

离散数学（本科）

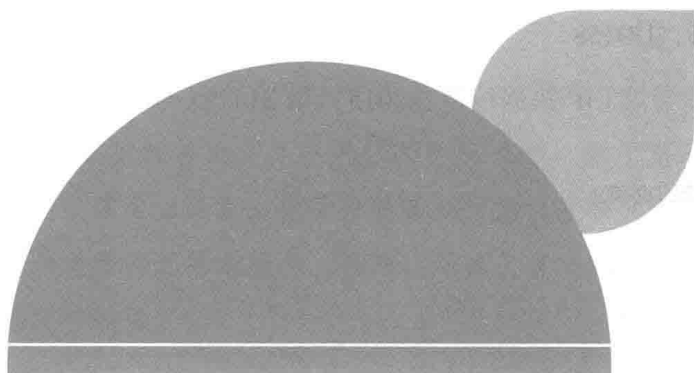
第2版

胡俊 顾静相 编



国家开放大学 国家精品课程（网络教育）

THE OPEN UNIVERSITY OF CHINA



离散数学（本科）

（第2版）



胡 俊 顾静相 编

中央广播电视大学出版社·北京

图书在版编目 (CIP) 数据

离散数学: 本科 / 胡俊, 顾静相编. —2 版. —北京: 中央广播电视大学出版社, 2016. 1 (2017. 3重印)

ISBN 978 - 7 - 304 - 07672 - 6

I. ①离… II. ①胡…②顾… III. ①离散数学—开放大学—教材 IV. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 314795 号

版权所有, 翻印必究。

离散数学 (本科) (第 2 版)

LISAN SHUXUE (BENKE)

胡 俊 顾静相 编

出版·发行: 中央广播电视大学出版社

电话: 营销中心 010 - 66490011

总编室 010 - 68182524

网址: <http://www.crtvup.com.cn>

地址: 北京市海淀区西四环中路 45 号

邮编: 100039

经销: 新华书店北京发行所

策划编辑: 王 可

版式设计: 赵 洋

责任编辑: 王 可

责任校对: 宋亦芳

责任印制: 赵连生

印刷: 北京世汉凌云印刷有限公司

印数: 6001~10000

版本: 2016 年 1 月第 2 版

2017 年 3 月第 4 次印刷

开本: 787mm × 1092mm 1/16

印张: 18.25

字数: 399 千字

书号: ISBN 978 - 7 - 304 - 07672 - 6

定价: 28.00 元

(如有缺页或倒装, 本社负责退换)

“离散数学”是国家开放大学（中央广播电视大学）电子信息类计算机科学与技术专业的一门必修学位课程，也是普通高校计算机及相关专业的一门重要的基础核心课程，教学内容以基本概念、性质、结论、算法、推理与证明方法等为主，理论性与抽象性较强。

本书是在2008年出版的同名教材基础上完成的修订版，根据开放大学计算机科学与技术专业的学习需要，保留了原有的第1~7章（“集合论”“图论”“数理逻辑”部分），增加了第0章“绪论”与第8章“代数结构”部分，其中第8章作为开放大学课程学习的补充材料，以便于读者了解“离散数学”课程相对完整的内容。第0章简要介绍了离散数学的基本内容及其相关学科与课程、离散数学的发展、本课程学习的一般方法，以及为使读者在学前初识“离散数学”课程内容概貌的运用例。第8章的主要内容包括代数系统的概念、二元运算的概念及性质、半群与群的概念及其基本性质、同态与同构的概念，以及环与域的基本概念。

本次修订保留了每一章的“内容介绍”“学习目标”“本章小结”“复习思考题”“习题”以及“学习指导”，对第1~7章的一些正文内容、例题与习题等做了适当的修订，重点对例题与习题等做了补充、完善。本书主要介绍离散数学的基本内容，在不妨碍内容组织完整性的前提下，力争化繁为简，便于读者理解、掌握与运用。对集合论、数理逻辑等内容的介绍是非公理化的，并且是在合适定义的论述域中讨论相关的概念、性质与结论。此做法不会导致概念的模糊与逻辑上的矛盾，所得结论与公理化系统中的结论一致。

本书的修订版遵循开放教育培养计划与大纲的要求，可以作为开放大学计算机科学与技术专业的“离散数学”课程教材，也可以作为有关专业的学生或从事计算机技术与开发的人员学习离散数学的参考书。

