/// 吉林财经大学资助出版图书 ///

林下参种植光环境的动态预测与评价

刘煦 著

科学出版社

林下参种植光环境的动态预测与评价

刘 煦 著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书以林下参种植光环境为研究对象，提出了一种非线性快速 Fourier 分解算法以解决光环境实测信号的随机噪声干扰问题；同时采用机器学习和模式识别理论，构建了基于偏最小二乘算法的净光合速率预测模型和基于自适应神经模糊推理系统的净光合速率预测模型；并通过对典型试验样地进行数据采样与分析，验证了所建模型的有效性和可行性，进而设计了林下参种植光环境监测和采集系统；最后基于 MATLAB 平台完成了林下参种植光环境预测与评价系统的集成开发，构建了林下参种植光环境地域栽培适宜性综合评价指数，作为指导林下参种植的重要依据。

本书在研究林下参种植光环境的过程中侧重于数学分析工具在农业生产领域的有效应用，既适合林下参相关研究人员作为参考书籍，也适合从事数据模式识别的研究人员阅读与参考。

图书在版编目(CIP)数据

林下参种植光环境的动态预测与评价/刘煦著. —北京：科学出版社，2017
ISBN 978-7-03-052944-2

Ⅰ. ①林… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①人参-种植-照明-研究 Ⅳ. ①S567.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 117939 号

责任编辑：裴 育 纪四稳 / 责任校对：桂伟利
责任印制：张 伟 / 封面设计：华然天路

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2017 年 6 月第一次印刷 印张：8
字数：161 000

定价：80.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

人参在我国具有几千年的应用历史，曾分布较广。随着野生资源被过度开发，野山参资源已基本枯竭。园参栽培方式历史悠久，但传统采用的伐林栽参、参后还林的栽培方法，造成了较严重的生态破坏，此外还存在着因使用农药造成的人参中有效成分含量较低、农药残留超标等，导致高产低价、出口受限等问题。因此，充分利用林地、不破坏资源、提高生态效益的林下参栽培方式逐渐受到重视，其品质虽不能与野山参相提并论，但价值远高于园参，深受市场青睐。人参作为喜阴植物，具有喜气候寒凉和湿润、怕强光、忌高温、耐严寒的特性，因此种植过程中对光照条件要求十分严格。光照过多时，人参生长受到抑制，叶片组织易受破坏，光合作用也受到抑制；光照不足时，植株矮小瘦弱，生长不良。可以认为，林下光环境是林下参发育及生态系统作用过程的关键性因素，因此光环境的研究及其评价与预测已成为合理指导林下参种植的首要问题。

本书针对林下种植生态环境中重要的光环境问题，利用机器学习和自适应数据处理理论，探索种植区域内太阳辐射变化与遮阴作用协同影响下的林下光环境变化动态模型及人参个体和群体的受光动态模型；揭示林下参光环境的动态变化及其对人参光合生理及生长发育的影响规律；创建种植区域的光环境预测与评价系统，为生产、投资风险评估和分析提供理论依据，对林下参种植的温度、湿度、土壤因子及植被类型的选取等其他生态环境的分析和评价机制具有借鉴意义，也为林下其他植被的研究和生产提供了有益参考，有助于发挥其最佳的经济效益、生态效益和社会效益。

本书主要研究内容如下：

(1) 针对林下参种植光环境相关物理量测定过程中存在的随机干扰问题，提出适用于处理非平稳信号的非线性快速 Fourier 分解算法。为便于实际应用，书中给出了算法步骤，并选择具有不同参数基底展开函数的数值算例进行分析，分析结果表明，非线性 Fourier 展开的逼近精度要显著高于线性 Fourier 展开。通过对含有随机噪声的仿真信号和净光合速率实测数据信号应用非线性 Fourier 分解算法进行降噪处理，验证了该算法的有效性与可行性，较好地解决了高维试验数据预处理的难题。

(2) 针对林下参的种植光环境特点,利用智能计算在解决自适应模型预测时的算法优势,重点对偏最小二乘(PLS)算法的算法要求、成分提取和建模步骤进行深入探讨,并根据实测的林下参光合作用因子数据,利用该算法实施成分提取和分析,获得林下参净光合速率的 PLS 多因素分析模型,进而对各个变量的回归系数分布情况及其与因变量的相关性进行分析,分析结果表明,该模型具有较好的预测效果。

