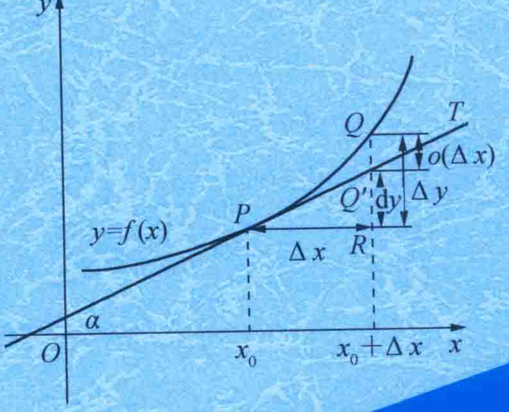
21世纪应用型本科院校规划教材

高等数学

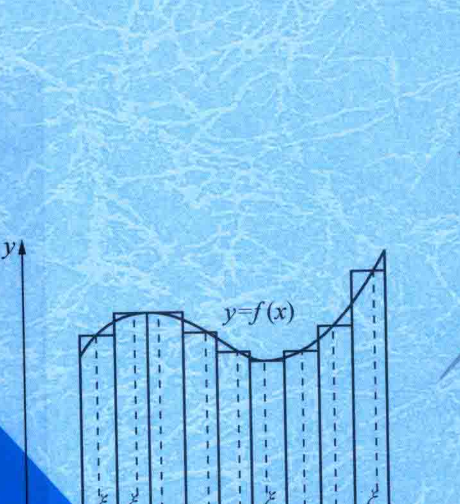
Advanced Mathematics

上

主 编 陈 静 戴绍虞



3



南京大学出版社

21世纪应

高等数学 上

主 编 陈 静 戴绍虞
副主编 徐海燕 王丙均 林洪伟 吴凤干 王奋平

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上 / 陈静，戴绍虞主编. — 南京：南京大学出版社，2017.9

(21世纪应用型本科院校规划教材)

ISBN 978-7-305-19241-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②戴… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 202212 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 高等数学(上)
主　　编 陈　静　戴绍虞
责任编辑 陈亚明　王南雁　　编辑热线 025-83593947

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 南京大众新科技印刷有限公司
开　　本 787×1092 1/16 印张 16.75 字数 365 千
版　　次 2017 年 9 月第 1 版 2017 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-19241-8
定　　价 38.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025)83594756

前　言

随着我国现代化进程的飞速发展，教育理念发生了深刻变化。我国的高等教育已经从精英教育转变为大众化教育。一大批应运而生的应用型本科以及民办本科院校如雨后春笋般地茁壮成长，每年都有大批学生进入这一层次的高等院校进行学习。层次的不同自然会带来教学内容和教学模式的不同，为了适应这一变化，我们总结了多年来在教授这一类学生过程中的教学经验和实施的教学改革，并在此基础上，分析了这一层次学生的培养目标和教学特点，并结合国内外同类层次相应课程的成功经验，撰写了本教材。

本教材有如下几个方面的特点：

1. 贯彻“强化概念，淡化理论，加强计算，学以致用”的原则，努力使学生学会应用数学的思想和方法去处理工程实践中遇到的困难和问题。因而在例题及习题的选择上，既选取了丰富典型的例题，又选取了一些实际应用中鲜活有趣的例子，如在导数的应用、微分方程等内容教学中，让学生在兴趣中学会概念在实际中的转化、理论在实际中的应用。

2. 一元微积分和多元微积分是高等数学的基本内容，它们的理论体系和逻辑性在大学生素质教育中起到了不可或缺的作用。但我们强调概念的实际背景、几何直观，理论推导力求简单明了，特别对冗长或难度较大的部分基础理论推证，一般不证明或打“*”号处理。

3. 注意与中学数学教学改革的衔接。中学数学教学改革力度加大，造成了现有高等数学教材内容与中学数学教学内容有不少脱节和重复。本教材注意到了这点，比如增加了现行中学教材未列入的“极坐标”，深化了中学数学中已讲过的“极限”、“导数”和“向量”等内容，较好地解决了中学数学与高等数学教学的衔接问题。

