金属板带塑性成形有限元分析

喻海良　崔晓辉　王快社/著

Metal Sheets Plastic Forming-Finite Element Anslysis

科学出版社

金属板带塑性成形有限元分析

喻海良　崔晓辉　王快社　著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了金属板带塑性成形有限元分析。全书涵盖了金属板带轧制生产过程（轧件几何形貌，轧制力能参数，轧件缺陷，如黑边、裂纹、夹杂物）和金属板带在电磁成形的应用（自由胀形、渐进成形、多向磁场力驱动管件胀形），这对读者全面掌握金属板带塑性成形有限元分析有很大的帮助。同时，本书最后一章给出了有限元应用的几个案例，为读者实践上述科学问题提供帮助。理论与实践相结合是本书最大的特点，因此本书具有很强的实用性。

本书可作为高等院校相关专业的本科生、研究生及教师学习教材，也可作为从事机械制造和冶金工程等一般工业及科学研究的工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

金属板带塑性成形有限元分析/喻海良，崔晓辉，王快社著. —北京：科学出版社，2018. 1

ISBN 978-7-03-056365-1

Ⅰ. ①金… Ⅱ. ①喻… ②崔… ③王… Ⅲ. ①金属板-成型-有限元分析 ②金属带-成型-有限元分析 Ⅳ. ①TG14

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 012490 号

责任编辑：赵敬伟／责任校对：邹慧卿
责任印制：肖 兴／封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2018 年 1 月第一次印刷 印张：18 插页：8
字数：362 000

定价：168.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

金属板带塑性成形在国民经济中占据着重要地位，它是实体经济的重要组成部分。随着科学技术的快速发展，金属板带加工已经从简单的成形发展为成形成性一体化。并且，金属板带成形成性研究仍将是今后若干年内的主要发展课题。

在本书中，作者重点介绍了采用有限元方法模拟板带轧制制备及后续板带在电磁成形中的应用。应该说，如果人们掌握了这两个方面的数值模拟，将完全有能力解决所有板带塑性成形的问题，比如中厚板、薄带材的轧制制备，以及这些板材在汽车制造、航空航天领域的零部件制造。

本书第 1 章简单介绍了显式有限元方法；第 2 章重点介绍了热轧过程有限元模拟，以及连铸坯开坯轧制轧件头尾形状、轧件边部位置跟踪问题、中厚板轧制过程温度场、几何形状变厚、热连轧过程中轧制力问题；第 3 章主要介绍了厚板轧制过程中表面裂纹演变的有限元模拟，通过模拟结果给出了表面裂纹消除的主要机制；第 4 章重点介绍了厚板轧制过程中内部裂纹的演变行为，其中通过表面预制粗糙度的方式分析了不同情况下轧件内部残留孔隙的原因；第 5 章重点介绍轧制过程中轧件内部夹杂物的演变行为，分析了不同工艺参数、夹杂物种类等对夹杂物演变的影响；第 6 章重点介绍了板带电磁脉冲自由胀形的二维有限元模拟，分析了板带厚度的变化规律；第 7 章介绍板带电磁脉冲自由胀形的三维有限元模拟，并分析了胀形过程板带温度场、电磁场等的变化规律；第 8 章为板带电磁脉冲渐进成形有限元仿真，分别介绍了凹模的电磁脉冲渐进成形和凸模的电磁脉冲渐进成形；第 9 章分析了径向力助推筒形件电磁渐进复合拉深；第 10 章对板带多向磁场力驱动管件胀形进行了研究。在本书的结尾，第 11 章，作者给出了几个采用有限元分析板带变形的实际操作案例。

本书第 2~5 章由喻海良撰写，第 6~10 章由崔晓辉撰写。第 1 章和第 11 章由喻海良、王快社共同撰写，全书由喻海良统稿。本书研究结果曾得到东北大学刘相华教授、华中科技大学莫健华、李建军教授的指导，获得了国家自然科学基金、教育部博士点新教师基金、澳大利亚伍伦贡大学校长基金等的资助，在此一并感谢。本书难免存在不足之处，期待各位读者批评指正。

喻海良

2017 年 11 月 30 日

目　　录

第 1 章　有限元方法基础及其发展

1.1　显式动力学有限元方法基本理论

把某一瞬间物体在空间占据的区域定义为该物体的构形。如果已知 t 时刻以前所有时刻构形的力学特性，而研究 t 时刻构形的变形问题，那么可以把初始构形 V_0 或 t 时刻以前任一时刻的构形作为参考构形。

