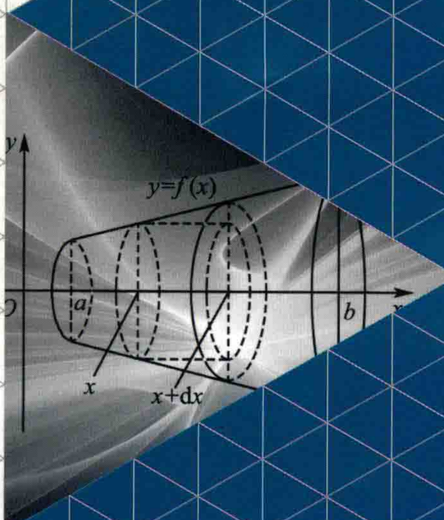
“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

计算机应用数学

（第二版）

新世纪高职高专教材编审委员会 组编
主 编 赵战兴



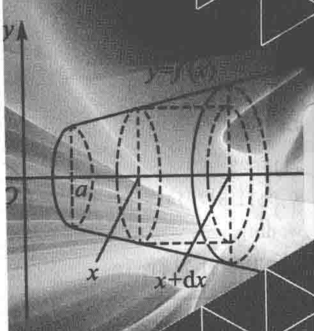
大连理工大学出版社

“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

计算机应用数学

（第二版）

新世纪高职高专教材编审委员会 组编
主　编 赵战兴
副主编 高　霞 邓春淘
李兴莉 袁开友



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算机应用数学 / 赵战兴主编. — 2版. — 大连 ：大连理工大学出版社，2014.7(2014.8重印)
新世纪高职高专计算机应用技术专业系列规划教材
ISBN 978-7-5611-8578-0

Ⅰ. ①计… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①电子计算机—应用数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第021559号

大连理工大学出版社出版
地址：大连市软件园路80号 邮政编码：116023
发行：0411-84708842 邮购：0411-84708943 传真：0411-84701466
E-mail：dutp@dutp.cn URL：http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm 印张：15.75 字数：402千字
2011年8月第1版 2014年7月第2版
2014年8月第2次印刷

责任编辑：马 双 责任校对：张平平
封面设计：张 莹

ISBN 978-7-5611-8578-0 定 价：35.00元

总序

我们已经进入了一个新的充满机遇与挑战的时代，我们已经跨入了21世纪的门槛。

20世纪与21世纪之交的中国，高等教育体制正经历着一场缓慢而深刻的革命，我们正在对传统的普通高等教育的培养目标与社会发展的现实需要不相适应的现状作历史性的反思与变革的尝试。

20世纪最后的几年里，高等职业教育的迅速崛起，是影响高等教育体制变革的一件大事。在短短的几年时间里，普通中专教育、普通高专教育全面转轨，以高等职业教育为主导的各种形式的培养应用型人才的教育发展到与普通高等教育等量齐观的地步，其来势之迅猛，发人深省。

无论是正在缓慢变革着的普通高等教育，还是迅速推进着的培养应用型人才的高职教育，都向我们提出了一个同样的严肃问题：中国的高等教育为谁服务，是为教育发展自身，还是为包括教育在内的大千社会？答案肯定而且唯一，那就是教育也置身其中的现实社会。

由此又引发出高等教育的目的问题。既然教育必须服务于社会，它就必须按照不同领域的社会需要来完成自己的教育过程。换言之，教育资源必须按照社会划分的各个专业（行业）领域（岗位群）的需要实施配置，这就是我们长期以来明乎其理而疏于力行的学以致用问题，这就是我们长期以来未能给予足够关注的教育目的问题。

众所周知，整个社会由其发展所需要的不同部门构成，包括公共管理部门如国家机构、基础建设部门如教育研究机构和各种实业部门如工业部门、商业部门，等等。每一个部门又可作更为具体的划分，直至同它所需要的各种专门人才相对应。教育如果不能按照实际需要完成各种专门人才培养的目标，就不能很好地完成社会分工所赋予它的使命，而教育作为社会分工的一种独立存在就应受到质疑（在市场经济条件下尤其如此）。可以断言，按照社会的各种不同需要培养各种直接有用人才，是教育体制变革的终极目的。

