

大学生 数学竞赛题选解

朱尧辰 编著



中国科学技术大学出版社

大学生 数学竞赛题选解

朱尧辰 编著



中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书给出了从国内外各类大学生数学竞赛题中选取的一些典型问题的解答,并相应配备了练习题(附解答或提示);以数学分析和高等代数为主,还涉及数论和组合等.全书包括竞赛题140余道、练习题350余道(题或题组形式).竞赛题和练习题的解答十分具有启发性和参考价值.

本书可作为大学生数学竞赛、大学数学教学和研究生入学考试复习的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学竞赛题选解/朱尧辰编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2017.6
ISBN 978-7-312-04083-2

I. 大… II. 朱… III. 高等数学—高等学校—题解 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 083104 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
<https://zgkxjtdxcbs.tmall.com>
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 28.75
字数 830 千
版次 2017 年 6 月第 1 版
印次 2017 年 6 月第 1 次印刷
定价 75.00 元

前 言

本书给出了从国内外各类大学生数学竞赛题中选取的一些典型问题的解答,并相应配备了练习题(附解答或提示).题目的取材范围比目前国内有关竞赛大纲要求有所放宽,整体难度也有所提高.因此本书不仅是一种大学生数学竞赛辅助读物,也可用作大学数学教学及硕士研究生入学考试复习的参考资料.

本书所选问题以数学分析和高等代数为主,还涉及数论和组合等.题型只包含证明题和计算题.选题没有特定标准,主要考虑问题的内容(例如同类资料较少涉及)和解法(例如解法的多样性或技巧性,对读者有所启发或可供借鉴).所有解答都经过重新整理和表述,有些解答是编写时新加的(特别是原始资料中没有给出解答的).对于解答中涉及的某些通用教材中没有讲述的知识,我们一般通过注解的方式进行适当补充.

全书包含3章,各章粗略地划分为若干小节.第1章是数学分析问题,包含微分学、积分学、无穷级数、函数方程、不等式和常微分方程,个别问题涉及复分析、概率论和勒贝格积分.第2章是高等代数(线性代数和多项式)问题,以线性代数问题为主.第3章是数论与组合问题,包括初等数论技巧(但问题或解法与流行的“奥数”问题有所差别)、简易解析方法(如素数定理,涉及一点基本数论函数)和丢番图方程;还有一些与有限集有关的组合问题(也涉及简单的母函数方法).对于每章配备的练习题,其中一部分是基本训练题,为读者熟悉某些基本技巧而设,也包含若干难题.练习题无论是内容还是难度都是混编的,其中标“*”的题选自大学生数学竞赛题或近期国内某些科研单位研究生入学考试试题.所有练习题都附有参考性解答或提示.

限于作者的水平和经验,本书在取材、编排和解题等方面难免存在不妥、疏漏甚至谬误,欢迎读者和同行批评指正.

朱尧辰

2016年10月于北京

符号说明

1° $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (依次) 正整数集, 整数集, 有理数集, 实数集, 复数集.

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\mathbb{R}_+$ 正实数集.

$|S|$ 有限集 S 所含元素的个数 (也称 S 的规模).

2° $[a]$ 实数 a 的整数部分, 即不超过 a 的最大整数.

$\{a\} = a - [a]$ 实数 a 的分数部分, 也称小数部分.

$\lceil a \rceil$ 大于或等于 a 的最小整数.

$\lfloor a \rfloor$ 小于或等于 a 的最大整数 (即 a 的整数部分 $[a]$).

$((x))$ 距实数 x 最近的整数.

$\|x\|$ (实轴上) 点 x 与距它最近的整数点间的距离.

$a \mid b$ ($a \nmid b$) 整数 a 整除 (不整除) 整数 b .

$\gcd(a, b, \dots, t)$ 整数 $a, b, \dots, t$ 的最大公因子, 不引起混淆时记为 $(a, b, \dots, t)$.

$\text{lcm}(a, b, \dots, t)$ 整数 $a, b, \dots, t$ 的最小公倍数, 不引起混淆时记为 $[a, b, \dots, t]$.

$\gcd\{\dots\}, \text{lcm}\{\dots\}$ 有限整数集合 $\{\dots\}$ 中元素的最大公因子, 最小公倍数.

$p^\alpha \parallel n$ 整数 $\alpha \geq 0$ 满足 $p^\alpha \mid n$, 但 $p^{\alpha+1} \nmid n$ (其中 n 是正整数, p 是素数).

