普通高等教育精品教材

高等数学

主编 曹治清

GAODENG SHUXUE

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高等数学

主　编　曹治清
副主编　刘　敏　徐　永　李　凌　杨胤清
编　委　申慧容　李　青　林　薇　王海燕
　　　　余井权

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

高等数学是一门重要的基础课，内容丰富，应用面广。考虑当前该课程面临“课时少、内容多”的情况，我们组织了多年从事高等数学教育的教师编写了这本高等数学教材。全书包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、空间解析几何、多元函数微积分以及数学实验（MATLAB）共九章，其中列出了选学内容，教师可以根据课时酌情选择。

本教材可供医学类、药学类、管理类专业使用，同时也可作为其他非数学专业教学和参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 曹治清主编. -- 上海 : 上海交通大学出版社, 2017

ISBN 978-7-313-17458-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①曹… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第162715号

高等数学

主　　编：曹治清

出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号

邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208

出 版 人：郑益慧

印　　制：北京市科星印刷有限责任公司　　经　　销：全国新华书店

开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：19.5　　字　　数：421千字

版　　次：2017年7月第1版　　印　　次：2017年7月第1次印刷

书　　号：ISBN 978-7-313-17458-1/O

定　　价：46.00元

前 言

高等数学是一门非常重要的基础课，内容丰富，应用面广。经过多年的教学，我们深刻体会到，高校非数学专业的教育应注重培养学生的现代数学意识和将数学应用于实际的意识，并应加强培养学生的现代数学头脑。基于这种共识，我们组织编写了这本《高等数学》教材。其特点如下：

1．突出数学思维及理念、数学化思想

本教材共九章内容，以微积分为核心内容，以一元函数和多元函数为研究对象，以极限为研究工具。极限的精确化定义，贯穿微积分始终，是学生学习高等数学首先解决的重点和难点。因此，在编写中我们采用了极限的描述性定义和精确化定义共存的形式，既能凸显数学思维的训练，又能体现数学语言的精确和美感。在数学化思想和应用方面，书中介绍了极限模型、变化率模型等数学模型，并列举了在物理、医学、药学、经济等领域的应用案例，把微分方程作为微积分的延伸和应用，注重培养学生将数学应用于实际的意识。

2．加强计算方法和使用数学软件能力的培养

数学教育始终坚持以基本概念和基本运算为考核目标，为了便于学生双基训练，教材在每一小节后配有习题，在每章的末尾，有常见题型的复习题，便于学生抓住每章的重点进行复习和自修。考虑到学生数学综合能力的培养，教材的第 9 章介绍了当前流行广、实用性强、数学建模中常采用的 MATLAB 数学软件。通过五个小节介绍内容及针对教材开展的实验，使学生掌握 MATLAB 的基本操作，目的是提高利用数学和计算机解决理论和实际问题的综合能力。

3．力求语言的浅显、简明

针对非数学专业学生学习数学的特点，浅显、简明地介绍教学概念，还加入了一些数学家简介，以激发学生学习数学的兴趣。

4．力求体系完整、合理

本书共有九章，包含一元微积分、空间解析几何、多元微积分，包括了非数学专业高等数学课的基本内容。目前高等数学课程面临各高校的教学改革，出现了内容多、课时少的现象，为了保证课程体系的完整，我们在编写中将部分内容归为选学内容，同时配备了同步练习的习题集。考虑到与中学数学内容重复的情况，建议对第 1 章的部分内容进行回顾复习，教师可从极限精确定义理论讲起。

教材编写过程中得到周仁郁教授的指导和帮助，在此致谢。

本书在编写过程中参考了大量相关的教材和资料，在此对这些资料的作者表示衷心的感谢。限于我们的水平，书中的不妥之处，恳请各界同仁不吝指正。

编　者

2017 年 6 月

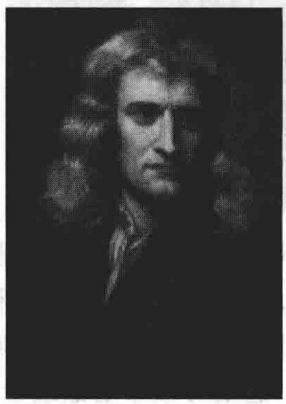
目 录

三位数学家简介

艾萨克·牛顿(Isaac Newton)(1642—1727)

我不知道在别人看来,我是什么样的人;但在我自己看来,我不过就像是一个在海滨玩耍的小孩,为不时发现比寻常更为光滑的一块卵石或比寻常更为美丽的一片贝壳而沾沾自喜,而对于展现在我面前的浩瀚的真理的海洋,却全然没有发现.