4. 为了加强应用和适应众多的工科专业，我们在编写教材时对一些内容打了

“＊”号，这些打“＊”号的内容，如“极限的精确定义”、“曲率”、“方向导数与梯度”、“三重积分”、“曲面积分”以及“傅里叶级数”等，或降低要求，或供教师针对授课学生的专业需要进行取舍。

本教材的基本教学时数不得低于120学时，讲解加“＊”号内容需要另外安排课时。本教材可作为普通高等学校工科类应用型本科、民办本科各专业的“高等数学”教材，在去掉“＊”号后，也可作为一些专科学生的“高等数学”教材。

本教材分上、下两册，共十二章，其中第一章由戴绍虞编写，第二章、第十章由徐海燕编写，第三章、第九章由王丙均编写，第四章、第八章由陈静编写，第五章、第六章由林洪伟编写，第七章、第十二章由吴凤干编写，第十一章由陈凌编写。上册的附录一由陈静编写，下册的附录一由秦仁杰编写，上下册的附录二由王奋平编写。上册由陈静、戴绍虞负责统稿，下册由陈静、陈凌负责统稿。南京大学出版社对此书的出版给予了极大的支持，编者在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中缺点和不足在所难免，诚恳期待专家和读者不吝赐教。

编　者

2017年7月于南京

目　录

√参考答案
√学习资料

微信扫一扫

第一章　函数与极限

函数是数学最基本的概念之一，是高等数学的研究对象，它在微积分中扮演着不可缺少的角色．而极限的方法是微积分研究问题的基本方法．本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质、应用等．

第一节　函　数

一、集合

1．集合

具有某种特定性质的事物的全体，称为**集合**，组成这个集合的事物称为集合的**元素**．通常用大写字母 A,B,C 等表示集合，而用小写字母 a,b,c 等表示元素．若元素 x 在集合 A 中就说 x 属于 A，记为 $x\in A$；否则说 x 不属于 A，记为 $x\notin A$．一般表示集合的方法有两种：其一是列举法，就是把集合的元素一一列举出来表示，例如：由元素 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 组成的集合 A，记为 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$；其二是描述法，若元素 $x\in B$ 当且仅当 x 具有性质 P，则记为 $B=\{x|x$ 具有性质 $P\}$．

由数组成的集合称为**数集**．通常用 $\mathbf{N}$ 表示全体**自然数**（即非负整数）**的集合**；用 $\mathbf{Z}$ 表示全体**整数的集合**；用 $\mathbf{Q}$ 表示全体**有理数的集合**；用 $\mathbf{R}$ 表示全体**实数的集合**．如果没有特别声明，本书提到的数都是实数．

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集合**，记为 $A\subseteq B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）．例如：$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$．若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称为 A 与 B **相等**，记为 $A=B$．

不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$．

2．区间

区间是用得较多的数集．下设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$．数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**，记为 (a,b)；数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记为 $[a,b]$；同理定义**半开区间**：$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$．以上这些区间都称为**有限区间**，其中 a,b 叫作这些区间的**端点**，$b-a$

叫作这些区间的**区间长**. 另外我们还可以定义如下**无限区间**:

$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$,$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$,$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$,$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$和$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}$.

3. 邻域

邻域也是常用的概念之一. 设 a,δ 是两个实数且 $\delta>0$,数集 $\{x||x-a|<\delta\}$(即开区间 $(a-\delta,a+\delta)$)称为**点 a 的 δ 邻域**,记为 $U(a,\delta)$,其中 a 叫作邻域 $U(a,\delta)$ 的**中心**,δ 叫作邻域 $U(a,\delta)$ 的**半径**. $U(a,\delta)$ 从数轴上看:就是与点 a 的距离小于 δ 的一切点的集合,因而这是一个有几何背景的概念,可以被推广到二维以上的直角坐标系中去.