(3) 采用逐步回归分析方法,建立红松林木的冠幅生长预估模型、冠长生长预估模型及基本树高预估模型,且模型具有较高的精度。通过采用主成分提取以及权重分析,获得林下参净光合速率的多因素分析模型。利用自适应神经模糊推理方法,构建基于自适应神经模糊推理系统的净光合速率预测模型,通过对模型的检验以及典型试验样地的验证,结果表明,该模型泛化能力强、预测精度高。

(4) 针对传统光环境数据采集方法存在的问题,设计具有良好降噪功能的林下参种植光环境数据实时监测和采集系统。一方面,编制采集系统底层算法软件和采集系统图形用户交互界面,完成软件架构的设计;另一方面,利用微控制器系统完成硬件平台设计开发,实现对光环境数据的实时监测。

(5) 对林下参种植的地理、气候和植被等生态条件的适宜性进行详尽归纳和分析,采用模糊集理论研究并设计生态适宜性综合评价指数,建立光环境综合评价模型,进而构建林下参种植光环境预测及评价系统。该系统集成了林下参遮阴屏障——树木的生长模型预测算法,以及衡量人参光合效率的重要指标——净光合速率的模型预测算法,能够在综合分析各方面生态条件的基础上,对林下参种植光环境的地域栽培适宜性作出综合评价。

目　录

第1章　绪　　论

1.1　研究背景及意义

人参，属五加科（Araliaceae）植物，古代也称为“人葠”、“人蓡”，别号“地精”、“神草”，在我国具有数千年的应用历史，被誉为百草之王。最早的中药学专著《神农本草经》记载着中国4000年前就已经形成的人参药用精髓，称：“人参，味甘微寒，主补五脏，安精神，定魂魄，止惊悸，除邪气，明目，开心益智。久服，轻身延年。一名人衔，一名鬼盖。生山谷。”人参的拉丁学名为Panax Ginseng C. A. Meyer，为俄罗斯植物学家卡尔·安东·冯·迈耶（Carl Anton von Meyer，1795—1855）于1843年命名，沿用至今。其中的属名Panax是一个希腊复合词汇，由Pan（意为一切的，所有的）和Axos（治疗，药用）复合而成，表示该植物为一种治疗百病的药物；种名Ginseng为中文人参的汉语音译，可见在西方，人参也被视作神奇的仙草。

长久以来，我国人参的主要生产方式是采挖野山参与园参栽培两种。野山参是指自然生长于深山密林中的原生态人参，因其所具有的神奇疗效与产品的稀缺性而深受市场青睐。根据古地质学家和古生物学家的分析与推断，人参是地球上最古老的孑遗植物之一。多数学者认为，在地球上被子植物极为繁盛的第三纪（距今6500万年～距今180万年），人参在植物界广为繁衍，地理分布较广。现代，世界范围内公认人参分布在北纬38°～48°范围内。古时我国太行山脉、长白山脉、大小兴安岭为人参主要分布地区，东汉许慎在公元121年撰写的《说文解字》中对其解释为：“参，人参，药草，出上党。”这是文献中对人参产地的最早记载。20世纪50年代，野山参资源缩小到北纬40°～48°、东经117.6°～134°的有限范围内。目前，我国野山参资源仅零散分布于头道松花江、二道松花江邻近的抚松、靖宇、桦甸、敦化、安图，鸭绿江畔的长白、临江、集安等地的原始森林区间中。由于自然环境的变迁和人类生活对生态的持续影响，特别是多年来的过度采挖与对野生资源的过度开发，野山参产量逐年下降，资源已基本枯竭，处于濒临灭绝的边缘。据不完全统计，20世纪20年代前后吉林省年产野山参高达750kg，到了80年代年产量不足200kg，