$\delta_{i,j}$ Kronecker 符号, 当 $i = j$ 时其值为 1, 否则为 0.

3° $\log_b a$ 实数 $a > 0$ 的以 b 为底的对数.

$\log a$ (同 $\ln a$) 实数 $a > 0$ 的自然对数.

$\lg a$ 实数 $a > 0$ 的常用对数 (即以 10 为底的对数).

$\exp(x)$ 指数函数 e^x .

$\sinh x$ ($\text{arsh } x$) 双曲正弦 (反双曲正弦) 函数.

$\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ 反三角正弦、余弦、正切函数 (一般按主值理解).

$\Gamma(a)$ ($a > 0$) 伽马函数, 即

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

$B(p, q)$ ($p, q > 0$) 贝塔函数, 即

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \int_0^\infty \frac{s^{p-1}}{(1+s)^{p+q}} ds \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta. \end{aligned}$$

γ Euler-Mascheroni 常数 (Euler 常数), 即

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right) \\ &= 0.677\ 215\ 664\ 901\ 532\ 860\ 606\ 512\ 0 \cdots.\end{aligned}$$

4° $C[a, b], C(A)$ 所有定义在区间 $[a, b]$ 或集合 A 上的连续函数形成的集合.

$C^r[a, b], C^r(A)$ 所有定义在区间 $[a, b]$ 或集合 A 上的 r ($r \geq 0$) 阶导数连续的函数形成的集合.

$\mathbb{R}[x]$ 所有变量 x 的实系数多项式形成的集合 ($\mathbb{R}$ 可换成其他集合, 多变元情形类似).

$\deg(P)$ 多项式 $P(x)$ 的次数.

$f(x) \mid g(x)$ ($f(x) \nmid g(x)$) 多项式 $f(x)$ 整除 (不整除) 多项式 $g(x)$.

$\gcd(f(x), g(x))$ 多项式 $f(x), g(x)$ 的最大公因式, 不引起混淆时记为 (f, g) .

5° $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow a)$ 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时等价, 即 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (此处 a 是实数或 $\pm\infty$) (对于离散变量 n 情况类似, 下同).

$f(x) = o(g(x)) (x \rightarrow a)$ 指 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (此处 a 是实数或 $\pm\infty$).

$f(x) = O(g(x)) (x \in A)$ 指存在常数 $C > 0$, 使得 $|f(x)| \leq C|g(x)|$, 对于所有 $x \in A$ (此处 A 为某个集合).

$f(x) = O(g(x)) (x \rightarrow a)$ 指对于 a 的某个邻域中的所有 x , $f(x) = O(g(x))$ (此处 a 是实数或 $\pm\infty$).

$o(1), O(1)$ 无穷小量, 有界量.

$a_n (n \geq 1)$ 数列 (不引起混淆时简记为 a_n).

$a_n \downarrow a (n \rightarrow \infty)$ 数列 $\{a_n\}$ 单调下降趋于 a (函数情形类似).

$a_n \uparrow a (n \rightarrow \infty)$ 数列 $\{a_n\}$ 单调上升趋于 a (函数情形类似).

$f(a-), f(a+)$ $f(x)$ 在点 a 的左极限 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, 右极限 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$.

$f'_-(a), f'_+(a)$ $f(x)$ 在点 a 的左导数, 右导数.

$f_x, f_{x,x}$ $f(x, y)$ 的偏导数 $\partial f / \partial x = f'_x, \partial^2 f / \partial x^2 = f''_{x,x}$ (在不引起混淆时) 的简记号 (其余类推).

(r, θ) (平面) 极坐标系, Jacobi 式为 r (有时记为 $(r, \phi), (\rho, \theta)$, 或 (ρ, ϕ)).

(r, ϕ, θ) 或 (ρ, ϕ, θ) (空间) 球坐标系, Jacobi 式为 $r^2 \sin \theta$.

(r, ϕ, z) 或 (ρ, ϕ, z) (空间)(圆) 柱坐标系, Jacobi 式为 r .

6° (α, β) 线性空间 V 中向量 α 和 β 的内积.

$\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ 向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 的 (标准) 内积 (也称数量积) 的传统记号, 即 $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$.

$(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ 及 $(a_{ij})_{m \times n}$ 第 i 行、第 j 列元素为 a_{ij} 的 $m \times n$ 矩阵.

$(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 及 $(a_{ij})_n$ 第 i 行、第 j 列元素为 a_{ij} 的 n 阶方阵, 不引起混淆时记为 (a_{ij}) .