——艾萨克·牛顿



在牛顿的全部科学贡献中,数学成就占有突出的地位,其成果可以概括为以下四个方面:

(1)发现了二项式定理,而二项式展开是研究级数论、函数论、数学分析、方程理论的有力工具.

(2)创立了微积分,牛顿称之为"流数学",它所处理的一些具体问题,如切线问题、求积问题、瞬时速度问题以及函数的极大和极小值问题等,都超越了前人.

(3)引进极坐标,发展三次曲线理论.牛顿对解析几何做出了意义深远的贡献,他是极坐标的创始人,是第一个对高次平面曲线进行广泛研究的人.

(4)推进方程论,开拓变分法.牛顿在代数方面也做出了经典的贡献,他的《广义算术》大大推动了方程论.他发现了实多项式的虚根必定成双出现,求多项式根上界的规则等.

牛顿说过这样的话:"如果我比其他人看得更远些,那是因为我站在巨人的肩上."在这些巨人当中,最高大的有笛卡尔、开普勒和伽利略.从笛卡尔那里,牛顿继承了解析几何;从开普勒那里,牛顿继承了行星运动的三个基本定律;从伽利略那里,得到了成为他自己动力学奠基石的运动三定律中的前两个.所以,牛顿是动力学和天体力学的建筑师.

牛顿是坚强的,在他生命的最后三年,他一直在与病魔作斗争,他对待痛苦具有毫不畏惧的勇气和忍耐力。当然牛顿也是幸运的,他在世时就得到了他应得的一切.

莱布尼(Gottfriend Wilhelm Leibniz)(1646—1716)

好的数学符号能节省思维劳动,运用符号的技巧是数学成功的关键之一.

我有很多想法,如果有一天,比我更有洞察力的人把他们卓越的才智与我的劳动结合起来,深入地研究这些想法,那时它们也许会有些用处.

——莱布尼兹

莱布尼兹是17、18世纪之交德国最重要的数学家、物理学家和哲学家,一个举世罕见的科学天才,和牛顿同为微积分的创建人.他博览群书,涉猎百科,对法律、宗教、政治、数学、历史、文学逻辑、玄学、思辨哲学等多个领域的研究都卓有成就,对丰富人类的科学知识宝库做出了不可磨灭的贡献."样样皆通的大师",这是对莱布尼兹最恰当的评价.

莱布尼兹对数学领域中的分析和组合(或连续与离散)进行了深入的研究.他曾讨论过负数和复数的性质,得出复数的对数并不存在,共轭复数的和是实数的结论.在后来的研究中,莱布尼茨证明了自己结论是正确的.他还对线性方程组进行研究,对消元法从理论上进行了探讨,并首先引入了行列式的概念,提出行列式的某些理论.此外,莱布尼兹还创立了符号逻辑学的基本概念.

在积分法方面,他从求曲线所围面积的积分概念出发,把积分看作是无穷小的和,并引入积分符号 .他的这个符号,以及微分学的要领和法则一直保留在当今的教材中;莱布尼兹也发现了微分和积分是一对互逆的运算,并建立了沟通微分与积分内在联系的微积分基本定理,从而使原本各自独立的微分学和积分学构成统一的微积分学.

莱布尼兹奋斗的主要目标是寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法,这种努力导致许多数学的发现.例如,他的"普适符号"超越了他的时代两个世纪,可以说莱布尼兹不止活了一生,而是活了好几世.他作为外交官、历史学家、哲学家、数学家,在每一个领域中都完成了足够一个普通人干一辈子的事情.