近年来更是急剧减少。80 年代，野山参已被列为我国的一级重点保护植物，1992 年被列为国家的珍稀濒危植物。

古人从采挖野山参的经验中逐步学会了山参的移栽方法，形成的园参栽培方式迄今已有 2000 多年的悠久历史。据《晋书·石勒别转》记述："家园中生人参，花叶甚茂，悉成人状。"可见我国的人参栽培至少在魏晋时期就已开展。园参栽培具有种植面积广、产量大的特点。但传统采用的伐林栽参、参后还林的栽培方法，已经造成较为严重的生态破坏。据统计，20 世纪 90 年代，我国东北地区约有 150000hm^2（$1hm^2=10^4m^2$）的森林被毁在了人参种植业上。再加上种参后不能及时还林和措施不当，使得水土流失严重，加剧了环境的恶化。同时这种传统的伐林栽参、参后还林栽培方式还会改变土壤结构，易导致土壤板结，并将对物种资源的多样性及生物链的恢复产生较大影响。相关研究表明，伐林栽参毁坏的不仅是高大的乔木、地面灌木及草本植物，而且通过烧荒清根破坏了大部分的原有物种。通过参后还林，即用人工林替代天然的野生林之后，物种大幅度减少，其中乔木种类就减少了 90%以上，灌木和藤本植物种类减少几乎为 100%，草本植物种类减少 90%以上。此外，伐林栽参、参后还林的传统园艺栽培种植方式一般需要使用农药防治病虫害，缩短生长周期，致使成品人参中的有效成分含量相对较低，淀粉含量较高，并存在农药残留超标、加工质量差等问题，导致高产低价、出口受限等市场制约。

正是随着以上问题的出现，林下参栽培逐渐受到重视。林下参（全称为林下山参）是指人工把人参种子撒播到天然林中，任其自然生长，野生抚育短则 10 年，长则 20 年，年限越长，价值越高，在品质上虽不能与野山参相提并论，但远远高于园参。生长年限达 20 年的林下参基本可以达到野山参的水平。林下参的种植会充分利用林地，不破坏资源，提高生态效益。同时，利于林地的立体经营，以林养参，以参护林。

人参为喜阴植物，长期在山林环境中生长，经过系统发育，适应中温带大陆性季风气候，具有喜气候寒凉和湿润、怕强光、忌高温、耐严寒的特性。人参对光照要求很高，前期研究表明，最适应的光照要求为年日照时数为 2200～2700h，日照率为 50%～60%，林分郁闭度为 0.6～0.8。如果光照强度超过全日照的 75%～90%，则生长受到抑制，叶片组织易受破坏，降低光合作用；但光照不足时，植株矮小瘦弱，生长不良。

由于人参对光的要求非常严格，而且光因子又是影响植物光合作用的主导因子，所以近几十年来，科研人员一直开展着以指导园参种植为目的的光环境研究工作[1,2]。随着林下参抚育的发展，如何科学地指导种植林下参已经

成为研究热点。林下自然光环境远比园参栽培下的光环境的组成和变化复杂得多,有了天然林的上层林冠,直接导致林下光可用量的降低,改变了植物水分关系,提高了肥力水平[3]。林下光环境的空间变化远大于其他任何植物的可利用资源,而且自然光易受植被冠层的动态影响,从而使得光因子在众多环境因子中成为最可能限制林下参生长发育的影响因子。所以,林下光环境研究也是科学指导林下参栽培的首要问题[4]。

1.2 研究现状分析

1.2.1 光环境研究现状

林下光环境被人们认为是林下植被生长发育、生态系统作用的决定性因素,它的空间变化远大于其他任何植物的可利用资源。通常光对植物的生态作用包括日照长度、光照强度以及光谱成分的对比关系等成分,其时空变化导致了林下不同位置的光环境的差异[5]。

人参作为喜阴植物,对光的要求十分严格。太阳光的变化、植被冠层的动态影响,使得光因子在众多环境因子中占有极其显著的地位,最有可能成为林下参生长发育的抑制因子。

国内外在森林植被的植物群落生态环境、人工林光环境特征、树木的光合速率及其与植株生长和材积产量的关系、光能在光合作用不同过程中的分配、环境因子和邻体分布对植株的影响、植物耐阴策略及光破坏防御机制等方面有深入的理论研究,并取得了一定的科研成果,但对于林下不同光环境动态变化的特征对林下参生长发育及光合生理影响的相应研究较少,而且现有研究多数为地点选择的定性分析和静态的指导性描述,缺少生态环境尤其是光环境的动态、定量描述。