去掉中心的邻域称为**去心邻域(或空心邻域)**,例如:邻域 $U(a,\delta)$ 去掉中心 a 之后就是以 a 为中心,以 δ 为半径的去心邻域(或空心邻域),记为 $\overset{o}{U}(a,\delta)$,即 $\overset{o}{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

二、函数的概念

在同一自然现象或社会生活活动中,往往有几个量同时变化着,但它们并不是孤立变化的,而是相互间存在着确定的依赖关系. 当一个量变化时,另一个量也随着发生变化. 这些量之间的关系就是数学上所谓的函数关系.

我们把在某一变化过程中可以取不同数值的量称为**变量**;在某一变化过程中始终保持不变的量称为**常量**(或常数),通常用字母 a,b,c 等表示常量,用字母 x,y,z,t 等表示变量. 看如下三个例子:

例 1 在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,开始下落的时刻 $t=0$,落地的时刻 $t=T$,则 s 与 t 之间的对应关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$,其中 s,t 是变量,而重力加速度 g 是常量. 实际上,当 t 在闭区间 $[0,T]$ 任意取一个数值时,按上式 s 就有唯一确定的数值与之对应.

例 2 考虑球体的体积 V 与它的半径 r 的关系为 $V=\frac{4\pi}{3}r^3$,当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内变化,体积 V 也随之变化,当 r 有确定值时,球体的体积 V 也就被唯一确定. 在这里 r 和 V 是变量,$\frac{4\pi}{3}$ 和 3 是常量.

例 3 若某工厂每年最多生产某产品 500 吨,固定成本 160 万元,每生产 1 吨该产品成本增加 5000 元,则每年该产品的总成本 C 万元与年产量 x 吨的关系为

$$C=160+0.5x,\qquad 0\leqslant x\leqslant 500.$$

当 x 取 0 到 500 之间的任意一个数值时,由上式可计算 C 的值.

上述三例的实际意义、表达方式虽不相同，但具有共同之处：都表达了两个变量在变化过程中的依赖关系. 函数就是研究各个变量之间确定性依赖关系的数学模型. 德国数学家狄利克雷(Dirichlet, 1805—1859)提出了如下传统的函数概念.

定义 1　设在某一变化过程中，存在两个变量 x 和 y，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集. 如果对于任意的 $x\in D$，通过对应法则 f，变量 y 有唯一确定的实数与之对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域.

在函数的模型中，自变量每输入一数值 x 时，都会使因变量输出唯一数值 y，这个输出的数值 y 称为函数 f 在 x 处的**函数值**，记为 $f(x)$. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 $f(D)$，即 $f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$.

注意　(1) 函数的定义域 D 与对应法则 f 是确定函数的**两个要素**，与自变量、因变量选用的字母无关. (2) 两个函数只有在定义域相同、对应法则相同时，它们才是同一个函数.

函数的定义域的确定基本上分两种情形：其一，若函数是由抽象的算式表达，且函数不与实际问题相联系，那么此函数的定义域就是使得算式有意义的自变量的取值范围；其二，若函数是与实际问题相联系的，那么此函数的定义域应根据实际问题的意义来确定.

例 4　求函数 $f(x)=\lg\dfrac{x}{x-1}+\sqrt{x-3}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，必须

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x-1}>0,\\ x-3\geqslant 0,\end{cases}\qquad \text{即}\begin{cases}x>1\text{ 或 }x<0,\\ x\geqslant 3.\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $[3,+\infty)$.

例 5　某商场销售某种商品 5000 件，每件原价 50 元，当销售量在 3000 件内时，按原价销售；超过 3000 件后的该商品，打八折出售，这样一来，销售收入 R 与销售量 Q 的函数关系为

$$R=\begin{cases}50Q, & 0\leqslant Q\leqslant 3000,\\ 150000+40(Q-3000), & 3000<Q\leqslant 5000,\end{cases}$$

此函数的定义域为 $[0,5000]$.

一般说来，我们把平面直角坐标系上的点集 $C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**. 几何上一般为平面上的一条曲线.

常用函数表示方法有三种，即**解析法**、**列表法**和**图像法**. 这些在中学里大家已经熟悉了. 下面再举几个函数的例子.

例 6　函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$，定义域 $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，值域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 它的图形如图 1－1 所示.

