有向几何学

有向面积及其应用

（下）

喻德生　著

科学出版社

有向几何学

有向面积及其应用

（下）

喻德生　著

南昌航空大学科学文库

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是《有向几何学》系列研究成果之三. 在《平面有向几何学》等研究成果的基础上, 创造性地、广泛地运用有向面积和有向面积定值法, 对平面有关问题进行研究, 得到了一系列的有关三角形内、外侧多角形, 多角形左、右侧多角形, 垂足多边形, 圆锥曲线内、外切多角形, 线型三角形等有向面积的定值定理, 揭示了这些定理与经典数学问题、数学定理和一大批数学竞赛题之间的联系, 使这些经典数学问题、数学定理和数学竞赛题得到了推广、证明或加强, 较为系统、深入地阐述了有向面积的基本理论、基本思想和基本方法, 以及有向面积在几何不等式证明中的思想方法. 它对开拓数学的研究领域, 揭示事物之间本质的联系, 探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义; 对丰富几何学各学科, 以及相关数学学科的教学内容, 促进大学和中学数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义; 此外, 有向几何学的研究成果和研究方法, 对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

本书可供数学研究工作者、大学和中学数学教师、数学专业本科生和研究生阅读, 可以作为大学数学专业本科生、研究生和中学数学竞赛的教材, 也可供相关学科专业的师生、科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

有向几何学：有向面积及其应用.下/喻德生著. —北京：科学出版社, 2018.3

ISBN 978-7-03-056838-0

Ⅰ. ①有…　Ⅱ. ①喻…　Ⅲ. ①有向图　Ⅳ. ①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 048834 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：邹慧卿

责任印制：张　伟 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 3 月第　一　版　开本: 720 × 1000　B5

2018 年 3 月第一次印刷　印张: 22

字数: 437 000

定价: 149.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

作 者 简 介

喻德生，江西高安人. 1980 年步入教坛，1990 年江西师范大学数学系硕士研究生毕业，获理学硕士学位. 现任南昌航空大学数学与信息科学学院教授，硕士研究生导师，江西省第六批中青年骨干教师，中国教育数学学会常务理事，《数学研究期刊》编委，南昌航空大学省精品课程《高等数学》负责人，教育部学位与研究生教育发展中心学位论文评审专家，江西省第二届青年教师讲课比赛评委，研究生数学建模竞赛论文评审专家. 历任大学数学教研部主任等职. 指导硕士研究生 12 人. 主要从事几何学、计算机辅助几何设计和数学教育等方面的研究. 参与国家自然科学基金课题 3 项，主持或参与省部级教学科研课题 11 项、厅局级教学科研课题 13 项. 在国内外学术刊物发表论文 60 余篇，撰写专著 4 部，主编出版教材 12 种 18 个版本. 作为主持人获江西省优秀教学成果奖 2 项，指导学生参加全国数学建模竞赛获省级一等奖及以上奖励 5 项并获江西省优秀教学成果荣誉 2 项，南昌航空工业学院优秀教学成果奖 4 项，获校级优秀教师 2 次. Email：yuds17@163.com

前　　言

“有向”是自然科学中的一个十分重要而又应用非常广泛的概念. 我们经常遇到的有向数学模型无外乎如下两类:

一是“泛物”的有向性. 如微积分学中的左右极限、左右连续、左右导数等用到的量的有向性, 定积分中用到的线段 (即区间) 的有向性, 对坐标的曲线积分用到的曲线的有向性, 对坐标的曲面积分用到的曲面的有向性等, 这些都是有向性的例子. 尽管这里的问题很不相同, 但是它们都只有正、负两个方向, 因此称为“泛物”的有向性. 然而, 这里的有向性没有可加性, 不便运算.

二是“泛向”的有向量, 亦即我们在数学与物理中广泛使用的向量. 我们知道, 这里的向量有无穷多个方向, 而且两个方向不同的向量相加通常得到一个方向不同的向量. 因此, 我们称为“泛向”的有向量. 这种“泛向”的有向数学模型, 对于我们来说方向太多, 不便应用.