光照强度是影响生物量积累和植物生长的重要环境因子。光照强度作为光合作用的主导因子,其动态变化直接影响着植物的光合生理变化和光合作用的进程。随着光照强度的减弱,光合作用呈下降趋势,植物体内有机物的积累减少,生长受阻,进而引起生物量下降,更甚者会导致植株饥饿死亡。植物在强光照射下,光合作用也会受到抑制[6]。光照强度的日动态变化是目前人参生长光环境研究的主体。人们的研究内容一方面包括绘制栽培人参区域光强日变化曲线,定性分析光强变化幅度及规律并确定峰值出现的时间,另一方面则是通过搭建荫棚调节透光率,将不同光强日变化与光合作用进程进行综

合定性分析，得到人参的适宜光照强度及其对光合速率的影响。

林内太阳辐射的量效应也是近年来林业及植物生态学领域关注的主要问题之一。地面的太阳辐射由直射辐射和散射辐射组成。人们从森林生态系统对光能的利用及农林间作对光能分配的要求两个角度，展开包括直射辐射、散射辐射及总辐射在内的一系列研究，其中包括：林下光分布模型、林下太阳辐射时空变化理论研究[7,8]，以及辐照特征与林下植物生长、产量效应的关系[7-9]等。

现有的人参光环境研究多是从指导园参栽培出发，以满足园参栽培的理论需要为目的，主要以参棚下的光环境为研究对象，偏重于林下栽参光环境因子动态定量研究和微观的人参光合生理的光适应研究还很少，这直接限制了林下参种植的光环境评价系统的建立，使得林下参栽培缺乏科学的理论指导。

1.2.2 试验数据的挖掘及处理

为了对光环境进行深入研究，需要获取大量有效的试验数据作为分析基础，这其中包括两方面的主要工作，一方面要通过科学的试验设计方法和采用高效的专业仪器设备来采集大量数据信号；另一方面要通过有效的数据处理方法对采集到的大量试验数据进行预处理，去粗取精，提炼最有价值的信息。与数据采集相比，数据处理往往更为重要，有效而实用的数据处理方法能够从大量、高维、非线性信号中挖掘最有用的信息，而这正是进一步分析和预测光环境的重要前提。

现代仪器设备对数据的获取一般都是以信号为载体，因此对作为数据的编码形式——信号的处理技术是现代高科技的一个重要研究领域。从数学的观点来看，信号表示就是利用函数空间的完备正交基将信号（函数）展开，从而获得体现信号内在特征的表示形式。信号分析和处理的经典工具是 Fourier 分析，它的本质是将信号表示成不同的具有固定频率的简单谐波的线性叠加。Fourier 变换是时域到频域相互转化的工具，其实质是将时间 t 作自变量的时域函数 $f(t)$，通过指定的积分运算，转化为频率 ω 作自变量的频域函数 $F(\omega)$，$f(t)$ 和 $F(\omega)$ 是同一种能量信号的两种不同表现形式。$f(t)$ 表示时间信息而隐藏了频率信息，$F(\omega)$ 表示频率信息而隐藏了时间信息。Fourier 变换的优点是用来分析的基函数 $e^{i\omega t}$ 是一组正交函数，易于分解，即易于计算各分量的大小；两个信号在时域中的卷积的 Fourier 变换等于两者变换后频域中的乘积，这给计算带来很大的方便；后期发展的快速 Fourier 变换（FFT），可以在很短的时间内进行谱分析，实测时使实时分析成为可能。

然而,Fourier分析对信号处理的有效性是基于信号的线性和平稳的假设,也就是说,Fourier分析不适用于非线性、非平稳信号,这是因为Fourier分析不能为信号提供时频局部化表示,从而无法揭示非线性、非平稳信号的频率随时间变化的本质。无论是自然界中的信号还是人工产生的信号,几乎没有严格满足线性和平稳性条件的,从而利用Fourier分析进行近似的、不严格的处理将会导致不理想的分析结果。Fourier分析的这种缺陷将为其在信号处理领域的应用带来极大的局限性。