在本书的修订版中，第3~7章的修订，以及新增第0章和第8章的撰写由北

京交通大学胡俊博士完成，第1章与第2章的修订由国家开放大学顾静相教授完成。

胡沁之同学阅读了第6章和第7章，对其中一些文字表述，包括例题与习题等的错误或问题提出了修改建议。国家开放大学的有关领导及中央广播电视大学出版社的编辑对本书的修订出版给予了大力的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢。

参加第1版工作的老师与同学姓名在此不再列出，在本书修订过程中参阅的相关教材列于本书参考文献中，在此对他们及相关作者也一并表示衷心的感谢。

最后感谢澳大利亚 Deakin 大学信息技术学院在本教材编者之一胡俊作为访问学者到该校工作期间为其提供了良好的工作条件与环境，同时感谢 Deakin 大学的 Honghua Dai 博士对编者在工作和生活上的支持与关心，所有这些对编者顺利完成教材第3~8章等的修订与撰写工作起到了重要的作用。

编 者

2015年9月

“离散数学”是中央广播电视大学电子信息类计算机科学与技术专业的一门统设必修学位课程。本书的内容是在结合广播电视大学计算机科学与技术专业的学习需要与特点的基础上确定的，主要包括集合论、图论与数理逻辑3部分的内容。

“离散数学”是计算机及有关学科的一门重要的基础核心课程，内容主要是介绍离散量的结构及其相互关系，其包含的理论与方法在各学科领域都有着广泛的应用。同时，“离散数学”也是计算机专业许多专业课程，包括程序设计、数据结构、操作系统、编译技术、数据库、人工智能等的先修课程。通过本课程的学习，学生可以初步掌握处理离散结构所必需的描述工具和方法，同时培养和提高自身的抽象思维和逻辑推理以及分析和解决实际问题的能力，并为以后学习计算机基础理论与专业课程打下良好的基础。

本课程是一门理论性较强的课程，教学内容以基本概念、结论、算法、推理与证明方法为主，主要内容包括集合论、图论与数理逻辑3个方面的内容。全书由7章组成，第1章集合及其运算，主要内容包括集合的基本概念与集合的运算。第2章关系与函数，主要内容包括关系与函数的概念、关系的性质等。第3章图的基本概念与性质，主要内容包括图的基本概念与结论、图的矩阵表示。第4章几种特殊图，主要内容包括欧拉图、汉密尔顿图与平面图的概念及判定方法，以及图的着色。第5章树及其应用，主要内容包括树的定义及性质、最小生成树的概念与求解算法、最优树的概念与求解算法等。第6章命题逻辑，主要内容包括命题的概念、命题公式的解释、范式的概念与求法、命题逻辑的推理理论。第7章谓词逻辑，主要内容包括谓词的概念、谓词公式的解释、谓词演算的推理理论。

本书的每章还包含内容介绍、学习目标、本章小结、复习思考题、习题以及学习指导等内容，便于自学。本书可以作为广播电视大学计算机科学与技术专业的“离散数学”课程教材，也可以作为有关专业的学生或从事计算机技术研究与

开发的人员学习离散数学的参考书。

本书编写组成员为李伟生、顾静相、胡俊。第1, 2章由顾静相撰写, 第3至第7章由胡俊撰写, 李伟生老师审阅了全书。

在编写本书的过程中, 编者参阅了许多离散数学的教材与资料, 有关部分并列于书后参考书目中。北京交通大学的陈治中老师、北京理工大学的吴裕树老师、北京航空航天大学的李卫国老师、首都师范大学的李洪琪老师和北京广播电视大学的张清利老师等对全书的编写提出了许多宝贵的意见和建议。中央广播电视大学的有关领导及中央广播电视大学出版社的编辑对本书的出版给予了大力的支持和帮助。在此一并表示衷心的感谢。

另外, 北京交通大学的褚国嫒、高芳、陈思勇、陈恒忍和马键同学在第3至第7章习题等部分的编写中给予了很多帮助, 在此也表示衷心的感谢。

编 者

2007年11月于北京

第0章 绪 论

1

第1篇 集 合 论

第1章 集合及其运算

11

- 1.1 集合的概念与表示 11
- 1.2 集合运算 16
- 本章小结 24
- 复习思考题 26
- 习题1 (A) 26
- 习题1 (B) 28
- 学习指导 29

第2章 关系与函数

35

- 2.1 关系的概念 36
- 2.2 关系的运算 42
- 2.3 二元关系的性质 50
- 2.4 等价关系 57
- 2.5 序关系 60
- 2.6 函数的概念及性质 67
- 本章小结 73
- 复习思考题 77
- 习题2 (A) 77
- 习题2 (B) 82

