GAODENG DAISHU

全国高等学校首届国家级教学名师倾力打造

高等代数

学习指导书 第二版

上册

丘维声◎编著

清华大学出版社

高等代数

学习指导书 第二版

上册

丘维声◎编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本套书是大学“高等代数”课程的辅导教材，是作者多年来在北京大学从事高等代数教学工作的结晶。本套书共有11章，分上、下两册。每章节主体结构包括内容精华、典型例题、习题三部分，章末还有补充题。本书阐述了高等代数的理论，总结了高等代数中重要的典型题型及考研题型，提炼了解题的规律、方法和技巧，旨在通过对理论的阐述以及解题方法和技巧的分析，使读者能掌握理论，举一反三、触类旁通。

本书可作为“高等代数”或“线性代数”课程的教学参考书，也可供从事高等代数或线性代数教学的教师参考，还可作为工学、理学、经济学、管理学等学科专业硕士生入学考试数学科目的复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学习指导书. 上册/丘维声编著. —2版. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48367-0

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①丘…　Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第216512号

责任编辑：邓　婷
封面设计：刘　超
版式设计：文森时代
责任校对：赵丽杰
责任印制：刘祎淼

出版发行：清华大学出版社
网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦A座　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市铭诚印务有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185mm×260mm　**印　张**：33.5　**字　数**：685千字
版　次：2005年7月第1版　2017年12月第2版　**印　次**：2017年12月第1次印刷
印　数：1～3500
定　价：78.00元

产品编号：057027-01

第二版前言

本书主要在以下几个方面进行修订：

1. 进一步强化了“高等代数”课程的主线：研究线性空间及其态射(即线性映射)。

“高等代数”课程包括线性代数，一元和 n 元多项式的理论，群、环、域的基本概念三部分，作者把这三部分整合成了一条主线——研究线性空间和线性映射。详见《高等代数学习指导书(第二版：下册)》的第二版前言。

2.《高等代数学习指导书(第二版：上册)》增加了 1 道例题，44 道习题。《高等代数学习指导书(第二版：下册)》增加了 3 道例题，59 道习题。这些题都很有意义并且有相当难度。

3. 删去了定理、命题的证明，这些证明可以在作者编写的《高等代数(上册、下册)(第三版)》(高等教育出版社，2015 年)中找到，或者在作者编写的《高等代数(上册、下册)——大学高等代数课程创新教材》(清华大学出版社，2010 年)中找到。

感谢本套书的责任编辑苏明芳和邓婷，她们为本书的编辑出版付出了辛勤的劳动。

真诚欢迎广大读者对本套书提出宝贵意见。

丘维声
北京大学数学科学学院
2016 年 11 月

第一版前言

本套书——《高等代数学习指导书》(上册、下册)与作者编写的《高等代数》(第2版,上册、下册)一起,凝聚了作者从事教学工作三十多年特别是从事高等代数和线性代数教学工作近三十年的教学经验,是作者最近十年来进行高等代数课程教学改革的成果之一。

我们对高等代数课程的教学目标进行了改革:一方面让学生扎实地掌握高等代数的基本理论、基本方法和基本技巧;另一方面着力培养学生具有数学的思维方式,提高学生的素质和能力。我们把数学的思维方式概括成:观察客观世界的现象,抓住其主要特征,抽象出概念或者建立模型;通过直觉判断、联想推理、归纳推理、类比推理和逻辑推理等进行探索,作出猜测;然后通过深入分析、逻辑推理和计算等方法进行论证,揭示事物的内在规律,从而使纷繁复杂的现象变得井然有序。按照"观察—抽象—探索—猜测—论证"的思维方式学习数学是学好数学的正确途径,而且可以培养学生正确处理工作和生活中各种问题的能力,从而使其终身受益。

我们根据信息时代的需要,运用现代数学的观点,遵循学生的认知规律,改革了高等代数课程的教学内容体系,使其贯穿一条主线,分成五个模块,具有时代气息。一条主线是:研究代数结构及其态射(即保持运算的映射)的观点。五个模块是:(1) 线性方程组和 n 元有序数组的向量空间;(2) 矩阵的运算及矩阵的相抵、相似、合同分类(包括二次型);(3) 一元和多元多项式环;(4) 域上的线性空间及其线性映射;(5) 具有度量的线性空间。在教材和学习指导书中都有反映信息时代对高等代数课程的要求的内容。