为了克服Fourier分析的局限性,从而更好地处理非线性、非平稳信号,人们对Fourier分析进行了推广乃至根本性的改进[10-12]。所提出的方法,如加窗Fourier变换、小波分析、Wigner-Ville分布等都依赖于Fourier分析,它们试图修改Fourier分析的全局表达,均存在着一定的缺陷。非线性、非平稳信号的本质是频率随时间而变化,因此研究非线性、非平稳信号的关键是瞬时频率的概念。基于这一想法,20世纪90年代中期,美国工程院院士黄锷(N. E. Huang)提出了一种适用于非线性、非平稳信号处理的新方法——Hilbert-Huang变换(HHT)[13-15]。该方法旨在将信号自适应地分解为有限个内蕴模型函数(IMF)和一项没有频率意义的尾项的和,对这些IMF进行Hilbert变换可以得到有物理意义的瞬时频率和时频能量分布。除了尾项,这种分解可以看成将原始信号按自适应基底-IMF进行展开。由于这种分解以局部特征时间尺度为基础,所以适用于非线性、非平稳信号。近些年来,HHT已被成功地应用于地震信号分析、海洋波动数据分析、地球物理探测和结构分析、桥梁及建筑物状况监测等诸多领域[16,17]。然而,该方法缺乏完善的数学理论基础,因此理论分析还存在困难,这使得该方法的应用研究远未得到应有的开发前景。在HHT的数学理论研究方面,近年来也取得了一些成果[18-21]。

基于对瞬时频率的考虑,中山大学许跃生教授等构造了信号空间中一族带有单参数或多参数的标准正交基[22]。该族基底中每一个基函数都具有物理意义的瞬时频率,同时,对比于传统的Fourier基函数,该族基底中的基函数具有非线性的相位,从而有非常值的瞬时频率。因此,称该族基底为非线性Fourier基。进一步地,还对单参数非线性Fourier基底建立了对函数的快速分解算法——快速非线性Fourier展开[23],给出了该算法的收敛阶及计算复杂性分析,并且利用数值实例初步探讨了该族基底相对于传统Fourier基底用于函数表示的优越性。基于非线性Fourier基函数的瞬时频率的特点以及其严格的理论构造和相应的快速分解算法的构建,有理由期望能够在其基础上建立理论完善的函数自适应非线性Fourier逼近方法,并将其应用于非线

性、非平稳信号的处理领域。

在很多应用领域，常常需要处理大量的、结构复杂的高维数据。高维函数的张量积型 Fourier 逼近在理论分析和实际应用中都起着重要的作用。然而，即使是利用快速 Fourier 变换，其计算量也是极其庞大的。为了克服这种局限性，从理论和实际应用两方面引入了高维函数的稀疏 Fourier 逼近[24,25]。该方法在稀疏网格中建立了 Fourier 展开，仅保留了低频成分和必要的高频成分，却与张量积型 Fourier 展开具有相同的逼近阶并极大地降低了计算量。但是，在稀疏 Fourier 逼近中，计算相应的 Fourier 系数仍然是一个富有挑战性的问题，这是因为在此过程中需要计算高维振荡积分。

1.3 本书研究目标和研究内容

1.3.1 研究目标

(1) 通过对林下参种植光环境的深入分析研究，采用基于机器学习和模式识别的方法，构建其多因素预测模型，并在此基础上设计开发一套林下参种植光环境预测与评价系统，通过对现有的地理、气候和植被等信息进行推理计算，最终得到林下参栽培的生态适宜性指数，为林下参的培育生产提供有益的技术支持。

(2) 基于非线性 Fourier 稀疏逼近理论，通过分析推导，提出一种面向自适应数据处理的非线性 Fourier 逼近方法，从而提高对复杂含噪数据信号的高效处理。在此基础上，开发一套具有高效降噪处理功能的光环境数据采集系统。

1.3.2 研究内容

(1) 面向自适应数据处理的非线性 Fourier 分析方法研究。现有研究表明，经典 Fourier 分析由于基底频率为常数这一特性，导致其不能为信号提供时频局部化表示，从而无法揭示非线性、非平稳信号随时间变化的本质。为了更好地处理非线性、非平稳信号，以及提高对此类信号处理方法的适应性，就需要对经典 Fourier 分析方法进行改进设计。本书基于目前在此领域的研究成果，通过分析研究，提出一种适用于非线性、非平稳信号的快速分解算法，将信号用具有物理意义的、非常值的瞬时频率的信号表示。