● 学习指导	84
--------------	----

第2篇 图 论

第3章 图的基本概念与性质 99

● 3.1 图的概念与性质	100
● 3.2 图的连通性	109
● 3.3 图的矩阵表示与计算	114
● 3.4 最短路径问题与求解算法	119
● 本章小结	121
● 复习思考题	123
● 习题3 (A)	123
● 习题3 (B)	126
● 学习指导	128

第4章 几种特殊图 136

● 4.1 欧拉图	136
● 4.2 汉密尔顿图	140
● 4.3 平面图	144
● 4.4 对偶图与着色	148
● 本章小结	151
● 复习思考题	153
● 习题4 (A)	153
● 习题4 (B)	155
● 学习指导	157

第5章 树及其应用 161

● 5.1 树的定义及性质	161
● 5.2 根树及其应用	167
● 本章小结	174
● 复习思考题	176
● 习题5 (A)	176
● 习题5 (B)	177
● 学习指导	178

第3篇 数理逻辑

第6章 命题逻辑 185

- 6.1 命题的概念与表示 185
- 6.2 命题联结词 187
- 6.3 命题公式的翻译与解释 191
- 6.4 真值表与等价公式 193
- 6.5 重言式与蕴涵式 196
- 6.6 范式 200
- 6.7 命题逻辑的推理理论 206
- 本章小结 209
- 复习思考题 212
- 习题6 (A) 212
- 习题6 (B) 214
- 学习指导 215

第7章 谓词逻辑 221

- 7.1 谓词的概念及表示 221
- 7.2 命题函数与量词 223
- 7.3 谓词公式的翻译与解释 226
- 7.4 变元的约束 228
- 7.5 谓词演算的等价式与蕴涵式 230
- 7.6 前束范式 235
- 7.7 谓词演算的推理理论 236
- 本章小结 240
- 复习思考题 241
- 习题7 (A) 241
- 习题7 (B) 243
- 学习指导 244

第4篇 代数结构

第8章 代数结构概要 251

● 8.1 代数系统的概念	251
● 8.2 二元运算的概念及性质	253
● 8.3 半群与群的概念及其基本性质	259
● 8.4 同态与同构的概念	271
● 8.5 环与域的基本概念	272
● 本章小结	274
● 复习思考题	275
● 习题8 (A)	275
● 习题8 (B)	277
● 学习指导	278

参考文献 281

离散数学是现代数学的一个重要分支,是计算机学科及相关专业的基础核心课程,将为后续专业课程提供相关的理论基础。其以研究离散量的结构与相互之间的关系为主要目标,研究对象一般为有限或可数个元素,可描述计算机学科及相关专业领域研究对象的离散性特点,在计算机学科及相关专业的学习中起重要作用。

1. 离散数学与其他学科的关联

离散数学是随着计算机科学与技术的发展而逐步建立起来的,其内容体系形成于20世纪70年代初,是一门工具性学科,与计算机软件与硬件等学科有密切的联系,包括数据结构、数据库、编译系统、操作系统、算法分析、人工智能、机器证明、信息安全,以及数字逻辑、逻辑设计、系统结构、容错诊断等。

离散数学的主要组成部分包括集合论、图论、数理逻辑、代数结构和组合数学等,其吸收了这些学科的相关内容,同时又有其自身的发展内容。

(1) 集合论是计算机科学理论与技术表述的基础,在程序设计、形式语言、关系数据库、操作系统、编译系统等计算机学科中有广泛的应用。

(2) 图论的应用涉及众多的学科领域,如物理、化学、信息学、运筹学、博弈论、集合论、矩阵论、计算机网络、社会学、语言学等,并且广泛地应用于计算机学科中的算法分析、系统建模、数据结构、编译技术、编码技术等方面。

(3) 数理逻辑是一门交叉性学科,与逻辑学、语言学、数学等密切相关。随着计算机科学与技术的发展,一些逻辑问题可以通过数理逻辑的方法,借助计算机技术获得更好的解决。

(4) 代数结构主要研究由集合上定义若干运算而组成的特殊的数学结构,其概念和方法是研究计算机科学与技术的主要数学基础内容之一,是构造一个现象或过程的数学模型的有效数学工具。