I_n n 阶单位方阵, 不引起混淆时记为 I .

$O_{m \times n}$ $m \times n$ 零矩阵, 不引起混淆时记为 O .

O_n n 阶零方阵, 不引起混淆时记为 O .

A^T 矩阵 A 的转置矩阵.

$\overline{A}$ 矩阵 A 的共轭矩阵.

A^* 矩阵 A 的共轭转置矩阵, 即 $\overline{A^T} = (\overline{A})^T$.

$\text{adj}(A)$ 方阵 A 的伴随方阵.

$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ 主对角线元素为 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ 的 n 阶对角方阵.

$\text{circ}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ n 阶循环方阵, 其第 1 行是 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

$\text{tr}(A)$ 矩阵 A 的迹.

$\text{rank}(A)$ 矩阵 A 的秩.

$\det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \det(a_{ij})_n, |(a_{ij})_n|$ 第 i 行、第 j 列元素为 a_{ij} 的 n 阶行列式, 不引起混淆时记为 $\det(a_{ij})$ 和 $|(a_{ij})|$.

$\det(A), |A|$ 方阵 A 的行列式.

$A > 0 (A \geq 0)$ 方阵 A 正定 (半正定).

$A > B (A \geq B)$ 方阵 $A - B$ 正定 (半正定) (矩阵 A, B 同阶).

$\oplus$ 直和.

$\otimes$ 直积.

$\dim(V)$ 空间 V 的维数.

$M_n(\mathbb{C}), \mathbb{C}^{n \times n}$ 所有 n 阶复矩阵组成的线性空间 ($\mathbb{C}$ 可换成其他数域).

$\text{Im}(A) (\text{Im}(\mathcal{A}))$ 矩阵 A (或线性变换 $\mathcal{A}$) 的像空间 (也称值域).

$\text{Ker}(A) (\text{Ker}(\mathcal{A}))$ 矩阵 A (或线性变换 $\mathcal{A}$) 的核空间 (也称零空间).

7° □ 表示问题解答完毕.

(1.6.1) 问题 1.6 解答中的第 1 式.

(L2.4.1) 练习题 2.4 解答中的第 1 式.

目 次

前言	i
符号说明	iii
第 1 章 数学分析	1
1.1 微分学	1
1.2 积分学	28
1.3 无穷级数	61
1.4 函数方程	75
1.5 不等式	81
1.6 常微分方程	107
练习题 1	114
第 2 章 高等代数	135
2.1 行列式	135
2.2 线性方程组	148
2.3 矩阵	149
2.4 多项式	171
练习题 2	179
第 3 章 数论与组合	188
3.1 初等方法	188
3.2 一些非初等方法	194
3.3 一些丢番图方程	211
3.4 一些组合问题	213
练习题 3	219
练习题的解答或提示	228
索引	450

第1章 数学分析

1.1 微分学

问题 1.1 (1) (美国, 1956) 设 $a > 0, a \neq 1$. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x}.$$

(2) (苏联, 1976) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续并且是正的. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\left(\int_0^1 \log f(x) dx\right).$$

(3) (苏联, 1977) 设 $f_n (n \geq 1)$ 是实数列, 并且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}f_n - f_{n-1}f_{n+2}}{f_{n+1}^2 - f_nf_{n+2}} &= \alpha + \beta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1}}{f_{n+1}^2 - f_nf_{n+2}} &= \alpha\beta, \end{aligned}$$

其中 $0 < |\alpha| < |\beta|$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \alpha.$$

(4) (中国, 2009) 计算极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{e/x},$$

其中 n 是给定的正整数.

解 (1) 如果 $a > 1$, 那么当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x} &= \frac{1}{x} \log \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1} \right) \\ &= -\frac{\log x}{x} - \frac{\log(a-1)}{x} + \frac{\log(a^x - 1)}{x} \\ &= -\frac{\log x}{x} - \frac{\log(a-1)}{x} + \frac{\log(a^x(1 - a^{-x}))}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\log x}{x} - \frac{\log(a-1)}{x} + \frac{\log a^x}{x} + \frac{\log(1-a^{-x})}{x} \\
 &= o(1) + \log a.
 \end{aligned}$$

如果 $0 < a < 1$, 那么

$$\begin{aligned}
 \log \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x} &= \frac{1}{x} \log \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1 - a^x}{1 - a} \right) \\
 &= -\frac{\log x}{x} - \frac{\log(1-a)}{x} + \frac{\log(1-a^x)}{x} = o(1).
 \end{aligned}$$

因此依指数函数的连续性, 所求极限等于 $\max\{1, a\}$.