然而, 正是由于“泛向”有向量的可加性与“泛物”有向性的二值性, 启示我们研究一种既有二值有向性, 又有可加性的几何量. 一维空间的有向距离、二维空间的有向面积、三维空间乃至一般的 N 维空间的有向体积等都是这种几何量的例子. 一般地, 我们把带有方向的度量称为有向度量.

“有向度量”并不是数学中一个全新的概念, 各种有向度量的概念散见于一些数学文献中. 但是, 有向度量的概念并未发展成为数学中的一个重要概念. 有向度量的应用仅仅局限于其“有向性”, 而极少触及其“可加性”. 要使有向度量的概念变得更加有用, 要发现各种有向度量的规律性, 使有向度量的知识系统化, 就必须对有向度量进行深入的研究, 创立一门独立的几何学——有向几何学. 为此, 必须明确有向几何学的研究对象, 确立有向几何学的研究方法, 构建有向几何学的知识体系. 这对开拓数学研究的领域, 揭示事物之间本质的联系, 探索数学研究的新思想、新方法具有重要的理论意义; 对丰富几何学各学科以及相关数学学科, 特别是数学分析、高等数学等学科的教学内容, 促进高等学校数学教学内容改革的发展具有重要的现实意义; 此外, 有向几何学的研究成果和研究方法, 对数学定理的机械化证明也具有重要的应用和参考价值.

就我们所知, 著名数学家希尔伯特在他的数学名著《直观几何》中, 利用三角形的有向面积证明了一个简单的几何问题, 这是历史上较早的使用有向面积证题的例子. 20 世纪五六十年代, 著名数学家 Wilhelm Blaschke 在他的《圆与球》中, 利用有向面积深入地讨论了圆的极小性问题, 这是历史上比较系统地使用有向面积方

法解决问题的例子. 但是, 有向面积法并未发展成一种普遍使用、而又十分有效的方法.

20 世纪八九十年代, 我国著名数学家吴文俊、张景中院士, 开创了数学机械化的研究, 而计算机中使用的距离和面积都是有向的, 因此数学机械化的研究拓宽了有向距离和有向面积应用的范围. 特别是张景中院士十分注重面积关系在数学机器证明中的作用, 指出面积关系是 “数学中的一个重要关系”, 并利用面积关系创立了一种可读的数学机器证明方法——即所谓的消点法, 也称为面积法.

近年来, 我们在分析与借鉴上述两种思想方法的基础上, 发展了一种研究有向几何问题的方法, 即所谓的有向度量定值法. 除上述提到的两个原因外, 我们也受到如下两种数学思想方法的影响.

一是数学建模的思想方法. 我们知道, 一个数学模型通常不是一个简单的数学结论. 它往往包含一个或多个参数, 只要给定参数的一个值, 就可以得出一个相应的结论. 这与经典几何学中一个一个的、较少体现知识之间联系的结论形成了鲜明的对照. 因此, 我们自然会问, 几何学中能建立涵盖面如此广泛的结论吗? 这样, 寻找几何学中联系不同结论的参数, 进行几何学中的数学建模, 就成为我们研究有向几何问题的一个重点.

二是函数论中的连续与不动点的思想方法. 我们知道, 经典几何学中的结论通常是离散的, 一个结论就要给出一个证明, 比较麻烦. 我们能否引进一个连续变化的量, 使得对于变量的每一个值, 某个几何量或某几个几何量之间的关系始终是不变的? 这样, 构造几何量之间的定值模型就成为研究有向几何问题的一个突破口.