随着教育体制变革的进一步深入，高等院校的设置是否会同社会对人才类型的不同需要一一对应，我们姑且不论，但高等教育走应用型人才培养的道路和走研究型（也是一种特殊应用）人才培养的道路，学生们根据自己的偏好各取所需，始终是一个理性运行的社会状态下高等教育正常发展的途径。

高等职业教育的崛起，既是高等教育体制变革的结果，也是高等教育体制变革的一个阶段性表征。它的进一步发展，必将极大地推进中国教育体制变革的进程。作为一种应用型人才培养的教育，它从专科层次起步，进而应用本科教育、应用硕士教育、应用博士教育……当应用型人才培养的渠道贯通之时，也许就是我们迎接中国教育体制变革的成功之日。从这一意义上说，高等职业教育的崛起，正是在为必然会取得最后成功的教育体制变革奠基。

高等职业教育还刚刚开始自己发展道路的探索过程，它要全面达到应用型人才培养的正常理性发展状态，直至可以和现存的（同时也正处在变革分化过程中的）研究型人才培养的教育并驾齐驱，还需要假以时日；还需要政府教育主管部门的大力推进，需要人才需求市场的进一步完善发育，尤其需要高职教学单位及其直接相关部门肯于做长期的坚忍不拔的努力。新世纪高职高专教材编审委员会就是由全国100余所高职高专院校和出版单位组成的、旨在以推动高职高专教材建设来推进高等职业教育这一变革过程的联盟共同体。

在宏观层面上，这个联盟始终会以推动高职高专教材的特色建设为己任，始终会从高职高专教学单位实际教学需要出发，以其对高职教育发展的前瞻性的总体把握，以其纵览全国高职高专教材市场需求的广阔视野，以其创新的理念与创新的运作模式，通过不断深化的教材建设过程，总结高职高专教学成果，探索高职高专教材建设规律。

在微观层面上，我们将充分依托众多高职高专院校联盟的互补优势和丰裕的人才资源优势，从每一个专业领域、每一种教材入手，突破传统的片面追求理论体系严整性的意识限制，努力凸现高职教育职业能力培养的本质特征，在不断构建特色教材建设体系的过程中，逐步形成自己的品牌优势。

新世纪高职高专教材编审委员会在推进高职高专教材建设事业的过程中，始终得到了各级教育主管部门以及各相关院校相关部门的热忱支持和积极参与，对此我们谨致深深谢意，也希望一切关注、参与高职教育发展的同道朋友，在共同推动高职教育发展、进而推动高等教育体制变革的进程中，和我们携手并肩，共同担负起这一具有开拓性挑战意义的历史重任。

新世纪高职高专教材编审委员会

2001年8月18日

前言

《计算机应用数学》(第二版)是"十二五"职业教育国家规划教材,也是新世纪高职高专教材编审委员会组编的计算机应用技术专业系列规划教材之一。

本教材是编者在将高等数学知识应用于计算机相关专业的基础上,经多年教学实践后编写而成的,并根据教育部制定的高职高专教育基础课程教学的基本要求和专业培养的相关要求,充分发挥高等数学知识在培养应用型技术人才中的作用。本教材的编者既有丰富的教学经验,又有多年的软件开发经验,将计算机软件开发所需的数学知识与软件开发的案例相结合,将数学理论知识与计算机软件相结合,将传统教学与案例教学相融合,加入了如何应用数学知识进行编程来解决实际问题的案例,极大地激发了计算机相关专业学生学习数学知识与专业知识的积极性。

教材特色

第一,在保持传统高等数学知识点的基础上,增加了软件编程案例与数学建模案例,强化了数学知识在实际问题中的应用;

第二,本教材重要章节采用了案例导入的形式,并增设了"观察与思考"环节,有助于加强师生的交流与互动,发挥学生的主观能动性,提高学生的学习兴趣;

第三,在上一版的基础上,完善和补充了部分知识,并调整了部分章节内容结构顺序,使教材内容更加系统,便于不同层次的学生选用;

第四,注重实用性并淡化了数学推导过程,改变了传统的教学模式;

第五,在上一版的基础上,删掉了大多数纯理论的证明,强化了知识的运用,降低了数学理论和计算的难度;

第六,在上一版的基础上,增加了数学实验,将数学知识与数学软件相结合,使学生更加容易掌握数学知识,提升教师的教学手段,并优化教学方法;

第七,本教材在结构上采用"基础模块+应用模块"的形式,"基础模块"为必修内容,"应用模块"为选学内容,可根据专业需求进行选择;