(2) 因为依 Riemann 积分的定义, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 &\log \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} \\
 &= \frac{1}{n} \left(\log f\left(\frac{1}{n}\right) + \log f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \log f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \\
 &\rightarrow \int_0^1 \log f(x) dx,
 \end{aligned}$$

所以所求极限等于 $\exp\left(\int_0^1 \log f(x) dx\right)$.

(3) 考虑未知数为 x_n 和 y_n 的线性方程组

$$\begin{cases} f_{n+1}x_n + f_n y_n = f_{n-1}, \\ f_{n+2}x_n + f_{n+1}y_n = f_n. \end{cases}$$

它有解

$$x_n = -\frac{f_n^2 - f_{n-1}f_{n+1}}{f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}}, \quad y_n = \frac{f_{n+1}f_n - f_{n-1}f_{n+2}}{f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}}.$$

依题设, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 x_n &= -\alpha\beta + o(1) = -\alpha\beta(1 + o(1)), \\
 y_n &= \alpha + \beta + o(1) = (\alpha + \beta)(1 + o(1)).
 \end{aligned}$$

于是 f_n 满足递推关系

$$f_{n+2}(1 + o(1)) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)f_{n+1}(1 + o(1)) + \frac{1}{\alpha\beta}f_n = 0. \quad (1.1.1)$$

递推关系

$$\tilde{f}_{n+2} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\tilde{f}_{n+1} + \frac{1}{\alpha\beta}\tilde{f}_n = 0$$

的特征方程

$$X^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)X + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

有根 $X_1 = 1/\alpha, X_2 = 1/\beta$. 依题设 $X_1 \neq X_2$, 因此得到一般公式

$$\tilde{f}_n = c_1 \alpha^{-n} + c_2 \beta^{-n},$$

其中 c_1, c_2 是常数. 容易验证 $f_n = \tilde{f}_n(1 + o(1))$ 满足式 (1.1.1). 因为 $|\alpha| < |\beta|$, 所以

$$f_n \sim c_1 \alpha^{-n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \alpha.$$

(4) 解法 1 (取对数后) 由 L'Hospital 法则, 得到

$$\begin{aligned} e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}) - \log n}{x} &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}} \\ &= e \cdot \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \frac{(n+1)e}{2}, \end{aligned}$$

因此原题的答案为 $e^{(n+1)e/2}$.

解法 2 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\begin{aligned} &\left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{e/x} \\ &= \left(\frac{(1+x+o(x^2)) + (1+2x+o(x^2)) + \cdots + (1+nx+o(x^2))}{n} \right)^{e/x} \\ &= \left(\frac{1}{n} \left(n + \frac{n(n+1)}{2}x + o(x^2) \right) \right)^{e/x} = \left(1 + \frac{n+1}{2}x + o(x^2) \right)^{e/x} \\ &= \exp \left(\frac{1}{x} \left(e \log \left(1 + \frac{n+1}{2}x + o(x^2) \right) \right) \right) = \exp \left(\frac{1}{x} \left(\frac{(n+1)e}{2}x + o(x^2) \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{(n+1)e}{2} + o(x) \right) \rightarrow e^{(n+1)e/2}. \end{aligned}$$

解法 3 所求极限等于

$$\exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} \cdot \log \left(1 + \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{n} \right) \right).$$

因为 $\log(1+y) \sim y (y \rightarrow 0)$, 所以由 L'Hospital 法则, 有

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e}{x} \cdot \log \left(1 + \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{n} \right) \\ &= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{nx} = \frac{(n+1)e}{2}, \end{aligned}$$

因此所求极限等于 $e^{(n+1)e/2}$.

注意: 上面最后一步也可不用 L'Hospital 法则, 而是改写为

$$\frac{e}{n} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} + \cdots + \frac{e^{nx} - 1}{x} \right),$$

然后应用 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$. □

注 应用本题 (3) 的解法思路, 可以一般地证明: 若 f_n ($n \geq 0$) 满足变系数线性递推关系

$$f_{n+1} + c_1(n)f_n + c_0(n-1)f_{n-1} = 0,$$

其中 $c_0(n-1) \neq 0$ ($n \geq 1$), $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k(n) = \sigma_k$ ($k=0,1$), 并且“极限”特征方程 $x^2 + \sigma_1 x + \sigma_0 = 0$ 的两个根的绝对值不相等, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = r,$$

其中 r 是特征方程的某个根.