柯西(Augustin Louis Cauchy)(1789—1857)

柯西,法国数学家,从小受过良好的教育,在孩提时期,他就接触到P·S·拉普拉斯、拉格朗日这样一些大数学家.随着年龄的成长,他在数学和物理方面都取得了杰出的成就.1816年取得教授职位,同时被任命为法国科学院院士,巴黎大学理学院和法兰西学院的教授席位.

柯西对数学的最大贡献是在微积分中引进了清晰和严格的表述与证明方法,使微积分摆脱了对于几何与运动的直观理解和物理解释,从而形成了微积分的现代体系.

柯西首先把无穷小量简单地定义为一个以零为极限的变量,他还定义了上、下极限,最早证明了极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的存在性,并在其中第一次使用极限符号,他对微积分的见解被普遍接受并沿用至今.

柯西是一位多产的数学家,一生共发表论文800余篇,著书7本,《柯西全集》共有27卷.柯西著作朴实无华,有思想,有创见,他所发现、创立的定理和公式,往往是一些最简单、最基本的事实,因而,他的数学成就影响广泛,意义深远.

第 1 章　极限与连续性
(Limit and Continuity)

【本章导引】

函数是数学中的一种对应关系，是从非空集合 A 到实数集 B 的对应. 简单地说，甲随乙变，甲就是乙的函数；极限是在某种变化状态下对变量变化最终趋势的描述，它既是一个重要概念，也是研究微积分学的重要工具和思想方法；连续性是许多常见函数的一种共同属性，连续函数是微积分研究的主要对象. 因此，作为本章主要内容的函数、极限与连续是学习微积分的理论基础，也是学习微积分必须通过的一道门槛. 读者在学习这些知识的同时，应注意提升抽象能力、逻辑推理能力和周密思考的能力，这对学好高等数学十分重要.

1.1　初等函数回顾(Review for Elementary Function)

【本节导引】

已知一个有盖的圆柱形铁桶容积为 V，试建立圆柱形铁桶的表面积 S 与底面半径 r 之间的函数关系式.

1.1.1　函数的概念

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照确定的法则总有唯一的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$.

数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，对应的 y 的数值称为函数在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 内的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $R = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的**值域**.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 而在数学中，有时抽去函数的实际意义，单纯地讨论用算式表达的函数，此时函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的数集，这种定义域称为函数的**自然定义域**. 常见的函数的定义域有如下原则：

(1)对于分式函数，分母不能为零，如 $y = \dfrac{x-1}{x+1}, x \neq -1$；

(2)偶次根号下的变量不能小于零，如 $y = \sqrt{x-1}, x \geqslant 1$；

(3)对于对数函数 $y = \log_a x$，规定：底数 $a > 0, a \neq 1$，真数 $x > 0$；

(4)对于正切函数 $y = \tan x$，规定：$x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$；

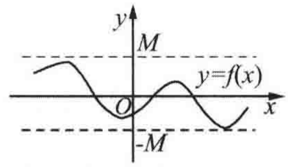
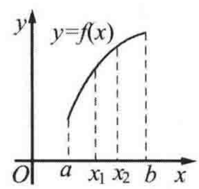
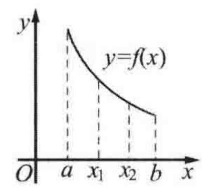
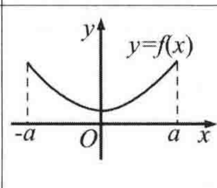
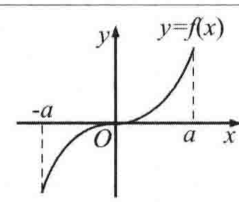
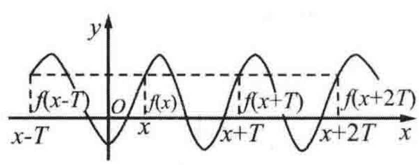
(5)对于余切函数 $y = \cot x$，规定：$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$；

(6)对于反正弦函数 $y = \arcsin x$ 和反余弦函数 $y = \arccos x$ 规定：$-1 \leqslant x \leqslant 1$.