尽管几何定值问题的研究较早, 一些方面的研究也比较深入, 但有向度量定值问题的研究尚处于起步阶段. 近年来, 我们研究了有向距离、有向面积定值的一些问题, 得到了一些比较好的结果, 并揭示了这些结果与一些著名的几何结论之间的联系. 不仅使很多著名的几何定理 ——Euler 定理、Pappus 定理、Pappus 公式、蝴蝶定理、Servois 定理、中线定理、Harcourt 定理、Carnot 定理、Brahmagupta 定理、切线与辅助圆定理、Anthemius 定理、焦点和切线的 Apollonius 定理、Zerr 定理、配极定理、Salmon 定理、二次曲线的 Pappus 定理、两直线上的 Pappus 定理、Desarques 定理、Ceva 定理、等截共轭点定理、共轭直径的 Apollonius 定理、正弦及余弦差角公式、Weitzentock 不等式、Möbius 定理、Monge 公式、Gauss 五边形公式、Erdös-Mordell 不等式、Gauss 定理、Gergonne 定理、梯形的施泰纳定理、拿破仑三角形定理、Cesaro 定理、三角形的中垂线定理、Simson 定理、三角形的共点线定理、完全四边形的 Simson 线定理、高线定理、Neuberg 定理、共点线的施泰纳定理、Zvonko Cerin 定理、双重透视定理、三重透视定理、Pappus 重心定理、角平分线定理、Menelans 定理、Newton 定理、Brianchon 定理等结论和一大批数学竞赛题在有向度量的思想方法下得到了推广或证明, 而且揭示了这些经典结论之间、

有向度量与这些经典结论之间的内在联系. 显示出有向面积定值法的新颖性、综合性、有效性和简洁性. 特别是在三角形、四边形和二次曲线外切多边形中有向面积定值问题的研究, 涵盖面广、内容丰富、结论优美, 并引起了国内外数学界的关注.

打个比方说, 如果我们把经典的几何定理看成是一颗颗的珍珠, 那么几何有向度量的定值定理就像一条条的项链, 把一些看似没有联系的若干几何定理串联起来, 形成一个完美的整体. 因此, 几何有向度量的定值定理更能体现事物之间的联系, 揭示事物的本质.

本书是《有向几何学》系列研究成果之三. 在《平面有向几何学》(喻德生著, 科学出版社, 2014 年 3 月) 等有关研究成果的基础上, 创造性地、广泛地运用有向面积和有向面积定值法, 对平面有关问题进行研究, 得到了一系列的有关三角形内、外侧多角形, 多角形左、右侧多角形, 垂足多边形, 圆锥曲线内、外切多角形, 线型三角形等有向面积的定值定理, 揭示了这些定理与经典数学问题、数学定理和一大批数学竞赛题之间的联系, 使这些经典数学问题、数学定理和数学竞赛题得到了推广、证明或加强, 较为系统、深入地阐述了有向面积的基本理论、基本思想和基本方法, 以及有向面积在几何不等式证明中的思想方法.

本书得到南昌航空大学科研成果专项资助基金和江西省自然科学基金 (CA201607138) 的资助, 得到科技处和数学与信息科学学院领导以及南昌航空大学教师毕艳会博士的大力支持, 在此表示衷心感谢! 同时, 也感谢科学出版社陈玉琢编辑的关心与帮助.

由于作者阅历、水平有限, 书中疏漏与不足之处在所难免, 敬请国内外同仁和读者批评指正.

作　者
2017 年 9 月

目　　录

前言
第 1 章　三角形外 (内) 侧多角形中有向面积的定值定理与应用 ··············· 1
1.1　三角形外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形有向面积的定值定理与应用 ··············· 1
1.1.1　三角形外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形的概念 ··············· 1
1.1.2　三角形外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形有向面积公式与应用 ··············· 2
1.1.3　三角形外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形中有向面积的定值定理与应用 ··············· 5
1.2　三角形各边外 (内) 侧三角形有向面积的定值定理与应用 ··············· 10
1.2.1　三角形各边外 (内) 侧三角形的概念 ··············· 10
1.2.2　三角形各边外 (内) 侧三角形有向面积定值定理与应用 ··············· 10
1.2.3　三角形各边外 (内) 侧相似三角形有向面积的定值定理与应用 ··············· 14
1.3　三角形外 (内) 侧多边 (角) 形有向面积的定值定理与应用 ··············· 18
1.3.1　三角形各边外 (内) 侧多边 (角) 形的概念 ··············· 18
1.3.2　三角形外 (内) 侧正方形中有向面积的定值定理与应用 ··············· 19
1.3.3　三角形外 (内) 侧相似长方形中有向面积的定值定理与应用 ··············· 25
1.3.4　三角形外 (内) 侧平行四边形中有向面积的定值定理与应用 ··············· 28
1.4　三平行四边形中有向面积的定值定理及其应用 ··············· 33
1.4.1　三角形三平行四边形的概念 ··············· 33
1.4.2　三角形三平行四边形有向面积的定值定理与应用 ··············· 33
第 2 章　多角形右 (左) 侧多角形中有向面积的定值定理与应用 ··············· 36
2.1　多角 (边) 形右 (左) 侧 (λ,μ) 多角 (边) 形中有向面积的定值定理与应用 ··············· 36
2.1.1　多角 (边) 形右 (左) 侧 (λ,μ) 多角 (边) 形的概念 ··············· 36
2.1.2　多边形右 (左) 侧 (λ,μ) 多边形有向面积的性质 ··············· 37
2.1.3　多角形右 (左) 侧 (λ,μ) 多角形重心的性质与应用 ··············· 39
2.1.4　一顶点重合的两相似长方形中有向面积的定值定理与应用 ··············· 40
2.1.5　四边形左、右侧 (λ,μ) 四角形中有向面积的定值定理 ··············· 42
2.2　多角 (边) 形各边右 (左) 侧三角形中有向面积的定值定理与应用 ··············· 44
2.2.1　多角 (边) 形各边右 (左) 侧三角形的概念 ··············· 44
2.2.2　$2n+1$ 角形各边右 (左) 侧相似三角形中有向面积的定值定理 ··············· 44
2.2.3　$2n+1$ 角形各边右 (左) 侧相似三角形中有向面积的定值定理的应用 ··············· 47