(5) 组合数学研究范畴的划分存在一些不同定义,如广义的组合数学是指离散数学,而狭义的组合数学涵盖图论、数理逻辑与代数结构等部分。在常见的离散数学教材中,一般将组合数学的研究内容限定在满足一定条件的模型的存在、计数及其构造等方面的问题上,主要内容包括组合计数、组合设计、组合矩阵和组合优化等。

2. 离散数学的发展

了解离散数学学科相关理论与技术的发展,以及社会需求对学科发展的影响,可以帮助我们更好地理解其本质与作用.由于离散数学学科具有交叉性特征,并且与当前最重要的研究领域之一——计算机科学与技术领域相关,其发展轨迹就显得有些不同寻常,既与古老的逻辑、数学相关,又与最前沿的信息技术相联系,其对于相关学科的作用、影响与重要性是不言而喻的.

集合论是研究无穷数与超穷数的数学理论,是数学学科的重要分支.从某种意义上来说,集合论是现代数学的基础,其起源于16世纪末,早期研究内容与数集和函数集等相关.19世纪末,德国数学家格奥尔格·康托尔(Georg Cantor, 1845—1918)奠定了集合论研究的基础,其工作常称为朴素集合论,但由于其在定义集合的方法上缺乏限制,从而会导致悖论.20世纪初,英国数学家伯特兰·罗素(Bertrand Russell, 1872—1970)提出动摇集合论理论基础悖论,对基础数学的研究产生影响.德国数学家恩斯特·策梅洛(Ernst Zermelo, 1871—1953)建立了第一个集合论公理系统,使悖论产生的一些矛盾基本得到统一.在此基础上形成的公理化集合论和抽象集合论具有的观点已经渗透到现代数学的各个领域.

图论是一个应用广泛、内容丰富的数学分支,其早期研究与一些数学游戏和应用问题相关,如确定旅行线路的“周游世界问题”与地图着色的“四色问题”等.瑞士数学家莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783)解决了当时的数学难题,即哥尼斯城堡七桥问题,使其成为图论及拓扑学的创始人.1895年,英国数学家威廉·罗恩·哈密尔顿(William Rowan Hamilton, 1805—1865)提出著名的“哈密尔顿回路问题”,激发了图论的研究与发展.德国物理学家古斯塔夫·罗伯特·基尔霍夫(Gustav Robert Kirchhoff, 1824—1887)运用图论的方法,引进“树”的概念,解决了电器设计方面的难题.英国数学家阿瑟·凯莱(Arthur Cayley, 1821—1895)利用树的概念,研究了有机化学中同分异构体数目的计算问题.20世纪50年代后,计算机技术的迅速发展极大地推动了图论的研究进程,使图论成为此后数学领域中发展最快的分支之一.

逻辑学是一门研究思维形式与思维规律的科学,而逻辑规律是客观事物在人的主观意识中的反映.逻辑学主要分为辩证逻辑与形式逻辑两部分.辩证逻辑是以辩证法与认识论确定的世界观为基础的逻辑学;形式逻辑是对思维的逻辑形式结构与规律,以及建立在形式结构上的演绎方法进行研究,类似于语法的一门工具性学科.数理逻辑的研究内容非常广泛,其基本内容与形式逻辑相关,即运用数学方法来研究逻辑问题,也被称为符号逻辑或逻辑数学.在逻辑方面,其研究内容涉及逻辑演算、推理与证明的方法,包括前提与结论之间的必然联系的演绎方法.在语言学方面,它采用专门定义的符号语言来形式化地表示逻辑对象与逻辑结构.在数学方面,它采用数学方法,包括初等数论、代数与集合论等来进行逻辑关系和逻辑演算的建立及推导.

17世纪德国数学家戈特弗里德·威廉·莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716)被认为是数理逻辑的奠基人,他提出用数学方法处理逻辑问题,并在此领域做

出了开创性的工作.19世纪初,英国数学家乔治·布尔(George Boole, 1815—1864)构造了一个初步自足完备的逻辑演算公理系统,即布尔代数系统,至今仍作为相关教材的经典内容.罗素与英国数学家阿尔弗雷德·诺斯·怀特黑德(Alfred North Whitehead, 1861—1947)出版的《数学原理》(*Principle Mathematics*)对数理逻辑等做了初步的系统阐述.自19世纪末至20世纪初,研究运用符号语言与数学方法处理逻辑推理以来,数理逻辑学科有了很大的发展,已形成了众多的分支,包括逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论.本书基于专业教学需要,主要介绍逻辑演算部分,包括命题逻辑与谓词逻辑等基础内容.