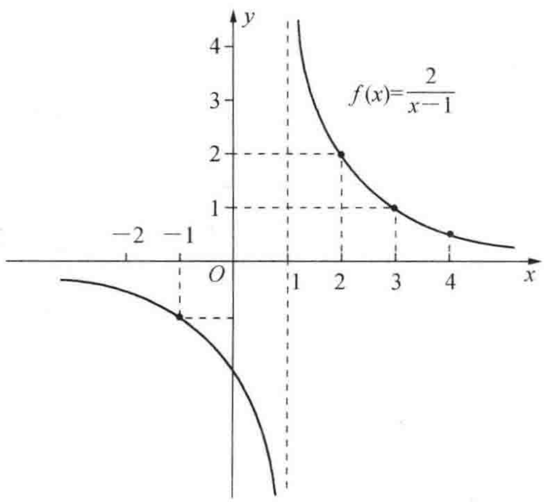


图 1－1

例 7　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $[0,+\infty)$，它的图形如图 1－2 所示.

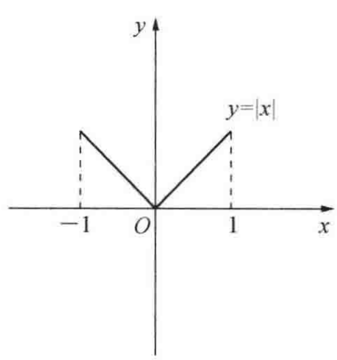


图 1－2

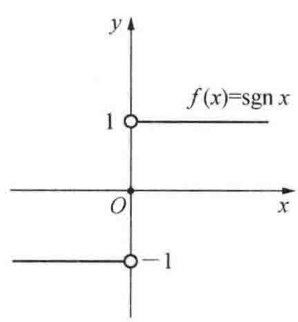


图 1－3

例 8　符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$ 定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $\{-1,0,1\}$，它的图形如图 1－3 所示.

在生产实践和科学技术的实例中，我们经常遇到一些类似于例 5、例 7、例 8 的函数，这类函数在定义域的不同取值范围内，用不同的解析式表示，这样的函数称为**分段函数**.

例 9　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1,\\ x^2-1, & -2\leqslant x<-1 \text{ 或 } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的定义域及 $f(0)$，$f(2)$ 的值.

解　它的图形如图 1－4 所示. $f(x)$ 的定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$，$f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$，$f(2)=2^2-1=3$.

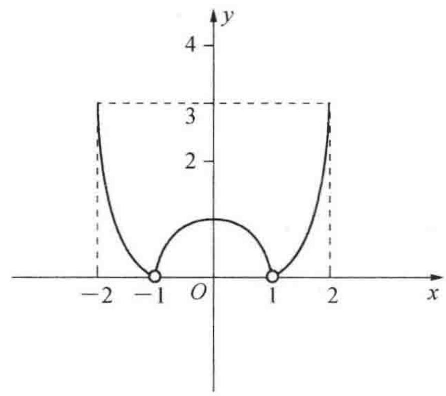


图 1－4

通常如定义 1 的函数称为**单值函数**. 如果给定一个对应法则，按这个对应法则，对每一个 $x\in D$，变量 y 有确定的实数与之对应，但这个 y 不总是唯一的，这种对应法则所确定变量 y 关于 x 的函数称为**多值函数**. 对于多值函数，往往只要给因变量附加一些条件，就可以把它们化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的**单值分支**. 如由方程 $x^2+y^2=1$ 所确定变量 y 关于 x 的函数是一个多值函数，它有两个单值分支，分别是由 $x^2+y^2=1$ 且 $y>0$ 所确定的 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和由 $x^2+y^2=1$ 且 $y<0$ 所确定的 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 如果没有特别声明，本书提到的函数都是单值函数.

三、函数的几种特性

函数的一些基本特性在中学已学过，在此只作简单回顾.

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，数集 $X\subseteq D$. 若存在正实数 M，使得对任意的 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 若这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**. 特别若函数 $f(x)$ 在定义域 D 上有界时，则称函数 $f(x)$ 是**有界函数**，否则，称它是**无界函数**.