第八，本教材的编写还参考了部分省市普通高等学校专升本《高等数学》考试大纲，可供专升本学生选择使用。

内容体系

本教材共包括八章，分别是：函数、极限与连续；导数与微分；导数的应用；不定积分与定积分；微分方程；无穷级数；线性代数；数学软件 MATLAB。各章节均配有丰富的例题和习题，以便学生自学。

本教材由赵战兴任主编，高霞、邓春沟、李兴莉、袁开友任副主编。具体编写分工如下：第1章与第2章由高霞编写，第3章的第1～3节与第4章的第1～4节由邓春沟编写，第3章的其他部分、第4章的其他部分、第5章、第6章由赵战兴编写，第7章与第8章由李兴莉编写，全书的软件编程案例由袁开友编写。全书由赵战兴制定修订编写大纲，并完成统稿。

在本教材的编写和修订过程中，由于编者水平有限，编写时间较为仓促，加上更改了教材编写模式，因此难免存在一些疏漏和不妥之处，恳请各位专家及广大读者批评指正，以便进一步修改和完善。

编 者

2014 年 7 月

所有意见和建议请发往：dutpgz@163.com

欢迎访问教材服务网站：http://www.dutpbook.com

联系电话：0411-84707492 84706104

目　录

第1章

函数、极限与连续

微积分是从研究函数概念开始的,它是高等数学的重要研究对象.极限是自始至终贯穿于微积分的重要概念,它是研究微积分的重要工具,如微积分中的导数、定积分等概念都是通过极限来定义的,因此,掌握极限的思想与方法是学好微积分的前提条件.本章将介绍函数、极限、连续及其相关的基本概念、性质和计算.

1.1 函数及其性质

1.1.1 基础知识

1. 区间

任何变量都有一定的变化范围,有时变量可取任意实数值,有时又要受到某种条件的限制,若变量的变化范围是连续的,我们常用区间来表示.

设两个实数 a,b 且 $a<b$,则满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数的全体称为闭区间,记作:$[a,b]$;满足 $a<x<b$ 的实数的全体称为开区间,记作:(a,b);满足 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数的全体称为半开半闭区间,分别记作:$[a,b)$或$(a,b]$.

上面这些区间称为有限区间,除了有限区间之外,还有无限区间.

$(-\infty,a]$表示全体不大于 a 的实数,$(-\infty,a)$表示全体小于 a 的实数,$[b,+\infty)$表示全体不小于 b 的实数,$(b,+\infty)$表示全体大于 b 的实数,$(-\infty,+\infty)$表示全体实数.

2. 邻域

邻域是在微积分中经常用到的一个概念.

在数轴上,以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域,记作:$U(x_0)$.设 δ 为任意一个正数($\delta>0$),则开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$就是点 x_0 的一个邻域,这个邻域称为点 x_0 的 δ 邻域,记作:$U(x_0,\delta)$,即 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$,其中点 x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉,点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后称为点 x_0 的去心 δ 邻域,记作:$\mathring{U}(x_0,\delta)$,即 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.我们把开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为点 x_0 的左 δ 邻域,把开区间$(x_0,x_0+\delta)$称为点 x_0 的右 δ 邻域.

1.1.2 函数的概念

在研究实际问题时,所涉及的变量往往不止一个,这些变量之间总有一定的联系,即其中一个量的变化常常会引起其他变量也随之变化,下面考察一个实际案例.

【案例 1-1】 圆的面积 S 与它的半径 r 之间的关系由公式 $S=\pi r^2$ 给定.

分析 当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由公式就可以确定圆面积 S 的相应数值.

1. 函数的定义

定义 1-1 设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在非空数集 D 内任意取定一个数值时，按照一定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作：

$$y=f(x),x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域. 当 x 取遍 D 中的一切数值时，对应的函数值 y 的全体所构成的集合称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记作：W，用集合形式可表示为 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

对于任取数值 $x_0\in D$，与 x_0 相对应的 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作：$f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形.

2. 函数的两个要素

函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素.

对应法则：由自变量取值来确定因变量取值的规律，例如，$f(x)=3x^2-2x+1$ 就是一个特定的函数，f 确定的对应法则为 $f(\quad)=3(\quad)^2-2(\quad)+1$.

定义域：自变量的取值范围.