(2) 林下参种植光环境模式识别与预测方法研究。由于人参的生长对光

照条件要求严格，太阳辐射因子和光合作用因子对林下参的生长发育起着极为重要的作用，同时地理环境因素的差异对林下参的光环境又有着不同的影响，可见，要想根据已掌握的、有限的林下参试验数据对其不同的种植光环境作出稳健而有效的预测，就必须借助有效可靠的模型预测方法。本书针对林下参的种植光环境特点，采用基于机器学习的模式识别与预测方法，提高林下参种植光环境预测模型的稳健性和泛化能力。

(3) 建立树木生长模型及林下参净光合速率预测模型。根据林下参栽培对树种选择的要求，林种选定红松人工林。作为林下参的第一遮阴屏障——树木生长模型对林下参生长光环境的预测与评价具有重要意义。为满足林下光环境预测的需要，本书以红松冠幅、冠长和树高作为其生长指标，分别构建其生长模型。同时，选取林下光环境因子中对林下参生理特性有重要影响的若干指标作为研究变量，试图深入分析、建立林下参光生理特性的多因素模型，进而对其进行模式识别研究，构建林下参净光合速率的自适应预测模型。

(4) 设计林下参种植光环境数据采集系统和光环境预测与评价系统。针对林下参的实际培育特点，设计一套林下参种植光照情况实时监测和采集系统，一方面可以显著降低传统方法的成本，另一方面能实现对林下参光照条件等环境参数的实时监测，同时系统软件集成了自适应数据处理算法，具有良好的降噪功能，为林下参种植光环境的预测与评价提供试验数据基础。

在此基础上，构建林下参光环境预测与评价系统，该系统集成了林下参光环境模型预测算法，同时根据测定得到的林下参种植所处的地理、气候和植被等各方数据，对林下参种植光环境的地域栽培适宜性作出综合评价。

第 2 章　面向自适应数据处理的非线性 Fourier 分析方法

2.1 引　　言

在研究林下参生长光环境时，需要对林下种植光环境因子进行准确测定，如直射辐射 PFDdir、散射辐射 PFDdif、光合有效辐射 PAR 以及净光合速率 Pn 等，这些物理量需要借助光合测定仪器才能进行测量，但是由于被测物理量均为室外检测，受自然环境因素的影响较大。例如，在通过 LI-6400 综合光合仪进行测量时，光合作用或蒸腾作用的物理量经常会出现较大波动，从数据采集显示端的数据曲线显示，测量数据中存在明显的干扰噪声，这些噪声信号如果得不到及时有效的处理，势必对林下参生理特性参数与光环境因子之间的相关性分析造成不良影响。考虑到目前很多数据算法如快速 Fourier 变换、加窗 Fourier 变换、小波分析等算法，针对非线性、非平稳信号的处理都存在一定的缺陷，因此本书针对此种情况，通过深入分析和推导，提出了一种面向自适应数据处理的非线性 Fourier 分析方法。

在应用中，很多数据分析问题都需要处理大规模的高维数据。为了建立有效的高维数据处理方法，本章研究基于非线性 Fourier 基底的 d 维平方可积函数的稀疏逼近问题。这里所利用的非线性 Fourier 基底是文献[23]中所提出的一维非线性 Fourier 基底的张量积。利用解析信号的概念[26-28]，非线性 Fourier 基底具有非线性的瞬时相位和非负的瞬时频率。因此，一维信号的非线性 Fourier 展开不仅具有数学意义，而且具有物理意义。基于这种优势，本书将非线性 Fourier 基底推广到高维情况，并研究高维信号的非线性 Fourier 展开。

建立高维非线性 Fourier 展开的主要困难在于计算非线性 Fourier 展开系数时会产生巨大的计算量。为了克服这一困难，建立非线性 Fourier 展开快速算法时需采用如下技巧。

在经典的 Fourier 展开中，稀疏逼近方法已经被广泛提出[29-31]。稀疏逼近的主要思想是在 Fourier 展开中去除不必要的高频成分，保留低频成分和

必要的高频成分，而这些被保留下的成分足以表示原始信号中的主要信息。基于这一想法，首先将在稀疏网格下建立函数的非线性 Fourier 展开。为了计算非线性 Fourier 展开，不得不计算高维振荡积分。对于经典的稀疏 Fourier 展开的计算问题，出现了很多相关研究成果[32-36]。然后基于这些已有的快速算法计算非线性 Fourier 系数，给出非线性 Fourier 系数与 Fourier 系数之间的关系，将这一重要的关系与文献中提出的计算稀疏 Fourier 展开中系数的快速算法相结合，提出一个用于计算 d 维函数的稀疏非线性 Fourier 展开的快速算法。最后尝试将所得到的理论结果应用于非线性、非平稳数据的处理应用中。