我们对高等代数课程的教学方法也进行了改革,在编写的教材和学习指导书的每章节都提出所要研究的问题,抓住重要理论的突破口,讲清楚关键的想法,层层深入分析,探索未知。在讲课中,对于概念,我们讲清楚其产生的背景;对于定理,我们先作直观的解释,然后进行严格的证明。

我们编写的《高等代数》(第2版,上册、下册)精选了教学内容,主要供综合大学、理工科大学和师范院校的数学和应用数学专业、信息与计算科学专业作为教材。而本套学习指导书则内容丰富多彩,为学习高等代数或线性代数课程的学生提供学习方法、掌握理论、解题思路、解题方法和解题技巧的指导;为学有余力的学生提供本门课程的发展空间;为从事

高等代数或线性代数教学的教师提供教学或进修提高的参考书;为数学、自然科学、经济学等领域的科研工作者提供有关高等代数的参考资料;为参加研究生入学考试的考生提供高等代数或线性代数的复习资料;为自学高等代数或线性代数课程的读者提供学习指导。

本套书上册共有6章,下册共有5章。每一章分若干节,章末有补充题,每一节包括三部分内容:(1) 内容精华。阐述本节要研究的问题、基本理论和基本方法。(2) 典型例题。通过丰富多彩的例题及其解答让读者掌握和运用高等代数的基本理论、基本方法和基本技巧,对有些例题我们作了点评。我们对每一道例题都作了详细解答,其目的是让读者了解怎样才是严谨地解答一道题。我们对一部分例题写出了两种或三种解法,但是对大多数例题只写出一种解答,为的是给读者留下思考的空间。(3) 习题。对于每一节的习题在书末有详细提示或解答。每一章的最后有补充题,我们对每道补充题都写出了详细解答或提示。希望读者先自己独立思考做这些题,然后再看解答。读者可根据自己的实际情况选择其中一部分题来做。加"*"的题是比较难的题,或者不作为基本要求的题。我们希望读者通过阅读本书和做其中一部分题,提高数学素养,增强分析问题和解决问题的能力,扎实掌握高等代数的基本理论、基本方法和基本技巧。

作者衷心感谢本套书的组稿编辑吴颖华,她为本套书的编辑出版付出了辛勤的劳动。

我们坦诚欢迎广大读者对本套书提出宝贵意见。

丘维声
于北京大学数学科学学院
2005年6月

目　　录

引言　高等代数的内容和学习方法

客观世界丰富多彩。**几何学**研究客观世界的空间形式，**代数学**通过运算来研究客观世界的数量关系，**分析学**用变化的观点研究客观世界中数量之间的确定性依赖关系，**概率统计**则研究客观世界中的不确定现象(即随机现象)。

用字母表示数，使得客观世界中的未知量可以用字母来表示，然后找出数量之间的等量关系，列成方程；利用运算律和等量公理解方程，便可求出未知量的值。于是解方程成为古典代数学研究的中心问题。

n 个未知量的一次方程组称为 ***n* 元线性方程组**。研究 n 元线性方程组的统一解法，便自然而然地引出了**矩阵**的概念：由 sm 个数排成的 s 行、m 列的一张表。矩阵成为用消去法解线性方程组的非常便利的工具。