物体质点的位置，可以用质点在坐标系中的位置坐标表示。在参考坐标系中，设在 $t=t_0=0$ 时刻物体任一质点 a 的位置坐标为 (X, Y, Z)(记为 $X_i(i=1,2,3)$)，此时的构形为初始构形，记为 V_0。此后任一时刻 t，物体运动到一个新位置，质点 a 的位置坐标从 X_i 改变为 (x, y, z)(记为 $x_i(i=1,2,3)$)。显然 x_i 是 X_i 和时间 t 的函数，即

$$x_i = x_i(X_a, t) \tag{1.1}$$

当 $t=0$ 时，初始条件变为

$$\begin{aligned} x_i(X_a, 0) &= X_a \\ \dot{x}_i(X_a, 0) &= V_i(X_a) \end{aligned} \tag{1.2}$$

式中，V_i 为初始速度；变形后构形记为 V。

假设物体及其运动和变形都是连续的，则 V_0 中每一质点 X_i 仅与 V 中一个质点 x_i 对应，反之亦然。

设在 t 时刻的物体构形为 V，其表面面积为 S，$S=S_p+S_c+S_u$，其中，S_p 为外力 p_i 已知的表面；S_c 是与另一个物体接触的表面，记接触表面力为 q_i；S_u 为位移约束表面，其位移是给定的。物体 V 发生弹塑性变形时满足下列基本方程：

运动方程

$$\sigma_{ij,j} + b_i - \rho a_i - \gamma v_i = 0, \quad 在\ V\ 中 \tag{1.3}$$

应力边界条件

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \quad 在\ S_p\ 上 \tag{1.4}$$

$$\sigma_{ij} n_j = q_i, \quad 在\ S_c\ 上 \tag{1.5}$$

位移边界条件

$$u_i = \bar{u}_i, \quad 在\ S_u\ 上 \tag{1.6}$$

式中，γ 为阻尼系数；$\bar{u}_i$ 是给定的位移。

假设由运动学容许的任一虚速度场 $\delta v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ 在微小时间 $\mathrm{d}t$ 内引起的相应虚位移为 $\delta u_i(x_1, x_2, x_3, t)$。上述运动方程和应力边界条件可集合成如下积分形式：

$$\int_V (\rho a_i + \gamma v_i - \sigma_{ij,j} - b_i)\delta v_i \mathrm{d}V + \int_{S_p} (\sigma_{ij} n_j - p_i)\delta v_i \mathrm{d}S + \int_{S_c} (\sigma_{ij} n_j - q_i)\delta v_i \mathrm{d}S = 0 \tag{1.7}$$

在式 (1.3) 和式 (1.7) 中，a_i 是加速度；$-\rho a_i$ 为作用于质点上的惯性力；$-\gamma v_i$ 为阻尼力。

$$\delta \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i}) \tag{1.8}$$

利用高斯散度定理和式 (1.8)，有

$$\int_V \sigma_{ij,j} \delta v_i \mathrm{d}V = \int_S \sigma_{ij} n_j \delta v_i \mathrm{d}S - \int_V \sigma_{ij} \delta \dot{e}_{ij} \mathrm{d}V \tag{1.9}$$

将式 (1.9) 代入式 (1.7) 得

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \dot{e}_{ij} \mathrm{d}V = \int_V b_i \delta v_i \mathrm{d}V + \int_{S_p} p_i \delta v_i \mathrm{d}S + \int_{S_c} q_i \delta v_i \mathrm{d}S - \int_V \rho a_i \delta v_i \mathrm{d}V - \int_V \gamma v_i \delta v_i \mathrm{d}V \tag{1.10}$$

