



云南省普通高等学校“十二五”规划教材

大学文科数学

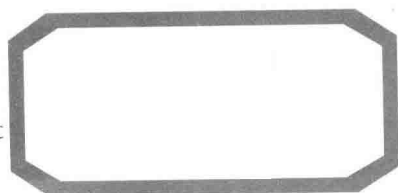
(第二版)

云南大学数学系 编



科学出版社

云南省:



, 规划教材

大学文科数学

(第二版)

云南大学数学系 编



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书定位于普通高等学校文科类相关专业,主旨是让读者体会数学之美和培养一定的数学思维能力。通过学习较为简单的高等数学知识,使读者领悟数学的抽象思维能力和逻辑思维能力,以及利用高等数学解决实际问题的能力。

为了让文科学生也爱上数学,首先得让他们明白数学有什么用,数学美在哪里,故而本书加入了“数学之美”这一章。之后的几章为高等数学必学内容,也做了浓缩处理,在有限的课时内,完成基础知识的介绍。本书包括5个章节的内容:绪论、数学之美、微积分初步、线性代数初步和概率统计初步。

本书可作为高等学校文科类学生的教材用书,也可作为其他相关人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学 / 云南大学数学系编. —2版. —北京:科学出版社, 2017.9

云南省普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-054567-1

I. ①大… II. ①云… III. ①高等数学—高等学校—教材
IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第229613号

责任编辑:李淑丽 / 责任校对:桂伟利

责任印制:霍兵 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年9月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017年9月第一次印刷 印张:14 1/4

字数:290 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

我们在长期从事文科高等数学教学的过程中深感文科高等数学教学之不易。

首先是教材的选择不易。目前大学文科数学的教材大体有三类。第一类是以理工科数学为样本，对内容和理论要求分别进行了精简和降低，即使如此，对文科学生来说，依然显得枯燥难懂，无法理解内容和学习目的；第二类是数学科普类读物，分别介绍数论、图论、模糊数学等数学分支的基础知识，有的还介绍了数学模型、数学实验技术等，这类教材涉及面广，但往往一带而过，对于没有较好中学数学基础的学生来说不容易理解和接受；第三类则侧重于介绍数学文化，而忽略了具体数学知识。数学的思想方法是在学习数学知识的过程中的自然感悟，离开了数学具体知识这一载体，数学文化就成了空洞的介绍和解说，不可能真正理解数学文化的丰富内涵和外延。其次是数学方法选择不易。当然，在这两个不易中，我们认为首先应该解决的是教材的选择问题，因为只要有了相对较为合适的教材，教学方法是可以通过教学研讨、经验积累等途径逐步改善的。

作为一本为高等学校文科生学习高等数学而专门编写的数学教材，本书编者可谓用心良苦。兴趣是最好的老师，为了让文科生也爱上数学，首先得让他们明白数学有什么用，数学的美在哪里，于是就有了第1章“绪论”和第2章“数学之美”，我们期望通过这两章的简要介绍，使学生对数学不再抗拒，产生亲切感，便于后续教学的开展。第3~5章作为一般高等数学的必学内容，编者也做了浓缩处理，抛开了一些证明过程，在有限的讲授时间内，完成基础知识的介绍，让读者能掌握基本的高等数学知识是本书的目的，同时，为了让学有余力的学生更加深入地了解数学，一些定理的证明过程在选学内容(用*标记)中给出，丰富他们的知识结构。

本书共5章：绪论、数学之美、微积分初步、线性代数初步、概率统计初步。编者在第一版的基础上做了很多修订，并修正了第一版中发现的问题。全书由云南大学数学系教师谭建国、索剑峰、杨宗文、关莉、陈丹进行编写，由索剑峰对全书进行校对、修改和定稿。

