普通高校“十三五”实用规划教材——公共基础系列

线性代数

（经管类）

（第2版）

纪德云　张　良　主　编
赵春昶　刘玉蓉　副主编

赠送
电子课件

清华大学出版社

普通高校“十三五”实用规划教材——公共基础系列

线性代数(经管类)

(第 2 版)

纪德云　张　良　主　编

赵春䄵　刘玉蓉　副主编

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是根据教育部有关的教学大纲及最新全国硕士研究生入学统一考试(数学三)大纲的要求，总结作者多年讲授线性代数课程的实践经验编写而成的。

全书介绍了行列式、矩阵及其运算、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量以及二次型等线性代数的基础理论与方法。

本书语言叙述力求深入浅出、通俗易懂，内容编排力求层次清晰、简明扼要，例题与习题选取力求少而精。本书可作为经济管理类本科生的试用教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(经管类)/纪德云，张良主编. —2 版. —北京：清华大学出版社，2017
(普通高校“十三五”实用规划教材——公共基础系列)
ISBN 978-7-302-47520-0

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①纪…　②张…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 140336 号

责任编辑：秦　甲　桑任松
封面设计：刘孝琼
责任校对：吴春华
责任印制：沈　露
出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn, 010-62791865
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：9.25　　**字　　数**：224 千字
版　　次：2015 年 4 月第 1 版　2017 年 8 月第 2 版　　**印　　次**：2017 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：29.00 元

产品编号：075040-01

第 2 版前言

线性代数主要研究变量间的线性关系。由于线性关系存在于自然科学与社会科学的各个领域，且大量的非线性问题在一定条件下也可转化为线性问题来处理，于是线性代数理论方法广泛应用于自然科学、工程技术与经济管理科学的各领域中，尤其与金融、证券、投资、运筹学等学科相互渗透或结合得紧密。因此，“线性代数”已成为经济管理类专业学生必修的一门重要基础课，它被列为硕士研究生入学考试的必考课程。通过本课程的学习，希望学生能掌握线性代数的基本思想与方法，并且具备一定的分析与解决实际问题的能力。

本书是根据教育部有关的教学大纲及最新全国硕士研究生入学统一考试(数学三)大纲的要求，总结作者多年讲授线性代数课程的实践经验编写而成的。

线性代数课程有以下特征。

(1) 内容抽象、前后关联、相互渗透。

(2) 概念多、定理多、符号多。

(3) 计算原理简单，但计算量较大。

(4) 证明一般需要较高的技巧。

(5) 应用广泛。

为了学好这门比较抽象的课程，本书力求做到以下几点。

(1) 注重线性代数思想与方法的介绍。

(2) 内容精练，结构完整，推理简明，通俗易懂。

(3) 语言叙述深入浅出，便于自学。

(4) 例题选取做到少而精。

(5) 注重应用。

第 2 版是对本书 2015 年 4 月第 1 版的修订。修正了第 1 版的一些错误与不妥之处。基本保持了第一版的风格与体系。

参加第 2 版修订工作的有：刘玉蓉老师(修订第 1 章)，赵春昶老师(修订第 2 章)，张良老师(修订第 3 章、第 4 章)，纪德云老师(修订第 5 章)，最后由纪德云老师、张良老师修改定稿。在修订过程中，承蒙程从沈老师的大力帮助，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

第 1 版前言

线性代数主要研究变量间的线性关系。由于线性关系存在于自然科学与社会科学的各个领域，且大量的非线性问题在一定条件下也可转化为线性问题来处理，于是线性代数理论方法广泛应用于自然科学、工程技术与经济管理科学的各领域中，尤其与金融、证券、投资、运筹学等学科相互渗透或结合。因此，线性代数已成为经济管理类专业学生必修的一门重要基础课，它被列为硕士研究生入学考试的必考课程。通过本课程的学习，希望学生能掌握线性代数的基本思想与方法，并且具备一定的分析与解决实际问题的能力。