问题 1.2 (中国, 2011) 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的实连续函数, 满足

$$\sup_{x, y \in \mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)| < \infty.$$

证明: 存在常数 a 满足

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - ax| < \infty.$$

证明 以下两种证法的思路一致, 但最后一步略有差别.

证法 1 (i) 设 K 是一个常数, 满足

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq K \quad (x, y \in \mathbb{R}). \quad (1.2.1)$$

那么

$$|f(2x) - 2f(x)| \leq K \quad (x \in \mathbb{R}).$$

因为

$$\begin{aligned} f(3x) - 3f(x) &= (f(3x) - f(2x) - f(x)) + (f(2x) - 2f(x)), \\ |f(3x) - f(2x) - f(x)| &\leq K \quad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

所以

$$|f(3x) - 3f(x)| \leq 2K \quad (x \in \mathbb{R}).$$

由数学归纳法可知: 对于任何正整数 n , 有

$$|f(nx) - nf(x)| \leq (n-1)K \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (1.2.2)$$

于是对于任何正整数 k , 有

$$\left| \frac{f(kx)}{k} - f(x) \right| \leq K \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (1.2.3)$$

令 $x=1$, 得到

$$\left| \frac{f(k)}{k} - f(1) \right| \leq K \quad (k \in \mathbb{N}).$$

由 Bolzano-Weierstrass 引理, 存在无穷正整数列 k_j ($j=1, 2, \dots$), 使得子列 $f(k_j)/k_j - f(1)$ 收敛于某个实数 c . 记 $a = c + f(1)$, 则有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{f(k_j)}{k_j} = a. \quad (1.2.4)$$

(ii) 对于任何给定的正整数 m , 由式 (1.2.2) 得到

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(mk_j)}{mk_j} - a \right| &= \left| \frac{f(mk_j) - mf(k_j)}{mk_j} + \frac{f(k_j)}{k_j} - a \right| \\ &\leq \frac{|f(mk_j) - mf(k_j)|}{mk_j} + \left| \frac{f(k_j)}{k_j} - a \right| \\ &\leq \frac{(m-1)K}{mk_j} + \left| \frac{f(k_j)}{k_j} - a \right|. \end{aligned}$$

取 $j \geq j_0(m)$, 可使 (注意式 (1.2.4))

$$\frac{(m-1)K}{mk_j} \leq \frac{1}{m}, \quad \left| \frac{f(k_j)}{k_j} - a \right| \leq \frac{1}{m}.$$

于是当 $j \geq j_0(m)$ 时, 有

$$\left| \frac{f(mk_j)}{mk_j} - a \right| \leq \frac{2}{m},$$

从而

$$\left| \frac{f(mk_j)}{k_j} - am \right| \leq 2 \quad (j \geq j_0).$$

由此以及

$$|f(m) - am| \leq \left| f(m) - \frac{f(mk_j)}{k_j} \right| + \left| \frac{f(mk_j)}{k_j} - am \right|,$$

并注意式 (1.2.3), 我们得到: 对于任何给定的正整数 m , 有

$$|f(m) - am| \leq K + 2. \quad (1.2.5)$$

(iii) 因为 $f(x) - ax$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上连续, 所以存在常数 M , 使得

$$|f(x) - ax| \leq M \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (1.2.6)$$

若 $x > 1$, 则 $x = [x] + \{x\}$, 所以由题设及式 (1.2.1)、式 (1.2.5) 和式 (1.2.6), 可推出

$$\begin{aligned} |f(x) - ax| &= |f([x] + \{x\}) - a[x] - a\{x\}| \\ &= |(f([x] + \{x\}) - f([x]) - f(\{x\})) \\ &\quad + (f([x]) - a[x]) + (f(\{x\}) - a\{x\})| \\ &\leq |f([x] + \{x\}) - f([x]) - f(\{x\})| + |f([x]) - a[x]| + |f(\{x\}) - a\{x\}| \\ &< K + (K + 2) + M = 2K + M + 2. \end{aligned}$$

若 $x < -1$, 则存在正整数 $m = -[x]$, 使得 $x + m = \{x\} \in [0, 1]$. 于是类似地可得到

$$|f(x) - ax| = |(f(x) + f(m) - f(x + m)) - (f(m) - am) + (f(x + m) - a(x + m))|$$

$$\begin{aligned} &\leq |f(x+m) - f(x) - f(m)| + |f(m) - am| + |f(x+m) - a(x+m)| \\ &< K + (K+2) + M = 2K + M + 2. \end{aligned}$$

因此 $f(x) - ax$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界.