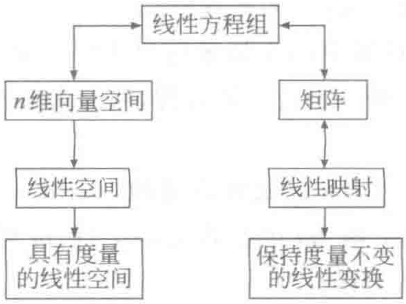
研究线性方程组何时有解，有多少解，以及解集的结构，促使人们在 n 元有序数组的集合中规定加法与数量乘法两种运算，连同运算律形成一个代数系统，称为 ***n* 维向量空间**。借用几何的语言，并且从几何空间受到启发来研究 n 维向量空间的结构，从而彻底解决了线性方程组的解的情况的判定和解集的结构问题。这一成功的范例促使人们进一步抽象出**线性空间**的概念：具有加法与数量乘法两种运算的集合，并且满足 8 条运算法则。用公理化方法研究线性空间的结构，所得到的结论可适用于各种具体的线性空间，例如，函数集合对于函数的加法和数量乘法形成的线性空间。由于客观世界的数量关系中线性问题(即均匀变化的问题)可以通过加法与数量乘法两种运算来表达(例如，描述均匀变化现象的一次函数的解析式为 $y=kx+b$，其中 kx 是做数量乘法，$kx+b$ 是做加法)，因此线性空间成为研究客观世界中线性问题的有力工具。对于非线性问题，经过局部化以后，便可以运用线性空间的理论来处理，或者可以用线性空间的理论研究它的某一侧面。线性空间是高等代数的重要组成部分——线性代数的主要研究对象之一。

客观世界的空间形式中的许多变换(例如，几何空间中平移、旋转、镜面反射、位似、相似、压缩等)，客观世界的数量关系中的许多确定性依赖关系，从运算的角度看，可以抽象成线性空间之间保持加法和数量乘法两种运算的映射，称为**线性映射**。线性映射是线性代数的另一个主要研究对象。可以说，线性代数是研究线性空间和线性映射的理论。线性映射

可以用矩阵来表示,因此线性映射的理论与矩阵的理论有密切的联系。

几何空间中有长度、角度、正交(即垂直)等度量概念,它们可以统一用内积来刻画。由此受到启发,在线性空间,只要定义了内积,就可以引进度量概念。在实数域上的线性空间中,一个正定对称的双线性函数称为一个**内积**;定义了一个内积的有限维实线性空间称为**欧几里得空间**。在复数域上的线性空间中,一个正定的、Hermite的共轭双线性函数称为一个**内积**;定义了一个内积的复线性空间称为**酉空间**。欧几里得空间和酉空间都是具有度量的线性空间,欧几里得空间(或酉空间)到自身的保持内积不变的满射称为**正交变换**(或**酉变换**),它们是保持度量不变的线性变换。

综上所述,线性代数研究的对象及其内在联系可以用下述框图表示:



上述这些是高等代数课程的第一部分的内容。

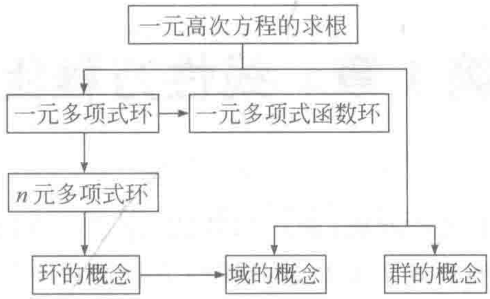
关于一元高次方程 $f(x)=0$ 的求根,很自然的思路是把方程左端的一元多项式因式分解。为此需要研究**一元多项式环**的结构。为了深入研究一元多项式的根,需要研究一元多项式环与一元多项式函数环之间的关系。一元二次方程的求根公式促使人们去研究一元高次方程有没有求根公式?早在欧洲的文艺复兴时代,人们就发现三次、四次方程都有求根公式(即方程的根用系数经过加、减、乘、除、乘方、开方运算所得的公式来表达)。五次和五次以上的方程有没有求根公式?人们历尽了数百年艰辛的探索,最终于1832年由伽罗瓦(Galois)利用方程的根的置换群给出了方程有求根公式的充分必要条件,从而证明了五次和五次以上的一般代数方程没有求根公式。伽罗瓦这一天才的发现进一步促进了人们去研究抽象的**群**、**环**、**域**等代数系统。于是代数学的研究对象发生了根本性的转变。研究各种代数系统(例如,群、环、域等)的结构及其态射(即保持运算的映射)成为近世代数学研究的中心问题。