本书是根据教育部有关的教学大纲及最新全国硕士研究生入学统一考试(数学三)大纲的要求，总结作者多年讲授线性代数课程的实践经验编写而成的。

线性代数课程有如下特征。

(1) 内容抽象、前后关联、相互渗透；

(2) 概念多、定理多、符号多；

(3) 计算原理简单，但计算量较大；

(4) 证明一般需要较高的技巧；

(5) 应用广泛。

为了学好这门比较抽象的课程，本书力求做到以下几点。

(1) 注重线性代数思想与方法的介绍；

(2) 内容精练，结构完整，推理简明，通俗易懂；

(3) 语言叙述深入浅出，便于自学；

(4) 例题选取做到少而精；

(5) 注重应用。

全书由马毅老师和张良老师主持编写。其中第 1 章由刘玉蓉老师撰写，第 2 章由赵春昶老师撰写，第 3～5 章由张良老师撰写，最后由马毅老师和张良老师修改定稿。在编写过程中，承蒙程从沈老师的大力帮助，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

目　　录

第1章 行 列 式

数学是从人们的需要中产生的，行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的。

1.1 二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

可借助对角线法则来记忆，参看图 1-1。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$-\qquad +$

图 1-1

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$等于实连线上两元素乘积与虚连线上两元素乘积之差。

例 1-1 计算二阶行列式$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$。

解 $D=3\times1-(-2)\times2=7$

2. 三阶行列式

用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$ $-a_{11}a_{23}a_{32}$，称它为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-2}$$

三阶行列式含有 6 项，每项均为不同行、不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循如图 1-2 所示的对角线法则：图中各实线连接的 3 个元素的乘积是代数和的正项，各虚线连接的 3 个元素的乘积是代数和的负项。

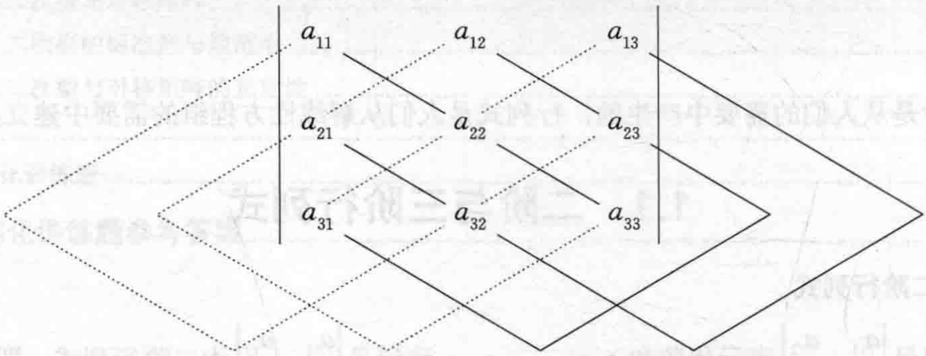

图 1-2

例 1-2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$。

解 $D=3\times9\times1+3\times0\times0+(-2)\times1\times2-(-2)\times9\times0-3\times1\times1-3\times0\times2$
$=27-4-3=20$

例 1-3 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$。

解 由 $3x^2+4x+18-12-2x^2-9x=x^2-5x+6=0$，解得 $x=2$ 或 $x=3$。

对角线法则只适用于二阶和三阶行列式，为研究更高阶行列式，下面将介绍有关排列及逆序数的知识。

1.2 排列及其逆序数

定义 1-1 由 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列。

例如，2 3 4 1 及 4 3 2 1 都是 4 级排列，5 4 2 3 1 是一个 5 级排列。

定义 1-2 在一个 n 级排列中，若较大的数排在较小的数前面，那么它们就构成一个逆序，一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数。

排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记作 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$。

求排列逆序数的方法：若比 1 大而排在 1 前面的数有 k_1 个，比 2 大而排在 2 前面的数有 k_2 个，比 3 大而排在 3 前面的数有 k_3 个，……，则这个排列的逆序数为 $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots$。

例 1-4 求下列排列的逆序数。

(1) 4 5 3 1 2；(2) 7 6 5 4 3 2 1。

解 (1) $\tau(45312) = 3+3+2 = 8$

(2) $\tau(7654321) = 6+5+4+3+2+1 = 21$

定义 1-3 若 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为奇数，则称排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列；若 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为偶数，则称排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列。