限于编者的水平有限，教材中难免有疏漏及不妥之处，希望广大读者批评指正。

编 者

2017年5月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 素质教育与数学	1
1.2 文科数学应该讲些什么	5
1.3 如何更科学地认识数学	6
第 2 章 数学之美	9
2.1 数学是什么或不是什么	10
2.2 数学之美: 美在形式	14
2.3 数学之美: 美在奇异——数学悖论与三次数学危机	19
2.4 数学之美: 美在方法——数学思想方法的几次重大转折	25
第 3 章 微积分初步	36
3.1 函数复习	36
习题 3.1	47
3.2 极限	47
习题 3.2	63
3.3 导数与微分	64
习题 3.3	91
3.4 积分	94
习题 3.4	117
第 4 章 线性代数初步	119
4.1 矩阵	119
习题 4.1	128
4.2 线性方程组	131
习题 4.2	140
4.3 线性规划	141
* 4.4 行列式	144
习题 4.4	150
第 5 章 概率统计初步	152
5.1 随机事件随机变量的分布及其数字特征	152
习题 5.1	167
5.2 抽样分布	169

习题 5.2	174
5.3 样本数据分析初步——数据的描述性分析	174
习题 5.3	180
5.4 参数估计	181
习题 5.4	185
5.5 假设检验	186
习题 5.5	192
5.6 回归分析	194
习题 5.6	198
* 5.7 Excel 统计分析、规划求解功能安装及描述性统计分析	200
* 5.8 数理统计知识补充	205
习题 5.8	215
参考文献	218
附表	219
附表 1 t -分布双侧临界值表 $P(t_{(n)} > t_{(n)}(\alpha)) = \alpha, n$: 自由度	219
附表 2 检验相关系数的临界值表	220

第1章 绪 论

1.1 素质教育与数学

1.1.1 关于素质教育

素质的含义有狭义和广义之分。

狭义的素质是生理学和心理学意义上的素质概念，即“遗传素质”。《辞海》写道：“素质是指人或事物在某些方面的本来特点和原有基础。在心理学上，指人的先天的解剖生理特点，主要是感觉器官和神经系统方面的特点，是人的心理发展的生理条件，但不能决定人的心理内容和发展水平。”——这是关于狭义素质的典型解释。

广义的素质指的是教育学意义上的素质概念，指“人在先天生理的基础上在后天通过环境影响和教育训练所获得的、内在的、相对稳定的、长期发挥作用的身心特征及其基本品质结构，通常又称为素养。主要包括人的道德素质、智力素质、身体素质、审美素质、劳动技能素质等。”——素质教育中的素质，指的是广义素质。

素质教育是指一种以提高受教育者诸方面素质为目标的教育模式。它重视人的思想道德素质、能力培养、个性发展、身体健康和心理健康教育。素质教育与应试教育相对应。

素质教育主要包括内在素质和外在素质。内在素质主要是人对世界、环境、人生的看法和意义，包括人的世界观、人生观、价值观、道德观等，也就是一个人对待人、事、物的看法，也可以称为人的“心态”。外在素质就是一个人具有的能力、行为、所取得的成就等。

1.1.2 素质教育的基本特点

1. 全体性

所谓“全体性”，广义地说，是指素质教育必须面向全体公民，任何一名社会成员，均必须通过正规或非正规的途径接受一定时限、一定程度的基础教育。狭义地看，素质教育的“全体性”，是指为全体适龄儿童开放接受正规基础教育的大门。

坚持素质教育的“全体性”其主要意义在于：第一，保证接受教育成为每一个人的权利和义务；第二，保证整个民族的文化素养在最低可接受水平之上，杜绝新

文盲的产生;第三,为贯彻“机会均等”原则,为每个人的继续发展提供最公平的前提条件.素质教育的最终目标是为未来的合格公民奠定素养基础.

2. 基础性

所谓“基础性”是相对于专业(职业)性、定向性而言的.素质教育向儿童、青少年提供的是“基本素质”而不是职业素质或专业素质,是让学生拥有“一般学识”(general learning)而不是成为某一专门领域的“小专家”或某一劳动职业的“小行家”.