式 (1.10) 是弹塑性问题的动力虚功率方程。

把整个物体离散成若干个有限单元，对任一单元 e 由虚功率方程建立有限元方程，所有单元方程的集合即可形成整体有限元方程。对任一单元 e，选取其形函数矩阵为 $[N]$，单元内任一点的位移、速度和加速度向量分别记为 $\{u\}$、$\{v\}$ 和 $\{a\}$，单元节点位移、速度和加速度向量分别记为 $\{u\}^e$、$\{v\}^e$ 和 $\{a\}^e$，对三维问题有

$$\begin{cases} \{u\} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \{v\} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \{a\} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\{u\} = [N]\{u\}^e, \quad \{v\} = [N]\{v\}^e, \quad \{a\} = [N]\{a\}^e \tag{1.12}$$

$$\{b\} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1.13}$$

$$\{p\} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1.14}$$

$$\{q\} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1.15}$$

并记

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1.16}$$

$$\{\dot{e}\} = \begin{bmatrix} \dot{e}_{11} & \dot{e}_{22} & \dot{e}_{33} & 2\dot{e}_{12} & 2\dot{e}_{23} & 2\dot{e}_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1.17}$$

任一点的应变速率列阵 $\{\dot{e}\}$ 中的分量 $\dot{e}_{ij}$ 为

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(v_{i,j} + v_{j,i}\right) \tag{1.18}$$

从式 (1.18) 和式 (1.12) 可得出

$$\{\dot{e}\} = [B]\{v\}^{e} \tag{1.19}$$

这样，由式 (1.10) 可写出单元 e 的动力虚功率方程的矩阵式为

$$\begin{aligned}
&\int_{V^e} (\{\delta v\}^e)^{\mathrm{T}} [B]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} \,\mathrm{d}V \\
=&\int_{V^e} (\{\delta v\}^e)^{\mathrm{T}} [N]^{\mathrm{T}} \{b\} \,\mathrm{d}V + \int_{S_p^e} (\{\delta v\}^e)^{\mathrm{T}} [N]^{\mathrm{T}} \{p\} \,\mathrm{d}S \\
&+ \int_{S_c^e} (\{\delta v\}^e)^{\mathrm{T}} [N]^{\mathrm{T}} \{q\} \,\mathrm{d}S - \int_{V^e} (\{\delta v\}^e)^{\mathrm{T}} [N]^{\mathrm{T}} \rho [N] \{a\}^e \,\mathrm{d}V \\
&- \int_{V^e} (\{\delta v\}^e)^{\mathrm{T}} [N]^{\mathrm{T}} \gamma [N] \{v\}^e \,\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\int_{V^e} \rho [N]^{\mathrm{T}} [N] \,\mathrm{d}V \{a\}^e + \int_{V^e} \gamma [N]^{\mathrm{T}} [N] \,\mathrm{d}V \{v\}^e \\
=&\int_{V^e} [N]^{\mathrm{T}} \{b\} \,\mathrm{d}V + \int_{S_p^e} [N]^{\mathrm{T}} \{p\} \,\mathrm{d}S + \int_{S_p^e} [N]^{\mathrm{T}} \{q\} \,\mathrm{d}S - \int_{V^e} [B]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} \,\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{1.20}$$

式 (1.20) 即单元有限元方程。将单元方程集合，得到整体有限元方程

$$\begin{aligned}
&\sum \left(\int_{V^e} \rho [N]^{\mathrm{T}} [N] \,\mathrm{d}V\right) \left\{\ddot{U}\right\} + \sum \left(\int_{V^e} \gamma [N]^{\mathrm{T}} [N] \,\mathrm{d}V\right) \left\{\dot{U}\right\} \\
=&\sum \int_{V^e} [N]^{\mathrm{T}} \{b\} \,\mathrm{d}V + \sum \int_{S_p^e} [N]^{\mathrm{T}} \{p\} \,\mathrm{d}S \\
&+ \sum \int_{S_c^e} [N]^{\mathrm{T}} \{q\} \,\mathrm{d}S - \sum \int_{V^e} [B]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} \,\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{1.21}$$

记

$$[M] = \sum \int_{V^e} \rho [N]^{\mathrm{T}} [N] \,\mathrm{d}V \tag{1.22}$$

$$[C]=\sum\int_{V^e}\gamma[N]^{\mathrm{T}}[N]\,\mathrm{d}V \tag{1.23}$$

$$\{P\}=\sum\int_{V^e}[N]^{\mathrm{T}}\{b\}\,\mathrm{d}V+\sum\int_{S_p^e}[N]^{\mathrm{T}}\{p\}\,\mathrm{d}S+\sum\int_{S_c^e}[N]^{\mathrm{T}}\{q\}\,\mathrm{d}S \tag{1.24}$$

$$\{F\}=\sum\int_{V^e}[B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\,\mathrm{d}V \tag{1.25}$$