2.3 n 角形中 n 相似形中有向面积的定值定理及其应用 …… 50
2.3.1 n 角 (边) 形的 n 相似形的概念 …… 50
2.3.2 n 角形中 n 相似四边形有向面积的定值定理及其应用 …… 51
2.3.3 n 角形中 n 相似平行四边形有向面积的定值定理与应用 …… 56
第 3 章 垂足多边形有向面积的定值定理与应用 …… 59
3.1 垂足三角形有向面积公式与应用 …… 59
3.1.1 垂足三角形的概念 …… 59
3.1.2 垂足三角形有向面积的定值定理 …… 59
3.1.3 垂足三角形有向面积定值定理的应用 …… 62
3.2 垂足多角形 (多边形) 中有向面积的定值定理与应用 …… 65
3.2.1 垂足多角形 (多边形) 的概念 …… 65
3.2.2 圆内接多角形的垂足多边形有向面积公式与应用 …… 66
3.2.3 圆内接多边形的垂足多边形有向面积公式与应用 …… 68
3.3 垂足的性质定理与应用 …… 72
3.3.1 三角形垂足的性质定理与应用 …… 72
3.3.2 多角形垂足的性质定理与应用 …… 74
3.4 完全四边形的垂足四边形有向面积的定值定理与应用 …… 78
3.4.1 完全四边形的垂足四边形的概念 …… 78
3.4.2 垂足四边形有向面积的定值定理与应用 …… 80
第 4 章 圆锥曲线外切三角形中有向面积的定值定理与应用 …… 83
4.1 Ceva 线三角形有向面积的定值定理与应用 …… 83
4.1.1 Ceva 线三角形的概念 …… 83
4.1.2 Ceva 线三角形有向面积的定值定理 …… 83
4.1.3 Ceva 线三角形有向面积的定值定理的推广 …… 88
4.2 顶切点线三角形中有向面积的定值定理与应用 …… 90
4.2.1 圆锥曲线与圆锥曲线外切三角形的概念 …… 90
4.2.2 各类圆锥曲线外切三角形中有向面积的定值定理 …… 92
4.2.3 圆锥曲线外切三角形中有向面积的定值定理与应用 …… 98
4.3 圆锥曲线外切三角形中两个结论的推广与证明 …… 101
4.3.1 椭圆外切三角形中一个结论的推广与证明 …… 102
4.3.2 Lemoine 线定理的证明 …… 104
4.4 圆锥曲线外切三角形中有向面积的定值定理与应用 …… 108
4.4.1 椭圆外切三角形中有向面积的定值定理及其应用 …… 108
4.4.2 圆外切三角形中有向面积的定值定理与应用 …… 111
第 5 章 圆锥曲线多角形中有向面积的定值定理与应用 …… 114
5.1 圆锥曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 角形中有向面积的定值定理与应用 …… 114