证法 2 保留证法 1 中的步骤 (i) 和 (ii). 实际上, 式 (1.2.5) 是关键. 将此式改写为: 对于任何给定的正整数 m , 有

$$f(m) = am + \varepsilon_1 \quad (|\varepsilon_1| \leq K+2), \quad (1.2.7)$$

其中 ε_1 与 m 无关 (下文中 ε_i 也有类似的性质, 不一一说明).

(iii) 由式 (1.2.1), 可知

$$|f(0)| \leq K. \quad (1.2.8)$$

由此以及 $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, 从式 (1.2.1), 推出

$$f(-x) = -f(x) + \varepsilon_2 \quad (|\varepsilon_2| \leq 2K). \quad (1.2.9)$$

在式 (1.2.2) 中用 x/n ($n \in \mathbb{N}$) 代替 x , 可得

$$\left| f(x) - nf\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq (n-1)K,$$

所以

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x) + \varepsilon_3 \quad (|\varepsilon_3| \leq K). \quad (1.2.10)$$

对于任何正有理数 $r = p/q$ ($p, q \in \mathbb{N}$), 由式 (1.2.10) 和式 (1.2.7), 得到

$$\begin{aligned} f(r) &= f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}f(p) + \varepsilon_3 = \frac{1}{q}(pa + \varepsilon_1) + \varepsilon_3 \\ &= \frac{p}{q} \cdot a + \frac{\varepsilon_1}{q} + \varepsilon_3 = ar + \varepsilon_4 \quad (|\varepsilon_4| \leq K+3). \end{aligned}$$

据此, 对于负有理数 r , 因为 $-r > 0$, 所以

$$f(-r) = (-r)a + \varepsilon_4 = -ar + \varepsilon_4.$$

又由式 (1.2.9), 可知

$$f(-r) = -f(r) + \varepsilon_2.$$

于是从以上两个等式得到: 对于负有理数 r ,

$$f(r) = ar + \varepsilon_5 \quad (|\varepsilon_5| \leq 3(K+1)).$$

综合以上两个结果以及式 (1.2.8) 可知: 对于任何有理数 r ,

$$f(r) = ar + \varepsilon_6 \quad (|\varepsilon_6| \leq 3(K+1)). \quad (1.2.11)$$

对于任何 $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 存在无穷有理数列 r_n ($n \geq 1$) 趋于 x . 由式 (1.2.11), 有

$$|f(r_n) - r_n a| \leq 3(K+1).$$

由 f 的连续性, 令 $n \rightarrow \infty$, 得知对于任何 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 有

$$|f(x) - \alpha x| \leq 3(K+1).$$

将此式与式 (1.2.11) 结合, 可知上式对于任何实数 x 成立. 于是本题得证. $\square$

注 关于 Bolzano-Weierstrass 引理, 可参见 Г. М. 菲赫金哥尔茨所著的《微积分学教程 (第1卷)》(第8版, 高等教育出版社, 2006) 69 页.

问题 1.3 (中国, 2009) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 过点 $A(0, f(0))$ 和点 $B(1, f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$, 其中 $0 < c < 1$. 证明: 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi) = 0$.

证明 在 $[0, c]$ 上 $f(x)$ 满足 Lagrange 中值定理的条件, 所以存在 $\xi_1 \in (0, c)$, 使得

$$\frac{f(c) - f(0)}{c} = f'(\xi_1).$$

同理, 在 $[c, 1]$ 上对 $f(x)$ 应用 Lagrange 中值定理, 则存在 $\xi_2 \in (c, 1)$, 使得

$$\frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = f'(\xi_2).$$

因为点 $A(0, f(0))$, $B(1, f(1))$ 和 $C(c, f(c))$ 在同一条直线上, 所以

$$\frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c},$$

从而 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. 又因为在区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上 $f'(x)$ 满足 Rolle 定理的条件, 所以存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = 0$. $\square$

问题 1.4 (匈牙利, 1965) 设 $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 并且 $[a, b]$ 中的每个点都是某个方程 $f_n(x) = f_m(x)$ ($n \neq m$) 的根. 证明: 存在 $[a, b]$ 的一个子区间, 使得 $f_k(x)$ 中有两个在其上恒等.