则式 (1.21) 可写成

$$M\ddot{u}+C\dot{u}+F=P \tag{1.26}$$

式 (1.26) 为显式动力学有限元的基本方程 [1−5]。其中，M 为质量矩阵；C 为阻尼矩阵；F 为内力矢量；P 为外载荷矢量；$\dot{u}$ 为节点速度矢量；$\ddot{u}$ 为节点加速度矢量。

采用中心差分法求解方程 (1.26)，其中，t_n 时刻的离散速度、加速度分别为

$$\dot{u}_n=\frac{1}{2\Delta t}(u_{n+1}-u_{n-1}) \tag{1.27}$$

$$\ddot{u}_n=\frac{1}{\Delta t^2}(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}) \tag{1.28}$$

由式 (1.26)~ 式 (1.28) 得到各离散点时间位移的递推公式

$$u_{n+1}=\left[M+\frac{\Delta t}{2}C\right]^{-1}\left[\Delta t^2(R_n-F_n)+2Mu_n-\left(M-\frac{\Delta t}{2}C\right)u_{n-1}\right] \tag{1.29}$$

中心差分法在一定的条件下才是稳定的，即求解具体问题时，时间步长必须小于由该问题求解方程性质所决定的临界时间步长 $\Delta t_{\min}$，否则算法不稳定。临界时间步长根据 Courant-Friedrichs-Levy 稳定性准则求得

$$\Delta t_{\min}=\frac{2}{\omega_{\max}}=\frac{l}{c} \tag{1.30}$$

其中，$\omega_{\max}$ 为系统的最大固有频率；l 为单元特征长度，等于单元中任意两节点间最小距离；c 为材料中的声速，与材料的性质有关，对于三维单元，材料中的声速为

$$c=\sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \tag{1.31}$$

其中，E 为杨氏模量；ν 为泊松比；ρ 为材料密度。

1.2 弹塑性本构方程

轧制过程中轧件变形行为是一种典型的大塑性变形，轧件内各点的变形是不均匀的。在某一时刻，轧件内有的点或区域已发生塑性变形，有的点或区域可能仍

处于弹性状态，还有的点或区域可能处于从弹性变形到塑性变形的过渡状态。对于这类问题，增量形式的普朗特–罗伊斯塑性流动理论 [6] 认为：物体内任一点的总应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 包括弹性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{e})}$ 和塑性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{p})}$ 两部分：

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{e})} + \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{p})} \tag{1.32}$$

式中，弹性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{e})}$ 和应力增量 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ 之间的关系由广义胡克定律来确定，即

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{e})} = \frac{1+\mu}{E}\mathrm{d}S_{ij} + \frac{1-2\mu}{E}\delta_{ij}\mathrm{d}\sigma \tag{1.33}$$

式中，

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_{ij} = \mathrm{d}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\mathrm{d}\sigma \\ \mathrm{d}\sigma = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\sigma_{kk} \end{cases} \tag{1.34}$$

对塑性变形部分，按照莱维–米泽斯增量理论，其应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(p)}$ 和应力偏量 S_{ij} 之间的关系可写为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{(\mathrm{p})} = \mathrm{d}\lambda S_{ij} \tag{1.35}$$

式中，$\mathrm{d}\lambda$ 是比例因子，对各向同性硬化材料而言，它是与载荷和位置坐标有关的函数。

把式 (1.33) 和式 (1.35) 代入式 (1.32)，则有

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\mathrm{d}S_{ij} + \frac{1-2\mu}{3E}\delta_{ij}\mathrm{d}\sigma_{kk} + \mathrm{d}\lambda S_{ij} \tag{1.36}$$

式 (1.36) 就是弹塑性变形的本构方程，但该方程只适用于加载过程和中性过程。在卸载过程中，应力和应变之间的关系按弹性规律确定。由此，引入一个载荷性质判断因子 a^*。于是，按普朗特–罗伊斯塑性流动理论建立的适用于加载过程、中性过程和卸载过程的本构关系为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\mathrm{d}S_{ij} + \frac{1-2\mu}{3E}\delta_{ij}\mathrm{d}\sigma_{kk} + a^*\mathrm{d}\lambda S_{ij} \tag{1.37}$$

式 (1.37) 是考虑到加载路径的弹–塑性本构关系 [6]。

设屈服函数 $f(\sigma_{ij}) = c$(c 是屈服面) 给定，并采用米泽斯屈服条件，则有

$$f(\sigma_{ij}) = S_{ij}S_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_i^2$$