坚持素质教育的“基础性”其主要意义在于:第一,一个人只有具备了良好的基本素质,才有可能实现向较高层次的素质或专业素质的“迁移”.基础教育以发展和完善人的基本素质为宗旨,因而不少人指出基础教育的本质就是素质教育.第二,人类蕴含着极大的发展自由度,这就是人的可塑性,自由度越高,可塑性越强;反之亦然.教育是塑造、培育人的事业,如果在基础教育中充斥了定向的、专门化的训练,而不是着眼于把普通的基础打扎实,那就等于抑长趋短,将非特化功能倒退为特化功能,缩小了发展的自由度、窒息了人的可塑性.第三,从教育控制论的意义上讲,教育是一种人为的、优化的控制过程,以便受教育者能按照预定目标持续发展.但如果把基础教育局限于职业的、定向的训练,就会使本来应得到扩大发展的可能性空间过早地停滞、萎缩,这岂不是同教育(优化控制)一词的本义背道而驰吗?怎么能指望培养的学生善于应付社会繁杂多变的“不确定性”呢?

3. 发展性

所谓“发展性”是指要着眼于培养学生自我学习、自我教育、自我发展的知识与能力,真正把学生的重心转移到启迪心智、孕育潜力、增强后劲上来.这是强调培养能力、促进发展,是在正确处理知识和能力之间的关系这一前提下而言的.知识与能力虽不是完全等同的东西,但是,如果学到的知识是“活化”的知识,是能够“投入运转的知识,是具有很强的生命力”的知识,那么,这种知识就能顺利地转化为能力,成为人的智慧的一部分.素质教育的“发展性”强调的是“学会如何学习、学会生存”.真正的教育是形成自我教育.而自我教育能力的直接动力是每个人的主观能动性.因此,素质教育倡导尊重、发挥和完善学生的主体性.它十分注意培养学生强烈的创造欲望、创造意识和创造能力.

从本质上说,“发展性”符合“变化导向教育观(change-oriented pedagogy)”的趋势,即把适应变化、学会变化作为教育的重要目标,从接受教学(教师奉送答案)向“问题解决”(教师引发思考)转变.教师以一名鼓励者、促进者、沟通者、帮助者和咨询者等角色发挥作用.

4. 全面性

所谓“全面性”，是指素质教育既要实现功能性的目标，又要体现形成性的要求，通过实现全面发展教育，促进学生个体的最优发展。因为，素质教育应该是完善意义上的教育，它是指向全面基本素质的。

素质教育的根本目标是促进学生全面发展，应当指出，“全面发展”已经列入世界上许多国家(包括发达国家和发展中国家)的教育目标之中。但是，我们的任务是要在社会主义的素质教育中探索“全面发展”的具体规定性，我们认为，素质教育中的“全面发展”有两个方面的具体规定性。第一，针对个体来说，它是“一般发展”和“特殊发展”的统一；第二，针对班级、学校乃至整个社会群体而言，它是“共同发展”和“差别发展”的协调。全面发展既要讲共同性，又要讲个别性，它决不排除有重点地发展个人的特殊方面，允许在一个群体中各个体之间有差别地得到发展，全面发展决不能被理解为均匀发展和划一发展。全面发展实际上就是“最优发展”，最优化不等于理想化，而是力求取得对具体条件来说是最大可能的最佳效果。只有这样，每个学生才能有信心根据他自己的特点找到发展的“突破口”或“生长点”，打破“千人一面”的格局。

全面发展是最优发展，也是个性的最优发展。“发展个性”是世界教育改革共同趋势。我国心理学工作者提出了“从系统——结构观点来分析个性”的建议，强调应坚持马克思主义关于个性是社会实体的观点，从人的心理的整体上把握“个性”。因此，可将个性定义为“个体在社会化过程中所形成的心理动态系统”，以此来表明个性是一般性和个别性、动态性和稳定性的统一体，是社会化的产物，是社会关系的总和。