5.1.1　圆锥曲线外切多角形的概念与记号 …… 114
5.1.2　各类圆锥曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 角形中有向面积的定值定理 …… 115
5.1.3　统一的圆锥曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 角形中有向面积的定值定理 …… 122
5.1.4　圆锥曲线外切 $n(n \geqslant 4)$ 角形中有向面积的定值定理的应用 …… 126
5.2　圆锥曲线外切 $mn(m, n \geqslant 2)$ 角形中有向面积的定值定理与应用 …… 132
5.2.1　各类圆锥曲线外切 $mn(m, n \geqslant 2)$ 角形中有向面积的定值定理 …… 132
5.2.2　统一的圆锥曲线外切 $mn(m, n \geqslant 2)$ 角形中有向面积的定值定理 …… 135
5.2.3　圆锥曲线外切 $mn(m, n \geqslant 2)$ 角形中有向面积的定值定理的应用 …… 137
5.3　圆锥曲线外切 $2n+1(n \geqslant 1)$ 角形中有向面积的定值定理与应用 …… 141
5.3.1　顶切点线三角形的概念与记号 …… 141
5.3.2　各类外切 $2n+1(n \geqslant 1)$ 角形中有向面积的定值定理 …… 142
5.3.3　统一的圆锥曲线外切 $2n+1(n \geqslant 1)$ 角形中有向面积的定值定理 …… 151
5.3.4　圆锥曲线外切 $2n+1(n \geqslant 1)$ 角形中有向面积的定值定理的应用 …… 154
第 6 章　圆锥曲线内接、外切多角 (边) 形中有向面积的定值定理与应用 …… 158
6.1　椭圆内接多边形的最值定理与应用 …… 158
6.1.1　椭圆内接多边形的最值定理 …… 158
6.1.2　面积最大的椭圆内接六边形中有向面积的定值定理与应用 …… 160
6.1.3　面积最大的椭圆内接五边形、四边形中有向面积的定值定理与应用 …… 162
6.2　面积最大的椭圆内接多边形中有向面积的定值定理与应用 …… 166
6.2.1　椭圆内接 $2n$ 边形的性质 …… 167
6.2.2　面积最大的椭圆内接 $4n$ 边形中点线三角形有向面积的定值定理与应用 …… 167
6.2.3　面积最大的椭圆内接 $4n+2$ 边形中点线三角形有向面积的定值定理与应用 …… 169
6.2.4　面积最大的椭圆内接十二边形对角线三角形有向面积的定值定理与应用 …… 171
6.3　椭圆内接多角形中有向面积的定值定理与应用 …… 173
6.3.1　一类椭圆内接六角形中点线三角形有向面积的定值定理与应用 …… 173
6.3.2　一类椭圆内接十角形中点线三角形有向面积的定值定理与应用 …… 176
6.4　圆锥曲线内接多角形中几个定理的证明 …… 180
6.4.1　圆锥曲线内接六角形的 Pascal 定理及其证明 …… 181
6.4.2　退化圆锥曲线内接六角形中的 Pascal 定理及其证明 …… 184
6.5　圆锥曲线内接、外切多边形有向面积之间的关系定理 …… 186
6.5.1　椭圆内接、外切三角形有向面积之间的关系定理 …… 186
6.5.2　双曲线内接、外切三角形有向面积之间的关系定理 …… 187