根据计算所得的 $\mathrm{d}f$，载荷性质判断因子 a^* 有不同取值

$$\begin{cases} \mathrm{d}f > 0 \text{ 或 } \mathrm{d}\sigma_i > 0, & \text{加载过程}, a^* = 1 \\ \mathrm{d}f = 0 \text{ 或 } \mathrm{d}\sigma_i = 0, & \text{中性过程}, a^* = 0 \\ \mathrm{d}f < 0 \text{ 或 } \mathrm{d}\sigma_i < 0, & \text{卸载过程}, a^* < 0 \end{cases} \tag{1.38}$$

在弹–塑性有限元方法中，需要用到式 (1.37) 的逆形式。根据普朗特–罗伊斯塑性流动理论，体积变形是完全弹性的。平均应力的增量 $\mathrm{d}\sigma_{kk}$ 和平均应变的增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{kk}$ 之间的关系为

$$\mathrm{d}\sigma_{kk} = 3K\mathrm{d}\varepsilon_{kk} = \frac{E}{1-2\mu}\mathrm{d}\varepsilon_{kk} \tag{1.39}$$

其中，K 为体积弹性模量，$K = \dfrac{E}{3(1-2\mu)}$。由此，式 (1.37) 可写成

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{kk} = \frac{1+\mu}{E}\mathrm{d}S_{ij} + a^*\mathrm{d}\lambda S_{ij} \tag{1.40}$$

上式变为

$$\mathrm{d}S_{ij} = \frac{E}{1+\mu}\left[\mathrm{d}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{kk} - a^*\mathrm{d}\lambda S_{ij}\right] \tag{1.41}$$

1.3　接触问题的罚函数法

轧制过程中，轧件与轧辊之间非线性接触问题是分析轧件变形行为需要面临的一个重要问题。由于轧制过程中轧件发生弹塑性变形行为，所以其为弹塑性接触问题。轧制过程中的接触问题属于不定边界问题，既有由于接触面积变化和接触压力分布变化而产生的非线性，也有由于摩擦作用产生的非线性。对于轧制过程接触问题的求解方法有很多，本书均采用罚函数法 [7]。为了简化分析过程，用有限元法分析轧制过程接触问题时采用如下基本假设：

(1) 接触表面几何上是光滑连续的曲面；

(2) 滑动区域接触表面摩擦作用服从库仑定律；

(3) 接触表面的弹性流体动力润滑作用通过摩擦系数来体现。

1.3.1　接触问题的弱形式

将接触面约束条件引入势能泛函，构造出如下形式的泛函：

$$\pi = U - W + G \tag{1.42}$$

其中，U 为应变能；W 为外力功；G 为接触面约束条件对应的约束项。对于上述泛函的极值条件为

$$\delta\pi = \delta U - \delta W + \delta G = 0 \tag{1.43}$$

其中

$$\delta U = \int_V (\delta\varepsilon)^{\mathrm{T}}\sigma^{k+1}\mathrm{d}V \tag{1.44}$$

$$\delta W = \int_V (\delta u)^{\mathrm{T}} f^{k+1}\mathrm{d}V + \int_{\Gamma_c} (\delta u)^{\mathrm{T}} t^{k+1}\mathrm{d}\Gamma + \int_V (\delta u)^{\mathrm{T}}\rho\ddot{u}\mathrm{d}V \tag{1.45}$$

采用罚函数法将接触面约束条件引入泛函，此时

$$G = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_c} (\mathrm{g}'^{k+1}) T \Lambda' \mathrm{g}'^{k+1} \mathrm{d}\Gamma \tag{1.46}$$

式中

$$\Lambda' = \mathrm{diag}(a_1', a_2', a_3') \tag{1.47}$$

其中，a_1'、a_2' 和 a_3' 为罚函数，为设定常数。于是

$$\delta G = \int_{\Gamma_c} (\delta \mathrm{g}')^{\mathrm{T}} \Lambda' \mathrm{g}'^{k+1} \mathrm{d}\Gamma \tag{1.48}$$

