满足已知条件.由 $f(x)$ 的图形知, $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点,排除(A)、(D), $(a,f(a))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点,排除(C),故应选(B).

例14 (2003[3])设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,且 $f'(0)$ 存在,则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$( )

(A)在 $x=0$ 处左极限不存在. (B)有跳跃间断点 $x=0$.

(C)在 $x=0$ 处右极限不存在. (D)有可去间断点 $x=0$.

【解析】 应选(D).

方法1(推理法) 因为 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数,所以 $f(0)=0$,又 $f'(0)$ 存在.所以

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点.应选(D).

方法2(反例排除法) 取 $f(x)=x$,则 $f(x)$ 是不恒等于零的奇函数,且 $f'(x)=1$,即 $f'(0)$ 存在. $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=1$.显然(A)、(B)、(C)均不正确,故应选(D).

评 注

例 13、例 14 用推理法与排除法都能快速找到正确的选项. 如果能够吃透基本知识、基本理论,熟练掌握基本方法,用推理法是较好的选择. 否则的话,反例排除法不失为一种快速找到正确答案的方法.

例 15 (2005[1][2])设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$,其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有( )

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【解析】 应选(B).

取 $\varphi(x)=x^2,\psi(x)=0$,则

$$u(x,y)=(x+y)^2+(x-y)^2=2x^2+2y^2.$$

于是 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=4x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=4y,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4.$

由此可知,选项(A)、(C)、(D)都不正确. 故应选(B).

评 注

虽然本题可以通过直接计算偏导数找到正确选项,但由于计算量偏大,不如本方法简便.

例 16 (2005[3])设 $a_n>0,n=1,2,\cdots$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则下列结论正确的是( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散. (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛. (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

【解析】 应选(D).

取 $a_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 收敛,但

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ 发散,排除(A);

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散,排除(B);

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1}+\dfrac{1}{2n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-1}{(2n-1)2n}$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4n-1}{(2n-1)2n}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{1}{n}}{2\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}=1,$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,由比较审敛法的极限形式,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-1}{(2n-1)2n}$ 发散,排除(C). 故应选(D).

评 注

由于收敛级数任意加括号后所形成的级数仍然收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 加括号后可写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$，收敛，故应选(D).

虽然用推理法也能较快找到正确的选项，推理法是从已知条件推出正确的结论，但由于还不知道四个选项中哪一个正确，所以进行推理时，快速找到推理的切入点就成了解题的关键. 反例排除法就是解决这类问题行之有效的方法. 一般地，关于与抽象级数相关的单项选择题，下面几个常见的级数是举反例的首选：

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散；

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$(条件) 收敛；

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$(条件) 收敛.

例 17　(2002[3])设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$(　　)

(A)当 $n>m$ 时仅有零解.　　(B)当 $n>m$ 时必有非零解.

(C)当 $m>n$ 时仅有零解.　　(D)当 $m>n$ 时必有非零解.

【解析】 应选(D).

方法 1(推理法)　因为当 $n<m$ 时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，从而线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，故应选(D).

方法 2(反例排除法)　当 $m>n$ 时，取 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(3,4)$，则 $|\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}3&4\\6&8\end{vmatrix}=0$，线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，排除(C).

当 $n>m$ 时，取 $\boldsymbol{A}=(1,2)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{AB}|=0$，线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，排除(A).

当 $n>m$ 时，取 $\boldsymbol{A}=(1,2)$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{AB}|=3\neq0$，线性方程组 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，排除(B).

故只有(D)正确.

4. 赋值法

当选择题的选项含任意常数时，可以取一些特殊值去排除某些选项，从而选出正确选项的方法称为赋值法.

例 18　(2002[2])设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则对任意常数 k，必有(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

【解析】 应选(A).

因为 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

取 $k=0$，由(B)知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关矛盾，排除(B).

取 $k=0$，由(C)知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，与已知条件矛盾，排除(C).

取 $k=1$，由(D)知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，

$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，而 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，于是 $\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，与已知条件矛盾，排除(D). 故应选(A).

5. 利用题目选项中的矛盾找出正确选项

例 19 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,c_1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,c_2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,c_3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,0,8)^{\mathrm{T}}$，则下列结论正确的是(　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性相关.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性无关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性相关.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关.

【解析】 应选(D).

若(C)正确，即 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，即(A)正确，排除(C).

若(B)正确，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即(D)正确，排除(B).

若(A)正确，则(C)、(D)可能正确，排除(A). 故应选(D).

二、填空题的解题方法与技巧

填空题一般都是计算题，可以利用求解解答题的方法，例如：

(2013[2]) $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ________.

这是一个"1^{∞}"型的极限，利用对数恒等式，得

$$\lim_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{\ln(1+x)}{x}}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=$$

$\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，除此之外，掌握一些填空题的技巧对提高解题效率有重要的促进作用.

1. 利用几何意义

例 1 (2000[1]) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________.

【解析】 应填 $\dfrac{\pi}{4}$.

方法 1 由定积分的几何意义，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=0,x=1$，$y=0$ 与曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 所围成的图形的面积，如图 5 所示，所以

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}S=\frac{\pi}{4}$(其中 S 为单位圆 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$ 的面积).

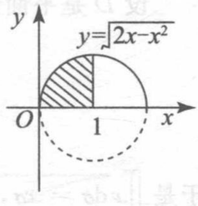

图 5

方法 2 $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$.