5. 未来性

所谓“未来性”是指立足于未来社会的需要，而不是眼前的升学目标或就业需求。一般说来，教育具有较强的惰性和保守性，它总是在努力使年轻一代学会老一代的思维、生活和工作方式，因而人们在批评现代学校教育体系的局限性或弊端的时候，往往批评它是根据“昨天”的需要而设计的。素质教育就是要改变教育的惰性和保守性，它的目标是使年轻一代适应未来发展的需要。

1.1.3 数学素质的涵义与特征

数学作为一种客观抽象出来的自然科学，属于社会素质的范畴。人的数学素质是人的数学素养和专业素质的双重体现，按照当前数学教育界比较一致的公论，数学素质大致涵义有以下四个表现特征。

(1) 数学意识。即用数学的眼光去观察、分析和表示各种事物的数量关系、空间关系和数字信息，以形成量化意识和良好的数感，进而达到用数理逻辑的观点来科

学地看待世界,人的数学意识的高低强弱无时无刻不反映出来.如数学教育家马明在观看电视转播的世界杯排球比赛时,从场地工作人员擦地一事想到,如果用一米宽的拖布把整个场地拖一次至少要走多长路程的问题,并用化归法原理把所走的路程(长度)转化成了场地面积来计算,这是一般人很少注意或不屑一顾的事,却是数学家运用数学的良好机会.足见一个高素质的数学工作者具备不失时机地应用数学的意识.

(2) 数学语言.数学语言作为一种科学语言,它是数学的载体,具有通用、简捷、准确等特点的数学语言是人类共同交流的工具之一.

(3) 数学技能.数学的作图、心算、口算、笔算、器算是数学最基本的技能,而把现实的生产、生活、流通乃至科学研究中的实际问题转化为数学模型,达到问题解决,形成数学建模的技能,这是数学的创造,在数学技能解释、判断自然或社会现象及预测未来的同时也发展与创造数学本身.众所周知的欧洲十八世纪哥尼斯堡七桥问题无解的结论就引出了一个新的数学分支——图论.

(4) 数学思维.数学是思维的体操,抽象、概括、归纳与推理等形式化的思维以及直觉、猜想、想象等非形式化的思维,都是数学思维方法、方式与策略的重要体现,数学直觉思维、数学逻辑思维、数学辩证思维都是人的高级思维形式.

综上所述,数学意识是数学素质的基本表象,数学技能是数学知识和数学方法的综合应用,数学思维与数学语言存在于数学学习和运用的过程之中.数学素质的个体功能与社会功能常常是潜在的,而不是急功近利的,数学素质具有社会性、独特性和发展性.时至今日,数学的知识和技术有逐步发展成为人们日常生活和工作所需要的一种通用技术的趋势,这是因为现代社会生活是高度社会化的,而高度社会化的一个基本特点和发展趋势就是定量化和定量思维,定量化和定量思维的基本语言和工具就是数学.由此可见,未来人的数学素质将与人的生存息息相关.

基本上数学教育主要提升人们在以下几个方面的素质.

(1) 严谨——数学习惯强烈的人做事情是非常严密的.考虑事情是比较周到的,这对于盛世中的人们是非常重要的素质.细节决定人生.

(2) 怀疑——学习数学深入的人是非常善于怀疑的,当然这种怀疑是有根有据的,而不是胡乱猜疑,所以这有助于人们提高发现问题的能力.中华文明从盛极一时到衰落的重要原因之一就是和西方世界相比,缺乏怀疑精神.

(3) 严格——严格的性格使得人们对于很多事情的推理和产生都需要合理的解释,而不是模糊的猜想和没有根据的揣测.这是避免许多错误产生的根本素质.

(4) 条理性——数学的学习使人不管做什么都会首先尝试进行层次的划分,并在各个层次上进行分类的处理,总想把所有的事情尽可能的秩序化.