1.1.2　函数的几种特性

函数的特性包括有界性、单调性、奇偶性和周期性. 下面将这四种特性的定义、图形和几何意义列入表 1-1 中.

表 1-1

特性	定义	图形	几何意义
有界性	若有正数 M 存在，使函数 $f(x)$ 在区间 D 上恒有 $\lvert f(x)\rvert \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 D 上是有界函数；否则，$f(x)$ 在区间 D 上是无界函数		有界函数的图形夹在两条平行线之间
单调性	若对于区间 D 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加，区间 D 称为单调增区间；若当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调减少，区间 D 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间	（a） （b）	单调增加函数图形沿 x 轴正向上升；单调减少函数图形沿 x 轴正向下降
奇偶性	设 D 是关于原点对称的区间，若对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数	（a） （b）	奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称
周期性	若存在不为零的数 T，使得对于任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期		周期函数的图形在函数定义域内的每个周期有相同的形状

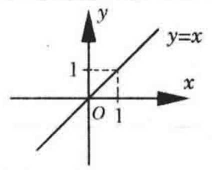
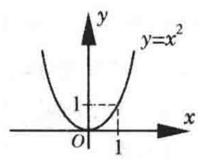
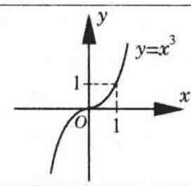
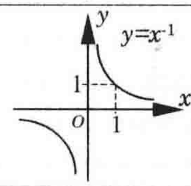
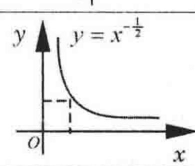
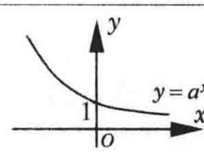
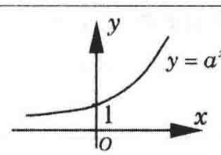
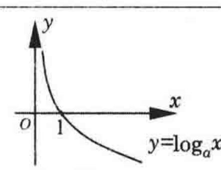
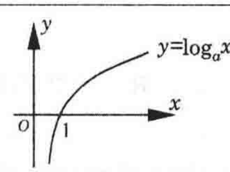
1.1.3　初等函数

1. 基本初等函数

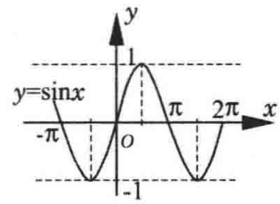
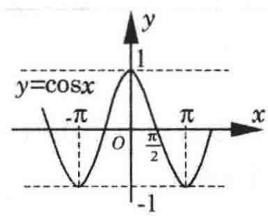
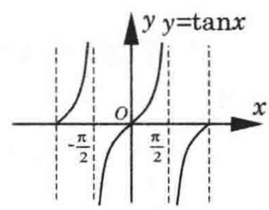
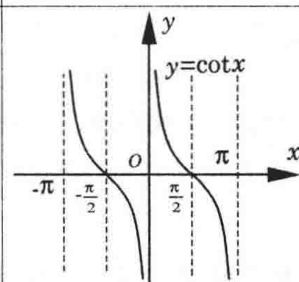
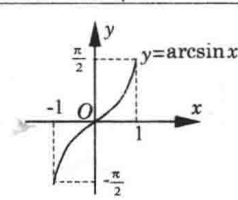
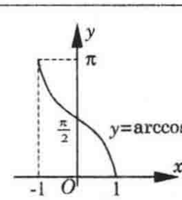
我们把幂函数 $y=x^a\,(a\in\mathbf{R})$、指数函数 $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$、对数函数 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$、三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\,x$ 统称为**基本初等函数**. 为了方便，很多时候也把多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 看作基本初等函数. 这些函数是我们今后研究其他各种函数的基础.

一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图形和特性如表 1-2 所示.