代数结构与近代数学的重要分支——抽象代数(也称为近世代数,简称代数)相关,内容包括代数系统、格与布尔代数等.法国数学家埃瓦里斯特·伽罗瓦(Evariste Galois, 1811—1832)是近世代数的创始人之一,他研究了一个方程能用根式求解所必须满足的条件,提出的Galois域、Galois群与Galois理论等是近世代数所研究的最重要的课题.凯莱建立了一种不可交换代数,即矩阵代数.1870年,德国数学家利奥波德·克罗内克(Leopold Kronecker, 1823—1891)给出有限交换群的定义.1910年,尤利乌斯·威廉·理查德·戴德金(Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831—1916)与克罗内克创立环论.恩斯特·施坦尼茨(Ernst Steinitz, 1871—1928)总结了包括群、代数、域等在内的代数体系研究,对抽象代数学的建立做出了重要贡献.荷兰数学家范·德·瓦尔登(Van der Waerden, 1903—1996)出版《近世代数学》,对抽象代数学的发展起到极大的推动作用.

代数结构可以是离散的或是连续的.离散代数包括逻辑门与编程中的逻辑代数、数据库中的关系代数、代数编码理论中的离散有限群、环与域,以及形式语言理论中的离散半群与么半群等.群论以结构研究代替计算,将偏重计算研究的思维方式转变为用结构观念研究的思维方式,对数学运算进行归类,使其发展为一个崭新的数学分支,对近世代数的形成与发展产生了巨大的影响.对近世代数的研究是应数学更严格化的要求而发展起来的.这类研究使人们形成了对全部数学与自然科学的基础性逻辑假设及其复杂性的整体认识.

从以上的简要介绍可以看出,离散数学所包含的几个部分的内容相互之间也是有密切的关联的.

3. 离散数学学习方法要点

“离散数学”作为一门与专业学习需求相关的数学性特征很强的课程,在学习时,以下一般方法是值得注意与借鉴的:

(1) 总体把握课程内容的结构.对于课程内容结构的总体把握,可以帮助了解并明确课程内容的层次结构和学习要点,有利于帮助把握课程学习的重点与关键内容.

(2) 理解与掌握基本概念及其间的关联.离散数学中的概念较多,一些概念之间存在密切的关联.理解与掌握这些基本概念及其间的关联,可以帮助准确理解概念的实质及相互之间的联系与异同,这将对扎实掌握课程学习的内容起重要的作用.

(3) 了解有关重要结论的含义及其应用. 离散数学中有许多重要的结论可以应用于相关的专业领域, 是专业学习需要的重要内容. 了解这些重要结论的含义及其应用方法, 可以帮助提高将其应用于专业领域以解决相关理论技术与实际问题的能力.

(4) 理解与掌握有关数学推导方法及应用. 离散数学本身具有丰富的内容, 在专业领域中有许多实际的应用价值, 而其所采用的数学推导方法等也是课程学习中需要掌握的重要内容. 掌握相关的方法与应用可以帮助提高自身的数学运用能力.

(5) 适当了解相关概念内容的发展历程. 离散数学与多个学科门类相关, 在发展过程中发生了一些对学科发展有影响、起重要作用, 并且可以说有趣的事件. 适当了解相关概念内容的发展历程, 将有助于提高学习的兴趣, 有利于帮助了解课程内容发展的应用需求与实质.

(6) 完成适量的相关练习. 对于一门数学性特征很强的课程, 完成适量的相关练习是学习过程中非常重要的一个环节. 适量的练习可以帮助加深理解课程的学习内容, 掌握其应用方法.

4. 离散数学学习内容初识

学习之初, 了解一些与课程内容相关的应用实例, 在一定程度上可以帮助初识离散数学的内容概貌, 建立合理的认识基础, 有利于帮助理解与掌握课程内容. 下面以几个例子来说明如何运用集合论、图论以及数理逻辑等的相关概念与方法来解决问题.

(1) 集合论的运用例. 集合与关系是集合论中的两个重要概念. 可以用集合论方法来表示对象及其间的关系. 例如, 同学之间的关系用语言表示如下: 小张、小李、小王是小学同学; 小张、小李、小田是中学同学; 小李、小田是大学同学.