例如：本节例 8、例 9 中的函数都是有界函数，函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 也是有界函数；例 6、例 7 中的函数都是无界函数，函数 $f(x)=\tan x$ 和 $g(x)=\cot x$ 也是无界函数；例 6 中的函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ 在 $(1,2)$ 内无界，但在 $(2,3)$ 内有界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，区间 $I\subseteq D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是**单调增加**的（如图 1－5 所示）；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上是**单调减少**的（如图 1－6 所示）. 使函数单调增加（单调减少）的区间称为**单调增加区间**（**单调减少区间**），单

调增加区间与单调减少区间统称为**单调区间**.

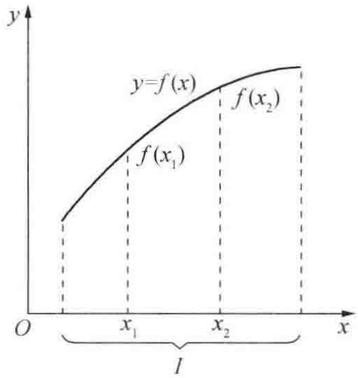


图 1-5

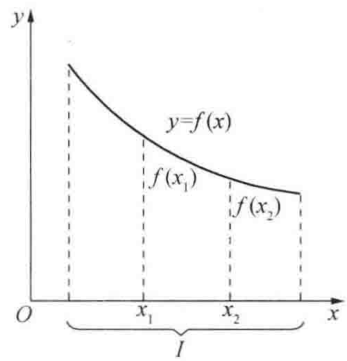


图 1-6

例如:函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少,在 $[0,+\infty)$ 上单调增加;在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调的(如图 1-7 所示). 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的(如图 1-8 所示).

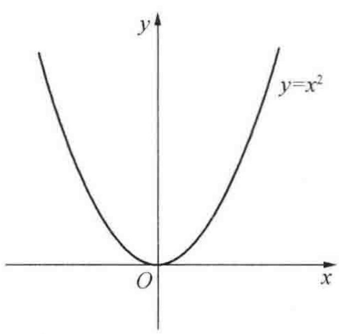


图 1-7

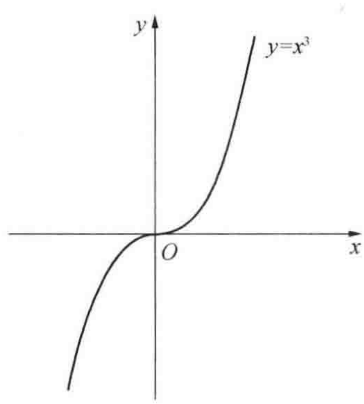


图 1-8

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 在数轴上关于原点对称,若对任意 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,那么称函数 $f(x)$ 为**偶函数**;若对任意的 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,那么称函数 $f(x)$ 为**奇函数**. 在平面直角坐标系中,**偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称**.

例如:函数 $y=x^2$ 是偶函数,图形关于 y 轴对称(如图 1-7 所示). 函数 $y=x^3$ 是奇函数,图形关于坐标原点对称(如图 1-8 所示).

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D,若存在常数 $T\neq 0$,使得对任一 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且 $f(x\pm T)=f(x)$,那么称函数 $f(x)$ 为**周期函数**,T 为 $f(x)$ 的**周期**,通常所说的周期是指它的最小正周期.

例如:函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为最小正周期的周期函数.

例 10　狄利克雷(Dirichlet)函数：

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}.\end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数，任何不等于零的有理数 r 都是它的周期，但它不存在最小正周期(因为不存在最小的正有理数)；它是有界函数且是偶函数.

四、反函数

设某商品在某商场的价格为每个 30 元，则收入 R(元)是销售量 Q(个)的函数：$R=30Q$. 反过来若已知收入 R，求销售量 Q，则销售量 Q 是收入 R 的函数：$Q=\frac{R}{30}$. 一般有如下定义.

定义 2　**设函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 W，如果对于任意的 $y\in W$，D 内都有唯一确定的数值 x，使得 $y=f(x)$，则变量 x 是 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in W$. 而原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.**

习惯上仍用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，于是 $y=f(x)$ 的反函数一般记作 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

什么函数存在反函数呢？可以证明如下结论.