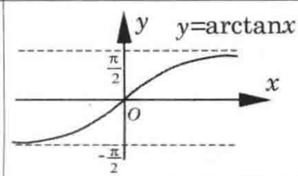
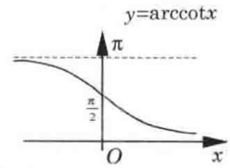
表 1-2

函数类型	函数	定义域与值域	图形	特性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数,在$(-\infty,0)$内单调减少,在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{-\frac{1}{2}}$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
指数函数	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
对数函数	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加

（续表）

函数类型	函数	定义域与值域	图形	特性
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界

（续表）

函数类型	函数	定义域与值域	图形	特性
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合所构成的，并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\sin^2 x$，$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$，$y=\ln\cos x$，$y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ 等都是初等函数.

例 1.1.1 函数 $y=\mathrm{e}^{\arcsin x}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解 令 $u=\arcsin x$，则 $y=\mathrm{e}^u$，故 $y=\mathrm{e}^{\arcsin x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\arcsin x$ 复合而成的.

例 1.1.2 函数 $y=\tan\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 是由哪些基本初等函数复合而成的？

解 令 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，则 $y=\tan u$；再令 $v=\sqrt{x^2+1}$，则 $u=\frac{1}{v}$；再令 $w=x^2+1$，则 $v=\sqrt{w}$；故 $y=\tan\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=\tan u$，$u=\frac{1}{v}$，$v=\sqrt{w}$，$w=x^2+1$ 复合而成的.

3. 分段函数

若函数 $y=f(x)$ 在它的定义域内的不同区间（或不同点）上有不相同的表达式，则称它为**分段函数**. 例如符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

就是一个分段函数，如图 1-1 所示.

再如函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 也是一个分段函数.

注意：分段函数不是初等函数.

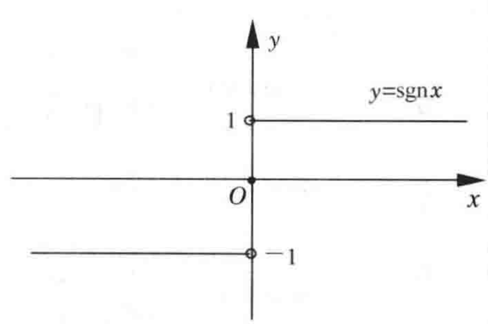


图 1-1

4. 反函数

在实际问题中，自变量 x 和因变量 y 是可以相互转化的. 例如，设物体下落的时间为 t，位移为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的关系为 $s=\frac{1}{2}gt^2$. 这时，t 为自变量，s 为因变量；反过来，如果已知位移 s 求下落时间 t，那么式子将变为 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，这时，s 为自变量，t 为因变量.

从函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 得到的 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$ 称为函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数. 反函数的定义如下：

定义 1.1.2　设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，其值域为 A，若对于数集 A 上的每个数，数集 D 中都有唯一确定的一个数 x 使 $f(x)=y$，即 x 变量为 y 的函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 A，值域为 D.

由于习惯上总是将 x 作为自变量，y 作为函数，故 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.1.3　求函数 $y=4x-1$ 的反函数.

解　由 $y=4x-1$，可解得 $x=\frac{y+1}{4}$. 交换 x 和 y 的次序，得 $y=\frac{1}{4}(x+1)$，即 $y=\frac{1}{4}(x+1)$ 为 $y=4x-1$ 的反函数.

5. 复合函数

定义 1.1.3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，那么，y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

必须指出，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 如，$\ln u$，$u=-1-x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=-1-x^2$ 的值域为 $(-\infty,-1]$，与 $y=\ln u$ 的定义域 $(0,+\infty)$ 的交集为空集，因此不能复合.

学习复合函数有两方面要求：一方面，会把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入、并确定其定义域的过程；另一方面，会把一个复合函数“拆成”(分解)为几个较简单的函数，这些较简单的函数往往是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

例 1.1.4　已知 $y=\sin u$，$u=x^2$，试把 y 表示为 x 的函数.

解　因为 $y=\sin u$，而 $u=x^2$，u 是中间变量，所以 $y=\sin u=\sin x^2$.

例 1.1.5　设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数.

解　不难看出，u，v 分别是中间变量，故 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\frac{x}{2}$.

从例 1.1.5 可以看出，复合函数的中间变量可以不限于一个.