对于有实际意义的函数，其定义域由研究的实际问题决定；对于纯数学上的函数关系，其定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围.

通常求函数的定义域需要注意以下几点：

(1)当函数是多项式时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

(2)分式函数的分母不能为零；

(3)偶次根式的被开方式必须大于或等于零；

(4)对数函数的真数必须大于零；

(5)正切符号下的式子必须不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，余切符号下的式子必须不等于 $k\pi(k\in Z)$；

(6)反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值必须小于或等于 1；

(7)若函数表达式中含有上述几种情形，则应取各情形定义域的交集.

【例 1-1】 生产成本是产量的函数. 某钢铁厂生产钢材的成本函数为

$$C(x)=1.6+3x-2x^2+x^3(\text{万元}),$$

其中 x 为产量，单位为吨，求此函数的定义域.

解 由常理可知，产量 x 不可能为负数，因此 x 的取值范围为 $x\geq 0$ 的一切实数，即函数的定义域为 $D=[0,+\infty)$.

【例 1-2】 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}-\sqrt{x+5}$ (2) $f(x)=\lg(9-x^2)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

解 (1)要使 $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}-\sqrt{x+5}$ 有意义，必须 $\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+5\geq 0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x\neq\pm 2\\ x\geq -5\end{cases}$，所以该函数的定义域为 $D=[-5,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)要使 $f(x)=\lg(9-x^2)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 有意义，必须 $\begin{cases}9-x^2>0\\x^2-1>0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-3<x<3\\x<-1\text{ 或 }x>1\end{cases}$，所以该函数的定义域为 $D=(-3,-1)\cup(1,3)$.

通过对函数定义的分析不难发现，函数是由定义域和对应法则两要素确定的，而与变量用什么符号表示无关. 若两个函数的定义域相同且对应法则也相同，则这两个函数就相同，否则就不同.

【例 1-3】 下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$　　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$

(3) $f(x)=\sin^2 x, g(x)=1-\cos^2 x$

解 (1)不相同. 因为 $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，而 $g(x)=x$，显然两个函数的对应法则不相同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(2)不相同. 因为 $D_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，$D_g=(-\infty,+\infty)$，显然两个函数的定义域不相同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(3)相同. 因为 $g(x)=1-\cos^2 x=\sin^2 x$ 与 $f(x)=\sin^2 x$ 的定义域和对应法则都相同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

注意 判断函数相同与否，必须同时满足两个要素，但只要其中有一个要素不满足就不需再判断另一个要素.

3. 函数的表示法

通常用表格法、图象法和解析法(公式法)来表示一个函数.

(1)表格法：将自变量的值与对应的函数值列成表的方法，称为表格法.

(2)图象法：在坐标系中用图象来表示函数关系的方法，称为图象法.

(3)解析法：将自变量与因变量之间的关系用数学式子来表示的方法，称为解析法(也称为公式法)，如案例 1-1.

我们以后学习的函数基本上都是用解析法来表示的.

【例 1-4】 函数 $y=2x+1$ 的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $W=(-\infty,+\infty)$，其图形是一条直线，如图 1-1 所示.

【例 1-5】 函数 $y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\x & x\geq 0\end{cases}$ 称为**绝对值函数**，它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-2 所示.

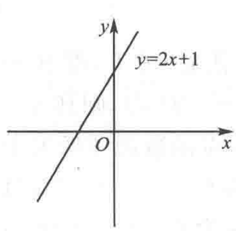


图 1-1

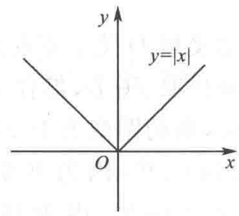


图 1-2

【例 1-6】 函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\0 & x=0\\-1 & x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**，它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，

值域是 $W=\{-1,0,1\}$.

从例 1-5、例 1-6 中可以看出，有的函数要用几个式子来表示. 这种在其定义域的不同范围内，对应法则用不同的式子来表示的函数，称为**分段函数**.

需要注意的是，分段函数是一个函数，而不是几个函数；分段函数的函数值是用自变量所在区间对应的式子来计算的；分段函数的定义域是各段函数定义域的并集，值域也是各段函数值域的并集.

1.1.3 函数的简单性质

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若存在正数 M，使对于任意 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界；否则，称为无界. 若一个函数在它的整个定义域内有界，则称该函数为有界函数. 有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 是有界函数，因为它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，总有 $|\sin x|\leqslant 1$.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，任取两点 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上是单调减少的.