定理 1　**如果单调函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，值域是 W，则它存在反函数，且函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$，$x\in W$ 的单调性相同.**

正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$内并不是单调函数，因而在定义域内并不存在反函数. 但是，当限制它们的定义域之后，所得如下函数：$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$与 $y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$分别是单调增加函数、单调减少函数，因而它们都存在反函数，且它们的反函数分别是反正弦函数：$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$和反余弦函数：$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$.

常见的反三角函数与其直接函数列表如下：

反三角函数	直接函数
反正弦函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$	$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
反余弦函数 $y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$	$y=\cos x$，$x\in[0,\pi]$
反正切函数 $y=\arctan x$，$x\in\mathbf{R}$	$y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$x\in\mathbf{R}$	$y=\cot x$，$x\in(0,\pi)$

五、复合函数

在商业活动中，一般地说某商品的销售收入 R(元)是销售量 Q(个)的函数，而销售量 Q 又是时间 t(天)的函数，这样一来时间 t 就间接通过销售量 Q 影响到销售收入 R 的变化，因此销售收入 R 是时间 t 的函数. 又如函数 $y=\sin e^x$，是由 $y=\sin u$ 与 $u=e^x$ 这两个函数所构成. 一般我们有：

定义 3　设函数 $y=f(u)$，$u\in D_1$ 和函数 $u=\varphi(x)$，$x\in D$ 且 $\varphi(D)\subset D_1$，则 y 通过中间变量 u 成为 x 的函数，称此函数为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中称 u 为中间变量，称 $u=\varphi(x)$ 为里层函数，称 $y=f(u)$ 为外层函数.

注意　中间变量可以有多个. 例如：$y=e^u$，$u=\cos v$，$v=\dfrac{x}{2}$，则 $y=e^{\cos\frac{x}{2}}$，这里 u，v 都是中间变量.

例 11　下列函数是由哪些简单函数复合而成？

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；　　　　(2) $y=\sin^3(x+1)$.

解　(1) 函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域是 $u\geqslant 0$，这应是函数 $u=1-x^2$ 的值域，即应满足 $u=1-x^2\geqslant 0$，由此得 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 因此 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 和函数 $u=1-x^2$，$x\in[-1,1]$ 复合而成.

(2) $y=\sin^3(x+1)$ 是由 $y=u^3$，$u=\sin v$ 和 $v=x+1$ 复合而成.

注意　两个函数构成复合函数是有条件的. 例如 $y=\sqrt{u}$ 和函数 $u=-1-x^2$ 不能构成复合函数，这是因为对任一 $x\in\mathbf{R}$，$u=-1-x^2$ 的值均不在 $y=\sqrt{u}$ 的定义域内.

六、函数的四则运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域依次为 D_1，D_2，且 $D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则我们可以定义函数的下列代数运算：

(1) 和(差) $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

(2) 积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$；

(3) 商 $\dfrac{f}{g}$：$\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in\{x\in D\mid g(x)\neq 0\}$.

七、初等函数

1. 基本初等函数

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为**基本初等函数**，它们是今后学习的基础. 罗列如下：

(1) 幂函数：$y=x^\mu$($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数)；

(2) 指数函数：$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$；

(3) 对数函数：$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$，特别是当 $a=\mathrm{e}$ 时，则为 $y=\ln x$. 这里 e 为无理数且 $\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots$；

(4) 三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 等；

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 等.

2. 初等函数

定义 4　由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次函数复合所构成的能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如：$y=\ln(1+x^2)$，$y=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$，$y=\arcsin(x-1)$ 都是初等函数；而分段函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 和狄利克雷(Dirichlet)函数 $D(x)$(见本节例 10)就不是初等函数.

***3. 双曲函数**

应用上常用到以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 所生成的一类初等函数：**双曲函数**及其**反双曲函数**. 它们的定义如下：

(1) **双曲正弦**：$\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，定义域是$(-\infty,+\infty)$，在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的奇函数，图形如图 1-9 所示.