1.2 文科数学应该讲些什么

国内很多大学的文科类专业,都开设了数学必修基础课,对提高文科学生数学素养起到了一定作用。但是,效果不是非常明显,文科数学基本上是理工类几门数学基础课的压缩和简化。一方面试图把大量的基础数学知识介绍给学生,另一方面又受课时较少的限制必须精简内容,于是普遍采取了重结论,不重证明;重计算,不重推理;重知识,不重思想的讲授方法。大多数学生,只能是依葫芦画瓢,以应付考试为目的,谈不到提高数学素养,失去了学习数学的意义。

文科学生往往觉得高等数学不可理解,难以接受,容易产生畏难情绪。显然,我们在教学中首先要改变这种状态,使学生感到可以理解,并且能轻松、愉快地完成这门课程的学习任务。这就要求教师转变观念,从培养学生的数学素养和持续学习能力的高度,来把握教学原则。目的不是教学生如何做题,而是教会学生如何利用数学思想和数学思维方式来考虑问题。

人无论在什么岗位,都要有一定的观察力、理解力、判断力等,而这些能力的大小关键取决于他的数学素养。数学教育是一种理性教育,是对人的综合素质的一种提高,它能赋予人们一种特殊的思维品质。对文科学生来说,良好的数学素质可以促使他们更好地利用科学的思维方式和方法观察周围的事物,分析实际问题,提高创新意识和能力,更好地发挥自己的作用,这正符合目前社会对人才的要求。

数学的特点是概念高度抽象、逻辑严谨、推理精确。但这些特点要求学生具有一定的数学基础。而中学文理分科,使得大部分文科学生数学基础相对薄弱。因此,在大学学好起点更高的大学文科数学,其教学基本要求、教学大纲、教学内容的制定和安排至关重要,而这一切究其根本,在于大学文科数学开设的目的和意义,以及贯彻这些理念的重要载体——教材。

目前大学文科数学课的教材大体有三类:一类是以理工科数学为样本,对内容和理论要求分别进行了精简和降低,即使如此,这对文科学生来说,依然显得枯燥难懂,无法理解内容和学习目的;另一类是数学科普性读物,分别介绍了数论、图论、模糊数学等数学分支的基础知识,有的还介绍了数学模型、数学实验技术等,这类教材涉及面广,但都一点而过,没有较好数学基础的人,根本无法接受和理解;还有一类侧重于介绍数学文化,而忽略了具体数学知识。数学的思想方法是在学习数学知识的过程中的自然感悟,离开了具体数学知识这一载体,数学文化就成了空洞的介绍和解说,不可能真正理解数学文化的丰富内涵和外延。

我们认为,大学文科数学教材应注重体现:数学文化与数学知识融会贯通;数学历史与数学概念有机联系,合理结合;突出数学的文化理念和数学概念的历史渊

源,重点突出数学的思想方法和思维方式;弱化数学的抽象性和数学的技巧,注重大学文科数学的基本内容;例题、习题选择恰到好处,目的明确.可能的话,教材还应该融入必要的数学软件知识,使学生与时俱进的来学习数学.

有了适合文科学生的教材,课堂教学中,教师可更大程度地因材施教.讲解数学知识、追溯数学历史、渗透数学思想、介绍数学发展现状等,在教学中恰当引导学生认识数学、理解数学、体验数学,着眼于培养文科学生特殊的思维品质、分析解决实际问题的能力,提高创新意识和能力.

(1) 以正确的教学理念,引导学生,使其认识到学习数学的必要性.让学生从内心认识到学习数学的必要性,非常重要.他们会从自身的需求出发来学习高等数学,提高学习的主动性和积极性,增强求知的欲望.

(2) 作为大学老师,要从学生长远发展的角度,从获得终身持续学习能力的高度,引导学生用正确的方法来进行学习.

(3) 教师应根据授课对象、授课内容以及教学目的的不同,采取恰当的、有效的教学方法.教学过程中,注重扬其形象思维之长,补其逻辑思维之短;扬其阅读能力之长,补其运算能力之短.