例如，排列 7 6 5 4 3 2 1 是奇排列，排列 4 5 3 1 2 是偶排列。

定义 1-4 将一个排列中的任意两个数互换位置，这种对排列的变换称为对换。

定理 1-1 任一排列经过一次对换后，其奇偶性改变。

证明 先证相邻对换的情形。

设排列 $a_1 \cdots a_s a b b_1 \cdots b_t$，对换 a 与 b，变为排列 $a_1 \cdots a_s b a b_1 \cdots b_t$。显然，$a_1, \cdots, a_s$ 和 $b_1, \cdots, b_t$ 这些数的逆序数经过对换并不改变，而 a、b 两数的逆序数改变为：当 $a < b$ 时，经过对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a > b$ 时，经过对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1，所以排列 $a_1 \cdots a_s a b b_1 \cdots b_t$ 与排列 $a_1 \cdots a_s b a b_1 \cdots b_t$ 的奇偶性不同。

再证一般对换的情形。

设排列 $a_1 \cdots a_s a b_1 \cdots b_t b c_1 \cdots c_m$，把它作 t 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_s a b b_1 \cdots b_t c_1 \cdots c_m$，再作 $t+1$ 次相邻对换，变成 $a_1 \cdots a_s b b_1 \cdots b_t a c_1 \cdots c_m$。总之，经过 $2t+1$ 次相邻对换，排列 $a_1 \cdots a_s a b_1 \cdots b_t b c_1 \cdots c_m$ 变成 $a_1 \cdots a_s b b_1 \cdots b_t a c_1 \cdots c_m$，所以这两个排列的奇偶性相反。

定理 1-2 n 级排列共有 $n!$ 个，并且当 $n > 1$ 时，在 $n!$ 个不同的排列中，奇排列与偶排列各占一半。

1.3 *n* 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构。三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

容易看出以下几点。

(1) 三阶行列式表示所有位于不同行、不同列的 3 个元素乘积的代数和。3 个元素的乘积可以表示为 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$，$j_1\ j_2\ j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1\ j_2\ j_3$ 遍取 3 级排列时，即得到三阶行列式的所有项(不包括正负号)，共为 $3! = 6$ 项。

(2) 各项的正负号与列下标的排列对照如下。

带正号的三项列下标排列：123，231，312。

带负号的三项列下标排列：321，213，132。

前 3 个排列都是偶排列，后 3 个排列都是奇排列。因此，各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$，其中 $\tau(j_1j_2j_3)$ 为列下标排列的逆序数。

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 3 级排列 $j_1\, j_2\, j_3$ 求和。

仿此，可把行列式推广到一般情形。

定义 1-5 令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1-3}$$

式(1-3)的左端称为 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列，a_{ij} 称为行列式的第 i 行第 j 列元素；式(1-3)的右端称为 n 阶行列式的展开式，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和。

[注]

(1) 行列式的展开式是行列式中一切不同行、不同列元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 前面加上符号 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ 的代数和。

(2) n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项，当 $n>1$ 时，$n!$ 项中一半前面的符号取正号，另一半取负号。

(3) 式(1-3)左端的 n 阶行列式可简记为 $\left| a_{ij} \right|$。

例 1-5 证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-4}$$

证明 由于当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ij_i}，其下标应有 $i \geqslant j_i$，即 $j_1 \leqslant 1, j_2 \leqslant 2, \cdots, j_n \leqslant n$。

在所有排列中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。此项的符号为正，所以

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，可得上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-5}$$

特别是对角行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-6}$$

这些结论在以后行列式的计算中可直接应用。

1.4 行列式的性质

将 n 阶行列式 D 的行与列互换位置，即将第一行变成第一列，第二行变成第二列，……，第 n 行变成第 n 列，这样所得的行列式称为 D 的转置行列式，记作 D^{T}，即

若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

性质 1-1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$。

证明从略。

[注]

(1) 由此得，行列式的行与列具有同等的地位，凡是对行成立的性质，对列也成立；反之亦然。

(2) D 与 D^{T} 互为转置行列式。

性质 1-2 行列式的任意两行(列)互换位置，行列式的值仅改变正负号。

证明 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad (i \neq s)$$

交换 D 的第 i 行与第 s 行，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

则由定理 1-1 得

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$$

$$=-\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=-D_1$$

推论 若行列式中有两行(列)完全相同，则该行列式的值等于 0。

性质 1-3 行列式某行(列)元素的公因式可提至行列式符号外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 左端 $=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=\text{右端}$$