(2) **双曲余弦**：$\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，定义域是$(-\infty,+\infty)$，它是偶函数，在$(-\infty,0)$ 内单调减少，在$(0,+\infty)$内单调增加，如图 1-9 所示.

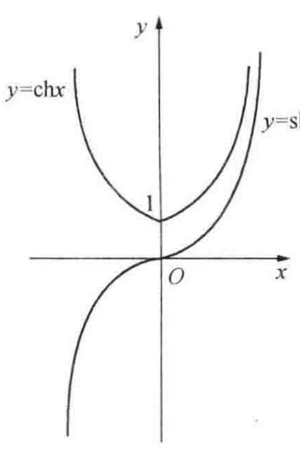


图 1-9

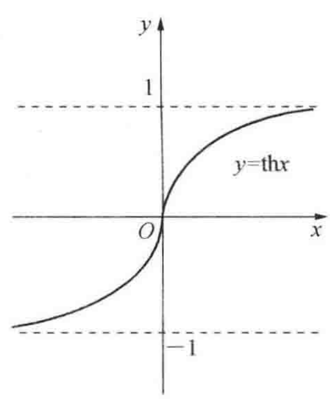


图 1-10

(3) **双曲正切**：$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$，定义域是$(-\infty,+\infty)$，在$(-\infty,+\infty)$内单调增加的奇函数，如图 1-10 所示.

双曲函数 $y=\mathrm{sh}x, y=\mathrm{ch}x(x\geqslant 0), y=\mathrm{th}x$ 的反函数依此记为

(4) **反双曲正弦**:$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,定义域是$(-\infty,+\infty)$,它在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的奇函数.

(5) **反双曲余弦**:$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,定义域是$[1,+\infty)$,在$[1,+\infty)$内单调增加.

(6) **反双曲正切**:$y=\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,定义域是$(-1,1)$,它在$(-1,1)$内是单调增加的奇函数.

根据双曲函数的定义,可以验证有如下**恒等式成立**:

(1) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$;(2) $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$;(3) $\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$.

八、极坐标

1. 极坐标系

在平面上任取一点 O,称为**极点**,引一条射线 Ox,称为**极轴**,再选定一个**长度单位**和**角度的正方向**(通常逆时针方向为正方向),这样便构成了一个**极坐标系**,如图 1-11 所示. 对于平面上任意一点 M,用 ρ 表示线段 OM 的长度,θ 表示 Ox 到 OM 的角度,ρ 称为**极径**,θ 称为**极角**,有序实数对(ρ,θ)称为点 M 的**极坐标**,记为 $M(\rho,\theta)$.

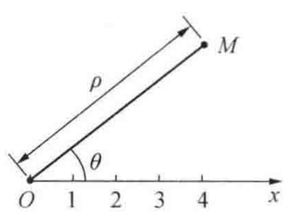


图 1-11

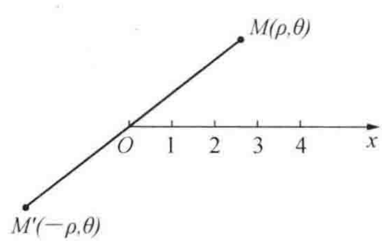


图 1-12

在极坐标系中,任意有序实数对(ρ,θ)都可以确定唯一一个点 M,但是平面上的一点 M,它的**极坐标表示并不唯一**. 显然(ρ,θ)与$(\rho,\theta+2n\pi)(n\in\mathbf{N})$表示同一个点.

在极坐标系的定义中,一点的极径是一个非负值. 但是,为了研究问题方便,一般地,如果 M 的极坐标为(ρ,θ),在 OM 的反向延长线上取 $OM'=OM$,则我们规定点 M'的坐标是$(-\rho,\theta)$,如图 1-12 所示.

2. 曲线的极坐标方程

定义 5 **在平面极坐标系中,已知曲线 L 和方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$,若**

(1) 坐标满足方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 的点都在曲线 L 上;

(2) 曲线 L 上的每一点的无穷多个极坐标中,至少有一个满足方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$,则称此方程 $\varphi(\rho,\theta)=0$ 为曲线 L 的极坐标方程.