(4) 对于文科学生,降低严格论证的要求,侧重让其学会运用数学知识;减少一些难懂的理论证明,侧重形象、直观地渗透数学思想;弱化一些数学运算技巧,培养学生数学思维能力.

(5) 教授文科高等数学,教师要尽量避免用“数学味”过浓的数学语言,采用丰富形象生动的语言,适当插入数学历史、数学家趣闻,活跃课堂氛围,提高学生学习的积极性.

(6) 教育学生正确对待考试.尽可能排除文科学生惧怕数学考试的心理,使其以轻松的心态愉快的接受数学知识,提高数学思维能力,提高利用数学思想解决实际问题的能力等各方面的数学素质.

1.3 如何更科学地认识数学

1.3.1 关于数学学习及研究的科学态度

与经典数学相容的现代数学主流是以 ZFC 公理集合论系统为基础的,是经过数千年来无数数学家多方面的研究、争论、淘汰建立起来的,应该说现代数学的严谨性已经得到了普遍的认同.实际上第三次数学危机的主要影响也就在于数学基础的建立.今天虽然 ZFC 公理集合论系统的协调性仍未最后解决,但 ZFC 公理集合论系统至今还没有发现任何矛盾,这已经足以让我们放心大胆地以之为基础进行数学的学习和研究了.

由此我们可以得到学习、研究数学的一个科学的态度：除非你学习、研究的是其他的数学系统，否则你都是在 ZFC 公理集合论系统之上进行的，因此你必须接受 ZFC 公理集合论系统的 10 个公理及以之为基础的经典数学的结论，因为这些都是经过千锤百炼的。当我们在学习、研究中得到与经典结论不一致的结果时，正确的态度应该是仔细检查自己的证明、推导过程是否严谨、数学概念理解是否准确及定理使用条件是否具备等，而不是轻易地去怀疑、否定经典数学的结论及体系。因为在经典数学的领域，如果一个结果只是与某篇论文或者教材中的结论相悖，也有可能是论文或者教材中的结论自身有错误(即便如此，对否定相应结论也要相当慎重。既要仔细检查自己的证明、推导过程，同时也要仔细检查对方的证明、推导过程以确定错误所在)；而如果一个结果是与经典结论相悖时，则可以肯定地说是你自己的证明、推导过程等出错了。

虽然数学也允许你怀疑、不承认某些约定(公理)，但是你也不能简单地就认为经典数学出错了、你找到了经典数学的漏洞或者你推翻了经典数学、你为数学发展开辟了方向等。你不承认某些公理，说明你研究的已经不再是经典数学的系统了；你可能也认为自己建立了新的数学“理论”，但此时你更要多查找资料，因为经典数学之外还有许多其他的数学体系已经早就被前人研究过了(对大多数人来说我们所知道、熟悉的只是经典数学而已)。

1.3.2 对数学应有的科学认识

基于时代对数学知识及数学科学认识的要求，全民数学素质教育还有待进一步提高、加强，为此需要对全社会的数学教育有进一步的改进。我们应该首先打好扎实的数学基础，进一步在数学学习活动中注意加强对数学的科学认识。

在中小学主要是学习经典数学的一些最基础的知识。同学们应该明白我们学习的都是经典数学知识，而经典数学是已经得到普遍认同的严谨的科学知识。同时，应该认识到数学的研究在初等方法下是不可能有所谓“颠覆性创新”的，学习数学要有正确心态：准确理解、掌握概念、原理等基础的数学知识，熟练掌握各种数学技能，不盲目接受否定经典数学的所谓“新理论”。

在大学数学的学习过程中，有兴趣的同学在进行正常学习的同时可适当进行数学史知识的学习，对数学史上关于数学的各种争论有所了解，有条件时还可以选修数学史、数学基础、初等数论等课程，以强化对数学的科学认识，提高自己的数学素养。