容易证明

$$\bar{F}'^{\mathrm{I}} = -\bar{F}'^{\mathrm{II}} = -\Lambda' g' \tag{1.49}$$

对于无摩擦的接触状态，有

$$a_1' = a_2' = 0 \tag{1.50}$$

对于有摩擦的滑动状态，根据库仑定律可得

$$a_i' = -\mu a_3' \mathrm{g}_3' (u_i'^{\mathrm{I}} - u_i'^{\mathrm{II}}) / u'^{\mathrm{T}} \quad (i = 1, 2) \tag{1.51}$$

采用罚函数法求解接触问题时，如果不增加问题的自由度，使求解方程的系数矩阵保持正定，就能够很好地和显式数值积分方法求解包含惯性项的接触问题的方程相协调。

1.3.2 罚函数法的有限元方程

轧制过程中，轧件与轧辊之间的接触界面不仅区域大小是变化的，而且存在前滑区、黏着区和后滑区。因此，对物体 I 和 II (轧辊和轧件) 进行有限元离散后，接触面两边 Γ_c^{I} 和 Γ_c^{II} 上的单元和节点也是不断变化的。将单元处在接触面上的面 (或边) 称为接触块。将被动接触块上的节点 P 和主动接触块上与其接触的 Q 点构成一个接触对。它们在 t_{k+1} 时刻的坐标和位移分别是 x_P^{k+1}，u_P^{k+1} 和 x_Q^{k+1}，u_Q^{k+1}。现假设主动接触块是二维 4 节点单元，则有

$$x_Q = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi_Q, \eta_Q) x_i \tag{1.52}$$

$$u_Q = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi_Q, \eta_Q) u_i \tag{1.53}$$

且有

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad u^{k+1} = u^k + \Delta u^k \tag{1.54}$$

式 (1.52) 和式 (1.53) 中，N_i 是单元的插值形函数；ξ_Q 和 η_Q 是 Q 点在接触块中的自然坐标；x_Q 和 u_Q 分别为整体坐标系中点 Q 的坐标和位移矢量；x_i 和 u_i 分别为整体坐标系中点 Q 所在接触块第 i 个节点的坐标和位移。

对于接触点对 P 和 Q 间的相对位移可以表示为

$$u_P - u_Q = N^C d^C \tag{1.55}$$

其中

$$N^C = [I_{3\times 3} \ \ -N_1 \ \ -N_2 \ \ -N_3 \ \ -N_4] \tag{1.56}$$

$$d^C = [u_P^{\mathrm{T}} \ \ -u_1^{\mathrm{T}} \ \ -u_2^{\mathrm{T}} \ \ -u_3^{\mathrm{T}} \ \ -u_4^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{1.57}$$

$$N_i = N_i I_{3\times 3} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1.58}$$

将上式转换到局部坐标系中，即

$$u'_P - u'_Q = T^{\mathrm{T}}(u_P - u_Q) = T^{\mathrm{T}} N^C d^C \tag{1.59}$$

式中，斜体 T 是两种坐标系之间的转换矩阵。

1. 黏着接触状态

摩擦系数增加、轧制变形区形状 l/h 减小等，均会使轧件与轧辊之间黏着区面积增加。对于轧件与轧辊之间黏着区接触问题求解的有限元方程如下所示。

将式 (1.59) 代入式 (1.49)，局部坐标系中一个接触点对的接触力引起的等效节点力向量为

$$\bar{F}'^{k+1} = -\Lambda' T^{\mathrm{T}} N^C d^C - \Lambda' d' \tag{1.60}$$

进一步可以得到整体坐标系下接触力等效节点力向量

$$\bar{F}^{k+1} = -(N^C)^{\mathrm{T}} T \Lambda' T^{\mathrm{T}} N^C d^C - (N^C)^{\mathrm{T}} T \Lambda' d' \tag{1.61}$$

简写为

$$\bar{F}^{k+1} = -K_C d^C + \tilde{F}^{k+1} \tag{1.62}$$

其中

$$K_C = (N^C)^{\mathrm{T}} T \Lambda' T^{\mathrm{T}} N^C \tag{1.63}$$

$$\tilde{F}^{k+1} = -(N^C)^{\mathrm{T}} T \Lambda' d' \tag{1.64}$$

如果在计算中取 $a'_1 = a'_2 = a'_3 = a$，则式 (1.63) 和式 (1.64) 可以简化为

$$K_C = a(N^C)^{\mathrm{T}} N^C \tag{1.65}$$

$$\tilde{F}^{k+1} = -a(N^C)^{\mathrm{T}} T d' \tag{1.66}$$