高等代数课程的第二部分内容是研究一元多项式环的结构及其与一元多项式函数环之间的关系,进而研究 n 元多项式环的结构。

高等代数课程的第三部分内容是从整数集,数域 K 上一元多项式的集合,数域 K 上 n 级矩阵的集合等引出抽象的环的概念;从模 p 剩余类的集合引出抽象的域的概念;从 n 元

置换的集合、正交变换的集合等引出抽象的群的概念。

高等代数的第二、第三部分内容及其内在联系可以用下述框图表示：



高等代数的上述三部分内容有共同的特点：研究代数结构（线性空间，一元或 n 元多项式环，抽象的群、环、域的概念）及其态射（线性映射等）。因此通过学习高等代数课程，可以初步领略近世代数学的风采。代数学研究结构和态射的观点已经渗透到现代数学的各个分支中，从而学习高等代数课程可以通向现代数学的神奇世界。

我们编著的《高等代数》（第 2 版，上册、下册）贯穿一条主线：研究代数结构及其态射的观点。分成五个模块：线性方程组和 n 元有序数组形成的 n 维向量空间，矩阵的运算及其相抵、相似、合同分类，一元和 n 元多项式环，域上的线性空间及其线性映射，具有度量的线性空间。

怎样才能学好高等代数？

1. 要按照数学的思维方式学习高等代数。观察客观世界的现象，提出要研究的问题，抓住其主要特征，抽象出概念或者建立模型；运用"解剖麻雀"、直觉判断、归纳、类比、联想、逻辑推理等进行探索，猜测可能有的规律；然后通过深入分析、逻辑推理和计算进行论证，揭示事物的内在规律，这就是数学思维方式的全过程。按照"观察—抽象—探索—猜测—论证"的思维方式学习数学是学好数学的正确途径，而且可以培养正确处理工作和生活中遇到的各种问题的能力，从而终身受益。

2. 要掌握理论，包括概念、定理、基本方法以及所研究的问题的主线。只有掌握了理论，才能解决各种问题。

3. 要把理论用于解决代数学和数学的其他分支，以及自然科学、社会科学和经济学等领域中的具体问题。

4. 要适当地多做一些习题，要在理论的指导下做习题，要随时总结解题方法和技巧，有一些重要习题的结论也需记住，并可用在其他一些习题的解题过程中。

5. 要注意从几何空间的具体例子受到启发，要把线性代数的理论用于解决几何学中的问题。

6. 要运用辩证法，具体问题具体分析。

第 1 章 线性方程组

客观世界的数量关系中线性问题(即均匀变化的问题)可以列出线性方程组来求解。计算机的迅速发展使得成千上万个未知量的线性方程组也有可能求解,这需要给出统一的、机械的求解线性方程组的算法。本章给出了解线性方程组的高斯(Gauss)—若尔当(Jordan)算法,讨论了线性方程组解的情况及其判别准则。

1.1 线性方程组的解法

1.1.1 内容精华

为了统一地研究线性方程组,约定把常数项写在等号的右边,含未知量的项写在等号的左边。

对于 n 元线性方程组,如果未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别用数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 代入后,每个方程都变成恒等式,那么把 n 元有序数组 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)'$ 称为这个方程组的一个**解**,其中 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)'$ 表示把这个有序数组写成一列的形式。方程组的所有解组成的集合称为这个方程组的**解集**。

若线性方程组Ⅰ与Ⅱ的解集相等,则称Ⅰ与Ⅱ**同解**。

每个线性方程组与自身同解(**反身性**);

若线性方程组Ⅰ与Ⅱ同解,则Ⅱ与Ⅰ同解(**对称性**);

若线性方程组Ⅰ与Ⅱ同解,且Ⅱ与Ⅲ同解,则Ⅰ与Ⅲ同解(**传递性**)。

解线性方程组的基本思路:消去一些未知量(消元),变成阶梯形方程组。

消去未知量的方法是:把一个方程的倍数加到另一个方程上,使某些未知量的系数变成 0,为了使消元有规律可循,有时需要把两个方程互换位置,或者用一个非零数乘某一个方程,方程组的这三种变换称为**初等变换**。可以证明:经过初等变换得到的方程组与原方程组同解,从而经过一系列初等变换变成的阶梯形方程组与原方程组同解。