由于数学研究对物质条件要求在许多时候是很低的，在社会上存在着大量的“业余数学家”通过各种渠道在不断地发表大量所谓的数学“新理论”或“新成果”。对这些现象要有正确的认识：虽然有的研究者非常专注、极端投入，精神可敬，但是由于他们的研究基本上是不科学的，所以基本上是不可能有新收获的。这些“业

余数学家”一小部分是纯兴趣的数学爱好者，而大部分是由“一个发明改变整个人生境遇”的希望诱导来的一些对当前境遇不满意而又无其他途径改善，并且又有一定数学基础或兴趣的爱好者。他们所做的论文或者是错误的，或者是在重复一些已有的结论，这必然会造成对社会资源的极大浪费。

要在基础数学领域进行“颠覆性创新”是不可能的！而在数学中要有创造性创新也是非常艰难的，某种意义上说比一般意义上的数学研究具有更高的难度，因为这更需要对数学进行全面深入的理解及把握，这决不是缺乏扎实数学基础的研究者所能完成的。数学爱好者与其把大量的精力投入到这类研究活动，还不如静下心来认真学习数学知识，转而研究数学知识在实际中的应用更有意义。

第2章 数学之美

数学是创造性的艺术，因为数学创造了美好的新概念，数学家像艺术家一样地生活，一样地工作，一样地思索。

——哈尔莫斯(1916—2006)

美是自然. 数学作为“书写宇宙的文字”(伽利略, 1564—1642)反映着自然, 数学中当然存在着美. 数学是自然科学的语言, 故它具有一般语言文学与艺术所共有的美的特点, 即数学在其内容结构上、方法上也都具有自身的某种美, 即所谓数学美. 数学中蕴涵着无穷的魅力, 有着使人入魔的趣味——这是由于它的美. 人们对于数学的探讨, 正是人们对于数学中美的发掘; 数学的发展, 正是人们对于数学美的追求的结晶.

“一般说来, 能够被称为数学美的对象和方法, 应该是具有在极度复杂的事物中, 揭示出的极度简单性, 在极度离散的事物中概括出的极度的统一性(或和谐性), 在极度无序的事物中发现的极度的对称性, 在极度平凡的事物中认识到的极度的奇异性(新奇性), 具有简单性、统一性、对称性和奇异性的数学对象与其背景反差越大, 则显得越美, 越有吸引力.”(徐利治、王前:《数学与思维》, 1990年1月)

数学之美的主要表现形式, 我们认为大致可以分为以下几类: 符号美、公式美、理论美和方法美(思维美), 而在公式美和理论美中, 既包括了已经证明为正确的东西, 也包括那些未经证明(或有待证明)的猜想.

“美”是内容与形式的统一. 美的形式无处不显现内容; 美的内容又无不渗透于存在于形式之中. 对不同的类型, 内容与形式的结合可能有所不同, 在数学美的几种类型中, 我们认为可作如下的说明:

数学美的类型: 符号美→公式美→定理美→理论美→方法美(思维美);

内容与形式的结合: 形式美为主→内容美为主;

美的形式(抽象程度): 初级形态→高级形态.

越往后的类型越着重内容之美, 越显得抽象. 符号、公式以形式美为主, 是一种较为初级的美的形态, 较易为一般人理解、接受; 而理论、方法之美, 则着重内容美, 是一种较为高级的美的形态, 要欣赏它们, 必须具备较高的数学修养.

下面将就形式美、奇异美和方法美进行简单介绍.

2.1 数学是什么或不是什么

2.1.1 数学不是什么

1. 数学与哲学

哲学与数学的对象虽然归根结底都来自我们周边的现实世界,但现在研究的对象都是抽象化、概念化的结果.哲学概念具有相当的歧义性、不分明性、不确定性,这使哲学成为大哲学家百家争鸣的场所;数学概念也是人造的,但几乎无一例外地有确定、精密、严格及丰富的内涵,这不仅是数学内容远为丰富而且不断进步的原因,同时也是数学成为客观知识的理由.