2.2 理论基础

下面给出本章讨论中所需要的一些概念、记号和相关结果。在本章中，$\mathbb{R}$ 表示全体实数，$\mathbb{C}$ 表示全体复数，记 $\mathbb{N}:=\{1,2,\cdots\}$，$\mathbb{Z}:=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$，且 $\mathbb{Z}_+:=\{0,1,2,\cdots\}$。对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，令 $\mathbb{Z}_n:=\{0,1,\cdots,n-1\}$。在复平面上，采用记号 $U:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$。

对 $1\leqslant p<\infty$，令 $L^p(\mathbb{R})$ 表示在实数域 $\mathbb{R}$ 上复可测[37,38]且满足

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}:=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}<\infty$$

的全体函数。

同样，对 $1\leqslant p<\infty$，令 $L^p[0,2\pi]$ 表示在实数域 $\mathbb{R}$ 上复可测，以 2π 为周期且满足

$$\|f\|_{L^p[0,2\pi]}:=\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}<\infty$$

的全体函数。

定义 2.1　设 $f\in L^1(\mathbb{R})$，定义其 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi)=(\Im f)(\xi):=\int_{\mathbb{R}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t\xi}\mathrm{d}t,\quad \xi\in\mathbb{R}$$

定义 2.2　设 $f\in L^1[0,2\pi]$，如果三角级数

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}c_n(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},\quad t\in\mathbb{R}$$

的系数由公式

$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t$$

给定，则称该三角级数为 f 的 Fourier 级数，其系数 $c_n(f)$ 称为 f 的 Fourier 系数。

对任意的 $f\in L^2[0,2\pi]$，并且分别具有 Fourier 系数 $c_n(f)$，$n\in\mathbb{Z}$，有以下 Parseval 等式成立：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,\overline{g(t)}\mathrm{d}t=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)\,\overline{c_n(g)}$$

其中，$\bar{g}$ 表示 g 的复共轭函数。

2.3　非线性 Fourier 展开

本节引入 d 维平方可积函数空间的非线性 Fourier 基底，并且研究非线性 Fourier 展开的收敛性质。

为此，首先回顾一维非线性 Fourier 基底。对于任意的 $a\in U:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$，引入非线性 Fourier 系数 $e_l^a(l\in\mathbb{Z})$ 如下：

$$e_l^a:=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\rho_{l-1}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_{l-1}^a}, & l\in\mathbb{N}\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, & l=0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\rho_{-l-1}^a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_{-l-1}^a}, & l\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+\end{cases}$$

其中，对于任意 $l\in\mathbb{Z}_+$，ρ_l^a 和 θ_l^a 均为 $I:=[0,2\pi]$ 上的实函数，并且：

$$\rho_l^a(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_l^a(t)}:=\sqrt{1-|a|^2}\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-\bar{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}{1-\bar{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right)^l,\quad t\in I$$

对于 $d\in\mathbb{N}$，用 $L^2(I^d)$ 表示 I^d 上的平方可积函数空间，并且赋以通常的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|=\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$。对于任意的 $a\in U$，函数族 $e_l^a(l\in\mathbb{Z})$ 形成了 $L^2(I)$ 的一个标准正交基，可利用基函数的张量积，构造 $L^2(I^d)$ 的一族标准正交基[39-41]。具体来说，对于任意的 $a:=[a_k:k\in\mathbb{Z}_d]\in U^d$，$L^2(I^d)$ 空间的非线性 Fourier 基 $e_l^a(l:=[l_k,k\in\mathbb{Z}_d]\in\mathbb{Z}^d)$ 可表示为

$$e_l^a(t):=\prod_{k\in\mathbb{Z}_d}e_{l_k}^{a_k}(t_k),\quad t=[t_k:k\in\mathbb{Z}_d]\in I^d$$

很明显，当 $a=0$ 时，基函数 $e_l^a(l\in\mathbb{Z}^d)$ 即经典的 Fourier 基函数：