单调增加或单调减少的函数，它们的图形分别是沿 x 轴正向逐渐上升或下降，分别如图 1-3(a) 和 (b) 所示.

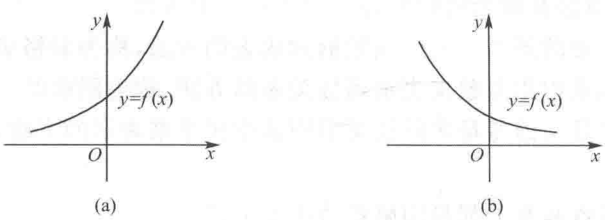


图 1-3

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 若函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 内的某个区间内是单调的，则称这个区间为函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

例如，$f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少，$(-\infty,0]$ 为单调减少区间；在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，$[0,+\infty)$ 为单调增加区间，但该函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若任取 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是 D 上的偶函数. 若任取 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是 D 上的奇函数.

从几何图形上看，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，因为其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$；$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，对于任意 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常我们说的周期函数的周

期是指其最小正周期.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

1.1.4　反函数

在研究两个变量之间的函数关系时，可根据问题的实际需要选定其中一个作为自变量，另一个作为因变量.

例如，在商品销售过程中，已知某商品的价格为 $p(p>0)$，设其销售量为 x，销售收入为 y. 当已知该商品的销售量 x 时，由关系式 $y=px$ 可求得销售收入 y. 反之，当已知该商品的销售收入 y 时，由 $y=px$ 可得关系式 $x=\dfrac{y}{p}$，即给定 y 值，可得对应的 x 值. 这时 y 是自变量，x 是因变量，x 是 y 的函数，我们称 $x=\dfrac{y}{p}$ 为 $y=px$ 的反函数. 一般地，有

定义 1-2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若对于 W 中每一个 y 值，都有唯一确定的且满足 $f(x)=y$ 的 x 与之对应，则由此确定了一个以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$，我们称这个函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作：$x=f^{-1}(y)$.

由定义可知，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数. 习惯上，我们用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以反函数习惯地表示成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式.

注意　(1)函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是表示同一个函数.

(2)求反函数的方法：给出一个函数 $y=f(x)$，要求其反函数，只要把 x 用 y 表示出来，再交换 x 与 y 的位置即可.

【例 1-7】　求 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

解　由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$，交换 x 与 y，得 $y=x^3-1$，即为所求反函数.

1.1.5　初等函数

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域分别为 D_1，D_2，$D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则我们可以定义这两个函数具有下列运算：

和(差)$f\pm g$：　$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$.

积 $f\cdot g$：　$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$.

商$\dfrac{f}{g}$：　$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in\{x\,|\,x\in D \text{ 且 } g(x)\neq 0\}$.

1. 基本初等函数

微积分研究的对象是函数，而涉及的函数主要是我们在初等数学中学习过的，分别是：

(1)常数函数 $y=C$(C 为常数).

(2)幂函数 $y=x^a$(a 为常数).

(3)指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$).

(4)对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$).

(5)三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6)反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这六种函数统称为基本初等函数，它们的定义域、值域、图形、性质等参见附录 2.

2. 复合函数

在实际问题中，两个变量之间的联系有时不是直接的，而是通过另一个变量间接联系起来的.

例如，当运输石油的油轮在大海中触礁发生泄漏事故时，石油污染海水的面积 S 是被污染圆形水面的半径 r 的函数，即 $S=\pi r^2$，而半径又是时间 t 的函数，即 $r=\varphi(t)$，因此被污染的海水面积 S 与时间 t 的关系是 $S=\pi[\varphi(t)]^2$.

可见 S 是由两个函数通过变量 r 构成的，这样的函数我们称为复合函数.

定义 1-3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=g(x)$，当 x 在 $u=g(x)$ 的定义域 D 内取值时，对应的 u 值使 y 有意义，则称 y 是 x 的一个定义于 D 的**复合函数**，记作：

$$y=f[g(x)],x\in D,$$

称 $y=f(u)$ 为**外层函数**，$u=g(x)$ 为**内层函数**，u 为**中间变量**，x 为**自变量**，y 为**因变量**.

【例 1-8】 设 $f(x)=4x^2-x$，$g(x)=\sin x$，试写出 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 的表达式.