如果把哲学和数学加以对比,可以发现这两大系统的知识领域的确有它们的共性,当然也有极大的差异.

1) 共性

- (1) 神秘莫测、不知所云.
- (2) 概念抽象、难以理解.
- (3) 提出问题、推动发展.

2) 差异

- (1) 哲学较大程度上是主观知识,而数学则是客观知识.
- (2) 哲学围绕少数伟大哲学家的论题发展,数学则是积累的、不断进步的和逐步系统化的知识领域.
- (3) 哲学和数学各有其关联的范围:哲学的关联范围广,但强度弱;数学关联度强,它把许多领域转化为科学.

哲学是研究最广泛的事物,数学也是研究最广泛的事物,这是它们的共同点.但是,数学与哲学的研究对象不同,研究方法也不同.两者虽有相似之处,但数学不是哲学的一部分,哲学也不是数学的一部分.

现在有人说“哲学从一门学科中退出,意味着这门学科的建立;而数学进入一门学科,就意味着这门学科的成熟.”

2. 数学与自然科学

关于数学的最大误区是把数学看成自然科学.对于一般人来讲,这种分法似乎已经习惯成自然.主要表现在一种粗糙的学科分类法中,即把所有学科分为自然科学和人文科学,自然科学还被编成口诀:“数、理、化、天、地、生”.

顾名思义,自然科学当然以自然界作为研究对象.天、地、生明显的是自然,关于它们的认识就是真正的自然科学.

物理学和化学是更为普遍的科学，它们是自然科学的基础，也更具有能动性，可以将它们称为物理科学。其理论的极端已具有明显的数学特征。

1) 共性

(1) 客观性. 所有的数学知识和科学知识都不以个人的意志为转移，客观性是可被理解性的基础。

(2) 系统性. 任何一门科学都是知识系统，它不是一堆命题或一堆事实的简单堆积，而是构成相互联系的逻辑体系。

(3) 真伪的可确证性. 科学的命题或猜想、预言都可以通过一定的规范过程来证实或证伪。

2) 差异

(1) 自然科学以现实世界的事物及对象为对象；数学则以抽象模型、抽象形式、抽象关系为对象，这样的对象可以来自自然界，也可以来自社会，其后来来自原有概念的演化及加工。

(2) 自然科学的目标是寻求对客观事实的解释，建立理论并提出可证实或证伪的预言，这些往往被称为定律或规律；数学的目标则是寻求概念之间的逻辑关系，其结果形成定理或算法。

(3) 自然科学的确证必须靠观察和实验的经验证明，当然也依赖于理论的结果与已知确证的理论不矛盾——即有理论与实验两条腿；数学则只有一条腿，即逻辑的无矛盾性。

(4) 自然科学的“真理”有其近似性和相对性；而数学的真理则是绝对的和不朽的。

(5) 自然科学工作的本质是发现；数学工作的本质则是发明。

3. 数学与艺术

只是粗浅了解数学的人并不认为数学与艺术有什么相干。

科学求真，艺术求美。数学在有些方面介于科学与艺术之间：科学的对象是客观现实世界，其真理性必须通过观察实验来检验；数学的对象是人工虚拟世界，是人创造出的理念世界，其真理性靠概念的无矛盾性以及形式逻辑来保证。科学或数学知识一旦产生，就成为公共的、客观的知识，不再带有科学家的主观印记。

艺术与数学在这方面则大不相同。艺术家的创造永远带有艺术家本人的风格印记，对艺术作品的欣赏及评价也是仁者见仁、智者见智，甚至截然相反；而数学则要简单得多，数学的进步是绝对的、累积的，而且具有无与伦比的多样性，这也正是高端数学难以理解、更难以创造的原因所在。

1) 共性

(1) 数学与艺术都是人的创造，都强调原创性。