令 $x-1=\sin\theta,\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$，则

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0\\&=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

评 注

方法 1 能在较短时间内，快速找到正确的答案，但如果能够结合求解解答题的方法，融会贯通，对于进一步提高解题能力有较大的帮助，以 2012 年数学 1 考题 $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________ 为例：

方法1 令 $x-1=\sin\theta,\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,则

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\sin\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}.$$

方法2 $$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2(2x-2+2)\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^2(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(2x-x^2)+\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\left[(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^2+\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

例2 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

【解析】 应填 $\dfrac{2}{3}\pi R^3$.

由二重积分的几何意义,$\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示以 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 为底,以 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 为曲顶所构成的曲顶柱体的体积,如图6所示,即是球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 的体积的一半,所以

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

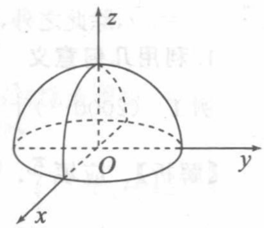

图 6

2. 利用形心坐标

设 D 是平面区域,其形心坐标为 $(\bar{x},\bar{y})$,则

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma},$$

于是 $\displaystyle\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma=\bar{x}\sigma,\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=\bar{y}\sigma$,其中 σ 是平面区域 D 的面积.

例3 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x-4y}(3x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

【解析】 应填 -5π.

积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x-4y\}=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y+2)^2\leqslant 5\}$,其形心坐标为 $\bar{x}=1,\bar{y}=-2$,积分区域的面积 $\sigma=5\pi$,于是

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2x-4y}(3x+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\times1\times5\pi+2\times(-2)\times5\pi=-5\pi.$$

3. 利用被积函数的奇偶性与积分范围的对称性

如果 $f(x)$ 是连续函数,则 $\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}2\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 是偶函数时},\\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 是奇函数时}.\end{cases}$

类似于二重积分,(数学 1 要求的)三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分也有相应的简化计算公式.

例 4 (2001[2]) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=$ ________.

【解析】 应填$\frac{\pi}{8}$.

$$\begin{aligned}原式&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2 x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=0+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x\\&=2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

评 注

本题用到了公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$$

本题也可以这样计算:

$$\begin{aligned}原式&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{8}-\left[\frac{1}{16}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

例 5 (2012[2])设区域 D 是由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1$ 所围成,则 $\iint\limits_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【解析】 应填$-\pi$.

方法 1
$$\begin{aligned}原式&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}(x^5y-1)\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}x^5-1-\frac{1}{2}x^5\sin^2 x+\sin x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)\mathrm{d}x=-\pi.\end{aligned}$$

方法 2 如图 7 所示 ,按照对被积函数与积分区域的可加性,

$$原式=\iint\limits_{D_1}x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

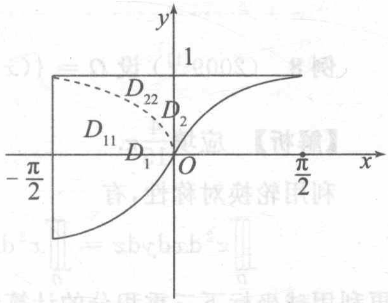

图 7

由于 D_1 关于 x 轴对称,x^5y 关于 y 为奇函数,所以 $\iint\limits_{D_1}x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$;又由于 D_2 关于 y 轴对称,x^5y 关于 x 为奇函数,所以 $\iint\limits_{D_2}x^5y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,于是

$$\begin{aligned}原式&=-\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{D_{11}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint\limits_{D_{22}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-2\left(\iint\limits_{D_{11}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{22}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=-2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1=-\pi.\end{aligned}$$

4. 利用轮换对称性

例 6　(2008[3]) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

【解析】 应填 $\frac{\pi}{4}$.

因为积分区域 D 关于 x 轴对称，函数 y 关于 y 是奇函数，所以 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 由轮换对称性以及极坐标下二重积分的计算方法，有

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

故
$$\iint\limits_D (x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$$

例 7　$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________，其中 $f(x)$ 是大于零的连续函数.

【解析】 应填 $\frac{1}{8}(a+b)\pi R^2$.

方法 1　由轮换对称性，$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\frac{f(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\frac{f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以，

$$\text{原式}=a\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\frac{f(x)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+b\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\frac{f(y)}{f(x)+f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\left[\frac{f(x)}{f(x)+f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)+f(y)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a+b}{2}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{8}(a+b)\pi R^2.$$

方法 2(特殊函数法)　取 $f(x)=1$，则原式 $=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,\,y\geqslant 0}}\frac{a+b}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{8}(a+b)\pi R^2$.

评 注

本题方法 1 利用轮换对称性求解是常规方法，方法 2 利用特殊函数法快速简捷. 对于同一个题目既训练了大题的方法，又提高了应对客观题快速解题的能力，对考生的复习可以起到较大的促进作用.

例 8　(2009[1]) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________.

【解析】 应填 $\frac{4}{15}\pi$.

利用轮换对称性，有

$$\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_\Omega y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

再利用球坐标下三重积分的计算有

$$\text{原式}=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r^2\cdot r^2)\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1=\frac{4}{15}\pi.$$

评 注

本题还可以用截面法、柱坐标、直接利用球坐标等三种计算方法，但上面解法计算量相对较小.