解 $f[g(x)]=f(\sin x)=4\sin^2 x-\sin x$，$g[f(x)]=g(4x^2-x)=\sin(4x^2-x)$.

对于一个给定的复合函数，必须分析清楚它的复合过程（即将复合函数分解为简单函数），掌握这种分析复合过程的方法，对学习后面的微积分非常重要.

一般而言，把一个复合函数分解成若干个简单函数，就是由外向内，逐层分析复合函数是由哪些简单函数（基本初等函数或基本初等函数经简单运算而得）复合而成的，每个层次都应是一个简单函数.

【例 1-9】 将下列复合函数分解为简单函数.

(1) $y=3^{(5x-1)^2}$ (2) $y=\sin(x^3+4)$ (3) $y=\tan^5 x$

解 (1) $y=3^{(5x-1)^2}$ 是由 $y=3^u$，$u=v^2$，$v=5x-1$ 复合而成的.

(2) $y=\sin(x^3+4)$ 是由 $y=\sin u$，$u=x^3+4$ 复合而成的.

(3) $y=\tan^5 x$ 是由 $y=u^5$，$u=\tan x$ 复合而成的.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算所构成的，且可用一个解析式表示的函数称为初等函数. 否则，称为非初等函数. 今后我们讨论的函数，绝大多数都是初等函数.

注意 分段函数不一定是初等函数.

例如，$y=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x}$，$y=\sin^2 x$ 都是初等函数，而分段函数 $y=\begin{cases}x^2 & x>0\\ \sin x & x\leqslant 0\end{cases}$ 就不是初等函数，因为它不能由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算得到，但分段函数 $y=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 是初等函数，因为它可以表示为 $y=\sqrt{x^2}$，可看作是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成的.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ (2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ (3) $y=\ln\ln x$

(4) $y=\dfrac{\ln(1-x)}{\sqrt{x+3}}$　　(5) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+3$　　(6) $y=\begin{cases} e^x & x>0 \\ 2x-1 & x\leqslant 0 \end{cases}$

2. 下列各组函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$　　(2) $f(x)=\lg x^3, g(x)=3\lg x$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geqslant 0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$，求(1)函数的定义域；(2) $f(-1)$、$f(2)$、$f(3)$；(3)画出图形.

4. 判断下列函数的单调性.

(1) $f(x)=4x+5$　　(2) $f(x)=2^x+3$

(3) $f(x)=\log_2 x$　　(4) $f(x)=3x^2+2$

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^3-x$　　(2) $f(x)=\sin^3 x$

(3) $f(x)=2^x-2^{-x}$　　(4) $f(x)=x^2(1+x^4)$

6. 求函数 $f(x)=\sin 3x$ 与 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{3}$ 的最小正周期.

7. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-4$　　(2) $y=\dfrac{2x+3}{3x-1}$

(3) $y=e^{x+2}$　　(4) $y=1+\ln(x+2)$

8. 设函数 $f(x)=(x-1)^2, g(x)=\dfrac{1}{x+1}$，求

(1) $f[g(x)]$　　(2) $g[f(x)]$　　(3) $f(x^2)$　　(4) $g(x-1)$

9. 设函数 $y=f(x)$ 的定义区间为 $(0,1]$，求下列各函数的定义域.

(1) $f(x^2)$　　(2) $f(\sin x)$　　(3) $f(\lg x)$　　(4) $f(x-\dfrac{1}{2})+f(\log_2 x)$

10. 将下列复合函数分解为基本初等函数或简单函数？

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$　　(2) $y=\cos x^4$

(3) $y=\sin^2(x-1)$　　(4) $y=2^{\sin x}$

11. 火车站收取行李费的规定是：当行李重量不超过 50 kg 时，按基本运费 0.30 元/kg 计算；当超过 50 kg 时，超过部分按 0.45 元/kg 收费. 若某人从北京到某地，试求北京到该地的行李费 y(单位：元)与重量 x(单位：kg)之间的函数关系，并画出该函数的图形.

数学实验——用 MATLAB 求函数值、绘制二维图形

一、实验目的

应用 MATLAB 求函数值以及绘制二维图形.

二、主要命令

1. plot(x,y)：根据变量 x 绘制出变量 y 的图形，就是以 x 为横坐标，y 为纵坐标，将有序点集连成曲线；