证明 证法 1 对于 $n \neq m$, 用 E_{nm} 表示函数 $f_n(x) - f_m(x)$ 的零点集合. 这些集合是可数的, 将它们编号为

$$M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$$

如果 M_1 是 $[a, b]$ 上的无处稠密集 (疏集), 那么存在 $[a, b]$ 的子集 $[a_1, b_1]$ 与 M_1 不相交 (即无公共点). 如果 M_2 是 $[a, b]$ 上的无处稠密集, 那么在 $[a_1, b_1]$ 上也无处稠密, 从而存在 $[a_1, b_1]$ 的子集 $[a_2, b_2]$ 与 M_2 不相交. 如果所有的 M_k 都在 $[a, b]$ 上无处稠密, 那么上述操作可不断进行. 所有这些子区间

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \dots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \dots$$

的交集非空, 并且不包含任何方程 $f_n(x) = f_m(x)$ ($n \neq m$) 的根. 这与题设矛盾. 所以在 M_k ($k \geq 1$) 中存在一个集合 M_σ , 在 $[a, b]$ 的某个子区间 $[c, d]$ 上稠密, 也就是说, 与 M_σ 相应的方程 $f_{n(\sigma)}(x) = f_{m(\sigma)}(x)$ ($n(\sigma) \neq m(\sigma)$) 的根形成 $[c, d]$ 上的稠密集. 因为函数 $f_{n(\sigma)}(x), f_{m(\sigma)}(x)$ 连续, 所以它们在 $[c, d]$ 上恒等.

证法2 设集合 E_{nm} 同证法1. 由题设, 所有 E_{nm} 的并集是区间 $[a, b]$. 如果任何一个集合 E_{nm} 都不在 $[a, b]$ 的任何子区间上稠密, 那么它们的并集不可能是一个区间 (因为一个区间不可能是可数多个该区间上的无处稠密集的并集). 因此存在一个集合 $E_{\alpha\beta}$, 在 $[a, b]$ 的某个子区间 $[c, d]$ 上稠密, 也就是说, 与 $E_{\alpha\beta}$ 相应的方程 $f_{n(\alpha\beta)}(x) = f_{m(\alpha\beta)}(x)$ ($n(\alpha\beta) \neq m(\alpha\beta)$) 的根集在 $[c, d]$ 上稠密. 于是由函数 $f_n(x)$ ($n \geq 1$) 的连续性, 得知 $f_{n(\alpha\beta)}(x), f_{m(\alpha\beta)}(x)$ 在 $[c, d]$ 上恒等. $\square$

问题1.5 (美国, 1964) 设 $f(x)$ 是定义在全体实数上的连续函数, 并且对于任意的 $\varepsilon > 0$ 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\varepsilon) = 0$ (n 为正整数), 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

证明 用反证法. 设当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 不收敛于 0, 那么存在实数 $\delta > 0$, 使集合 $G = \{x \mid x > 0, |f(x)| > \delta\}$ 是无界集 (即其元素无上界). 我们来导出矛盾.

(i) 首先注意, 对于任何给定的实数 p, q , 如果 $0 < p < q$, 那么当 n 充分大时 $(n+1)p < nq$, 所以 $[np, nq] \cap [(n+1)p, (n+1)q] \neq \emptyset$, 因而存在常数 $C > 0$, 使得 $G \cap [C, \infty) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [np, nq]$.

(ii) 由 $f(x)$ 的连续性, 可知 G 是开集 (即其补集 $\mathbb{R} \setminus G$ 是闭集), 不含孤立点, 所以对于充分大的 n , 集合 G 与 $[np, nq]$ 的交集含有非空区间, 记作 $[np_1, nq_1]$, 于是 $[p_1, q_1] \subset [p, q], [np_1, nq_1] \subset G$. 由此可知, 对于任何 $x \in [p_1, q_1], nx \in G$. 取正整数 m 充分大, 那么存在 $[p_1, q_1] \subset [p, q]$ 以及正整数 $n_1 > m$, 使得对于任何 $x \in [p_1, q_1], n_1 x \in G$. 分别用 n_1 和 $[p_1, q_1]$ 代替 m 和 $[p, q]$, 重复上面的推理, 可得到区间 $[p_2, q_2] \subset [p_1, q_1]$ 以及正整数 $n_2 > n_1$, 使得对于任何 $x \in [p_2, q_2], n_2 x \in G$. 这个过程可以无限次地进行下去, 从而存在点 $\varepsilon_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} [p_j, q_j]$ 以及无穷递增正整数列 $n_1 < n_2 < \dots$, 满足 $n_j \varepsilon_0 \in G$ ($j = 1, 2, \dots$).