把线性方程组中每个方程的系数和常数项按原来的次序排成一张表，称为方程组的**增广矩阵**。由此抽象出矩阵的概念：$s\cdot m$ 个数排成的 s 行、m 列的一张表称为一个 $s\times m$ **矩阵**，其中第 i 行与第 j 列交叉位置的数称为这个矩阵的 (i,j) 元，记作 $A(i;j)$。如果矩阵 A 的 (i,j) 元为 a_{ij}，那么可以写 $A=(a_{ij})$。元素全为 0 的矩阵称为零矩阵，记作 0。行数与列数相等的矩阵称为方阵，m 行、m 列的方阵称为 ***m* 级矩阵**。

对于两个矩阵 A 与 B，如果它们的行数相等，都等于 s；列数相等，都等于 n；并且 $A(i;j)=B(i;j)$，$i=1,\cdots,s$；$j=1,\cdots,n$，那么称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

对应于线性方程组的初等变换，有**矩阵的初等行变换**：

1° 把一行的倍数加到另一行上；

2° 互换两行的位置；

3° 用一个非零数乘某一行。

用矩阵的形式来求解线性方程组的过程显得简捷。用矩阵消元法解线性方程组的步骤如图 1-1 所示。

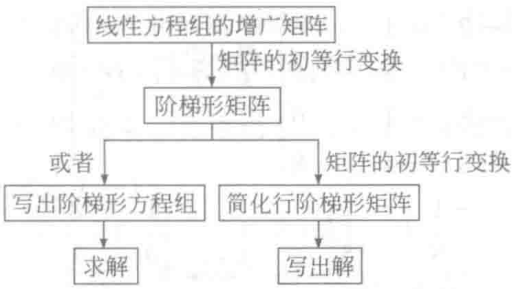


图 1-1

阶梯形矩阵的特点是：

(1) 元素全为 0 的行(称为零行)在下方(如果有零行的话)。

(2) 元素不全为 0 的行(称为非零行)，从左边数起第一个不为 0 的元素称为主元。各个非零行的主元的列指标随着行指标的递增而严格增大。

简化行阶梯形矩阵比阶梯形矩阵多了两个要求：

(1) 每个主元都是 1。

(2) 每个主元所在列的其余元素都是 0。

可以证明：任何一个矩阵都能经过一系列初等行变换化成阶梯形矩阵，并且能用初等行变换进一步化成简化行阶梯形矩阵(证明见 1.1.3 节)。

线性方程组的增广矩阵经过初等行变换化成的阶梯形矩阵，如果最后一个非零行的主元在最后一列，那么相应的阶梯形方程组出现“$0=d$(其中 d 是非零数)”这样的方程，这个方程无解，从而阶梯形方程组无解，于是原方程组无解。

1.1.2 典型例题

例1 解下述线性方程组:

$$\begin{cases} 3x_1-8x_2+\ x_3+5x_4=0, \\ \ x_1-3x_2-2x_3-\ x_4=6, \\ -2x_1+\ x_2-4x_3+\ x_4=-12, \\ -x_1+4x_2-\ x_3-3x_4=2. \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & -12 \\ -1 & 4 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(①,②)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 3 & -8 & 1 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & -12 \\ -1 & 4 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+①\cdot 1]{\substack{②+①\cdot(-3)\\ ③+①\cdot 2}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & -5 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{③+②\cdot 5\\ ④+②\cdot(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 27 & 39 & -90 \\ 0 & 0 & -10 & -12 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\cdot\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & 13 & -30 \\ 0 & 0 & -10 & -12 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+④\cdot 1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -12 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{④+③\cdot(-10)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & 66 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{③\cdot(-1)\\ ④\cdot\left(-\frac{1}{22}\right)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[①+④\cdot 1]{\substack{③+④\cdot 1\\ ②+④\cdot(-8)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{②+③\cdot(-7)\\ ①+③\cdot 2}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$