利用集合论方法可以将此表示如下: $A = \{\text{小张, 小李, 小王, 小田}\}$, $R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A, x \text{ 与 } y \text{ 是小学同学}\}$, $R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A, x \text{ 与 } y \text{ 是中学同学}\}$, $R_3 = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A, x \text{ 与 } y \text{ 是大学同学}\}$. 这里, 集合 A 表示了所有的人, 集合 R_1, R_2, R_3 分别表示了相应的同学关系.

数据库是一种以确定的数据模型组织与储存的数据集合, 同时可以应用计算机技术对这些数据进行管理. 关系数据库中的数据是以关系表的形式进行组织的, 在对数据的组织管理及应用上, 这种组织形式有许多优点, 如数据操作方便、安全、快捷, 易于维护, 便于访问.

运用集合论的方法可以表示关系数据库中的数据对象及其间的关系, 以及对数据的操作, 如用集合以关系表的形式表示数据; 用关系结构的内容变化表示对数据库表的操作; 在关系数据库中, 数据以关系表(如二维表)形式组织; 用户可以对数据库表进行检索、插入、修改和删除等操作.

设某班级有五名学生, 现有相关的情况描述如下:

学生基本情况描述有 4 个属性: 学号、姓名、年龄、籍贯;

学生住宿情况描述有 2 个属性: 学号、宿舍号;

宿舍情况描述有 4 个属性: 宿舍号、宿舍位置、床位数、剩余数.

这些关系与对应的具体数据均可以用集合的形式来表示, 如下为对应的更直观并易于理解的关系表表示(如表 1~表 3 所示):

表 1 学生基本情况

学 号	姓 名	年 龄	籍 贯
11001	小赵	18	湖南
11002	小钱	18	湖北
11003	小孙	17	江西
11004	小李	19	新疆
11005	小周	20	江苏

表 2 学生住宿情况

学 号	宿舍号
11001	101
11002	101
11003	102
11004	102
11005	103

表 3 宿舍情况

宿舍号	宿舍位置	床位数	剩余数
101	1 号楼	2	0
102	1 号楼	2	0
103	2 号楼	2	1

如果发生学生增加的情况，则可以通过对关系，即关系表的改变来实现。例如，增加一名来自西藏的 18 岁学生“小吴”，则相应的操作体现在对表 1～表 3 的改变，如表 4～表 6 所示，其中的数据均发生了相应的改变，表示为加粗斜体字。

表 4 增加后的学生基本情况

学 号	姓 名	年 龄	籍 贯
11001	小赵	18	湖南
11002	小钱	18	湖北
11003	小孙	17	江西
11004	小李	19	新疆
11005	小周	20	江苏
<i>11006</i>	<i>小吴</i>	<i>18</i>	<i>西藏</i>

表 5 增加后的学生住宿情况

学 号	宿舍号
11001	101
11002	101
11003	102
11004	102
11005	103
11006	103

表 6 增加后的宿舍情况

宿舍号	宿舍位置	床位数	剩余数
101	1 号楼	2	0
102	1 号楼	2	0
103	2 号楼	2	0

在这个例子中，关系数据库表可以用集合论中的关系来表示，对数据库表的操作可以表示为对关系的某种变换。可以看出，如果将该例中的具体对象或数据用数学变量来表示，则可以用此方法来描述数据库表的一般结构以及对数据库表的操作。

(2) 图论的运用例：如何确定在一些城市之间修路，要求各城市相互之间有路相通，并且修路的成本最小？

这是一个有实际需求的应用问题，利用图论方法可以很好地解决这个问题。具体如下：先针对问题建立相应的数学模型，将问题转换为图论的求解带权图中的最小生成树问题，然后利用图论的相关算法，求解带权图中的最小生成树，获得的解就是相应问题的解。

问题的图表示：假设有 5 座城市，经过勘测确定了城市之间修路的成本，用圆圈表示城市，圆圈之间的连线表示在两个相邻城市之间规划一条路，连线上的数值表示修建相应路的成本，则得到被称为带权连通图的修路勘测成本图，如图 1 所示。

问题求解目标：需要确定哪些路是需要修的，可以使得这些城市之间能相通，并且修路的总成本最小。

不难想到的是，将 5 座城市用路连接起来，最少要修 4 条路，任意 2 座城市之间只需修 1 条路，并且要保证将修路的总成本最小。满足这些条件的解就是图论中的最小生成树。也就是说，问题的求解目标就是求得此带权连通图中的最小生成树。

可以利用图论算法求得该图的最小生成树，如图 2 中的粗线所示，其对应一种总成本最小的修路方案，其边上的权值之和是 6。