(iii) 由集合 G 的定义, 可知当 $j \rightarrow \infty$ 时 $f(n_j \varepsilon_0)$ 不趋于 0, 这与题设矛盾. $\square$

问题1.6 (中国, 2011) 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, 满足 $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B$ ($x \in [a, b]$); 还设存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $|f'(x_0)| \leq D$. 证明: 当 $x \in [a, b]$ 时, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{AB} + D$.

证明 用反证法.

(i) 设结论不成立, 则存在 $x_1 \in [a, b]$, 使得 $|f'(x_1)| > 2\sqrt{AB} + D$. 不失一般性, 可以认为

$$f'(x_1) > 2\sqrt{AB} + D > D \quad (1.6.1)$$

(不然用 $-f$ 代替 f , 则 $|f'(x_1)| = (-f)'(x_1)$). 因为由题设, $f'(x_0) \leq |f'(x_0)| \leq D$, 所以 $x_0 \neq x_1$. 又因为 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 所以在 x_0 和 x_1 之间有某个点 x_2 , 使得 $f'(x_2) = D$ (若 $f'(x_0) = D$, 则 x_2 可能就是 x_0 本身; 但无论如何, $x_2 \neq x_1$). 不妨设 $x_2 > x_1$ (在 $x_2 < x_1$ 的情形下证法类似), 于是集合 $\{x \mid x > x_1, f'(x) = D\}$ 非空. 令

$$x_3 = \inf\{x \mid x > x_1, f'(x) = D\}.$$

那么 $f'(x_3) = D$; 并且对于 (x_1, x_3) 中的任何一点 x , $f'(x) - D$ 与 $f'(x_1) - D$ 同号 (不然存在 $x' \in (x_1, x_3)$, 满足 $f'(x') = D$, 与 x_3 的定义矛盾), 从而在 (x_1, x_3) 上 $f'(x) > D$. 于是有

$$f'(x_3) = D, \quad f'(x) \geq D > 0 \quad (\forall x \in [x_1, x_3]). \quad (1.6.2)$$

(ii) 对于每个 $x \in [x_1, x_3]$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x)$ 满足

$$f'(x) = f'(x_1) + f''(\xi)(x - x_1), \quad (1.6.3)$$

从而 (依题设, $|f''(x)| \leq B$)

$$f'(x) \geq f'(x_1) - B(x - x_1) \quad (\forall x \in [x_1, x_3]). \quad (1.6.4)$$

在式 (1.6.3) 中取 $x = x_3$, 得

$$|x_3 - x_1| = \frac{|f'(x_3) - f'(x_1)|}{|f''(\xi)|}.$$

由式 (1.6.1) 和式 (1.6.2), 可知

$$|f'(x_3) - f'(x_1)| \geq |f'(x_1)| - |f'(x_3)| > (2\sqrt{AB} + D) - D = 2\sqrt{AB},$$

并且注意 $|f''(\xi)| \leq B$, 从而得到

$$|x_3 - x_1| \geq 2\sqrt{\frac{A}{B}}. \quad (1.6.5)$$

(iii) 由式 (1.6.2), $f'(x)$ 是 $[x_1, x_3]$ 上的正函数, 从而有

$$\begin{aligned} f(x_3) - f(x_1) &= \int_{x_1}^{x_3} f'(x) dx \\ &\geq \int_{x_1}^{x_1 + 2\sqrt{A/B}} f'(x) dx \quad (\text{依式 (1.6.5)}) \\ &\geq \int_{x_1}^{x_1 + 2\sqrt{A/B}} (f'(x_1) - B(x - x_1)) dx \quad (\text{依式 (1.6.4)}) \\ &= \int_{x_1}^{x_1 + 2\sqrt{A/B}} f'(x_1) dx - B \int_{x_1}^{x_1 + 2\sqrt{A/B}} (x - x_1) dx \\ &= 2\sqrt{\frac{A}{B}} \cdot f'(x_1) - 2A \geq 2\sqrt{\frac{A}{B}} (2\sqrt{AB} + D) - 2A \\ &= 2A + 2D\sqrt{\frac{A}{B}} > 2A. \end{aligned}$$

这与题设 $|f(x)| \leq A (\forall x \in [a, b])$ 矛盾. 于是本题得证. $\square$

问题 1.7 (美国, 1954) 设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-1, 1)$ 上的实值函数, 并且 $f'(0)$ 存在. 又设 a_n, b_n 是两个实数列, 满足

$$\begin{aligned} -1 < a_n < 0 < b_n < 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \end{aligned}$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0).$$