推论 1 若行列式某行(列)元素全为 0，则该行列式的值等于 0。

推论 2 若行列式中有两行(列)元素对应成比例，则该行列式的值等于 0。

性质 1-4 若行列式中某一行(列)的元素皆为两数之和，则此行列式等于两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 左端 $=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+$$

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右端}$$

性质 1-5 将行列式某行(列)的 k 倍加于另一行(列)，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \ddots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & \ddots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}\quad(i\neq j)$$

证明 由性质 4、性质 3 的推论 2 立得。

[注] 今后用 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列。互换 i、j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$；互换 i、j 两列，记作 $c_i\leftrightarrow c_j$；用非零数 k 乘以第 j 列，记作 kc_j；将第 j 行的 k

倍加于第 i 行，记作 $r_i + kr_j$，……

例 1-6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\3 & -6 & 3\\6 & -12 & 4\end{vmatrix}$。

解 由于第 1 列与第 2 列对应的元素成比例，根据性质 1-3 的推论 2，得

$$D=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\3 & -6 & 3\\6 & -12 & 4\end{vmatrix}=0$$

例 1-7 计算 $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\-5 & 1 & 3 & -4\\2 & 0 & 1 & -1\\1 & -5 & 3 & -3\end{vmatrix}$。

解 $D\overset{(1)}{=}-\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\1 & -5 & 3 & -4\\0 & 2 & 1 & -1\\-5 & 1 & 3 & -3\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}-\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & -8 & 4 & -6\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 16 & -2 & 7\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & -8 & 4 & -6\\0 & 16 & -2 & 7\end{vmatrix}$

$$\overset{(4)}{=}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & 8 & -10\\0 & 0 & -10 & 15\end{vmatrix}\overset{(5)}{=}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & 8 & -10\\0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{2}\end{vmatrix}=40$$

[注] 变换规则分别为：(1) $c_1 \leftrightarrow c_2$；(2) $r_2+(-1)r_1, r_4+5r_1$；(3) $r_2 \leftrightarrow r_3$；(4) $r_3+4r_2, r_4+(-8)r_2$；(5) $r_4+\frac{10}{8}r_3$。

例 1-8 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a & a\\a & x & a & \cdots & a & a\\a & a & x & \cdots & a & a\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\a & a & a & \cdots & x & a\\a & a & a & \cdots & a & x\end{vmatrix}$。

解 $D\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a\\x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a\\x+(n-1)a & a & x & \cdots & a & a\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a\\x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a & a\\1 & x & a & \cdots & a & a\\1 & a & x & \cdots & a & a\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\1 & a & a & \cdots & x & a\\1 & a & a & \cdots & a & x\end{vmatrix}$

$$\overset{(3)}{=}[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

[注] 变换规则分别为：(1) $c_1+c_2,c_1+c_3,\cdots,c_1+c_n$；(2) 将第一列公因式 $x+(n-1)a$ 提至行列式符号外；(3) $r_2+(-1)r_1,r_3+(-1)r_1,\cdots,r_n+(-1)r_1$。

1.5 行列式按行(列)展开

一般来说，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算简单，因此很自然提出，能否把高阶行列式转化为低阶行列式来计算。为此，先引进余子式和代数余子式的概念。

定义 1-6 在 n 阶行列式 $\left|a_{ij}\right|$ 中，将元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去，剩余元素按照原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}；而称

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1-7}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}$$

定理 1-3 行列式等于它的任意一行(列)各元素与其代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-8}$$

证明 先讨论 D 的第一行元素除 $a_{11}\neq 0$ 外，其余元素都为 0 的情形，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

因为D的每一项都含有第一行中元素，但第一行中仅有$a_{11}\neq 0$，所以

$$D=\sum_{1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{11}\sum_{j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_2\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}$$

由$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$，得$D=a_{11}A_{11}$。

再讨论D中第i行元素除$a_{ij}\neq 0$外，其余元素都为0的情形，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为了利用上述特殊情形的结果，将D的第i行依次与第$i-1,\cdots,2,1$各行交换后，再将第j列依次与第$j-1,\cdots,2,1$各列交换，经过$i+j-2$次交换D的行和列，得

$$D=(-1)^{i+j-2}\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

最后讨论一般情形

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据上述结论，得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

[注] 在行列式性质中，凡是对行成立的性质，对列都成立。因此对行列式按列展开有