6.5.3 Möbius 定理的推广与证明 ······ 188
第 7 章 线型三角形有向面积公式与应用 ······ 190
7.1 线型三角形有向面积公式 ······ 190
7.1.1 三直线组一、二阶行列式的概念与性质 ······ 190
7.1.2 线型三角形有向面积公式 ······ 192
7.2 线型三角形有向面积公式在面积关系问题证明中的应用 ······ 196
7.2.1 线型三角形有向面积公式在圆锥曲线法线三角形面积求解中的应用 ······ 197
7.2.2 线型三角形有向面积公式在数学竞赛题面积关系式证明中的应用 ······ 199
7.3 三线共点的充要条件与应用 ······ 209
7.3.1 三直线共点的充要条件 ······ 209
7.3.2 三线共点充要条件在三直线共点证明中的应用 ······ 212
7.3.3 三线共点充要条件在三点共线证明中的应用 ······ 230
7.3.4 三线共点充要条件在两线垂直证明中的应用 ······ 234
7.4 平面六点组坐标行列式的一个性质与应用 ······ 236
7.4.1 平面六点组坐标行列式的概念 ······ 237
7.4.2 平面六点组坐标行列式的性质 ······ 237
7.4.3 平面六点组坐标行列式性质的应用 ······ 240
7.5 两三角形的垂三角形有向面积的定值定理及应用 ······ 241
7.5.1 两三角形的垂三角形有关的概念 ······ 242
7.5.2 两三角形及其垂三角形有向面积的关系定理及其应用 ······ 243
7.5.3 两三角形的顶点向量数量积的定值定理及其应用 ······ 245
7.5.4 两三角形顶点间距离的关系定理及其应用 ······ 246
7.5.5 两个三角形外正方形中心三角形有向面积的关系定理及其应用 ······ 248
7.6 三角形与圆锥曲线交点的垂线三角形 (有向) 面积公式及应用 ······ 250
7.6.1 三角形各边所在直线与椭圆交点的垂线三角形 (有向) 面积公式及其应用 ······ 250
7.6.2 三角形各边所在直线与双曲线交点的垂线三角形 (有向) 面积公式及其应用 ······ 253
7.6.3 三角形各边所在直线与抛物线交点的垂线三角形 (有向) 面积公式及其应用 ······ 255
7.6.4 三角形各边所在直线与圆锥曲线交点的垂线三角形 (有向) 面积公式及其应用 ······ 257
第 8 章 有向面积公式在不等式证明中的应用 ······ 260
8.1 三角形有向面积公式在几何不等式证明中的应用 ······ 260
8.1.1 三角形与其 λ- 分点三角形面积关系不等式与应用 ······ 260

8.1.2 三角形有向面积公式在数学竞赛题证明中的应用 ······ 262
8.2 三角形 (有向) 面积关系式在几何不等式证明中的应用 ······ 266
8.2.1 三角形诸心、诸点三角形 (有向) 面积公式在不等式证明中的应用 ······ 266
8.2.2 椭圆内接、外切三角形有向面积之间的关系在证明不等式中的应用 ······ 268
8.2.3 三角形与其定比分点线三角形有向面积关系定理及其应用 ······ 269
8.3 多边形 (有向) 面积公式在几何不等式证明中的应用 ······ 280
8.3.1 凸多边形与其 λ- 定比分点多边形面积关系不等式与应用 ······ 280
8.3.2 三角形中一个多边形有向面积关系定理及其应用 ······ 282
8.3.3 凸四边形与其分点四边形面积关系定理与应用 ······ 287
8.3.4 正六边形与其内接平行四边形面积关系定理与应用 ······ 289
第 9 章　有向距离与有向面积间的关系与应用 ······ 292
9.1 两点间有向距离与三角形有向面积的关联问题与应用 ······ 292
9.1.1 n 角形中关系两点间有向距离和三角形有向面积的问题与应用 ······ 292
9.1.2 正多边形中关系两点间有向距离和三角形有向面积的问题 ······ 294
9.1.3 平面五点组中关系两点间有向距离和三角形有向面积的问题 ······ 298
9.2 点到直线有向距离与有向面积间的关系与应用 ······ 299
9.2.1 点到直线有向距离与有向面积之间的关系 ······ 299
9.2.2 有向距离与有向面积关系命题的等价性 ······ 301
9.2.3 四边形 $(1,\mu)$ 外 (内) 侧四角形中有向距离和有向面积的定值定理 ······ 306
9.3 三角形中有向距离与有向面积的定值定理与应用 ······ 308
9.3.1 三角形中有向距离与边三角形、中线三角形有向面积的定值定理与应用 ······ 308
9.3.2 三角形中有向距离与高线三角形等有向面积的定值定理与应用 ······ 311
9.3.3 三角形旁切圆中有向距离与有向面积的定值定理与应用 ······ 316
9.3.4 三角形外、内侧正方形中有向距离与有向面积的定值定理与应用 ······ 320
9.3.5 三角形面积与高足线距离之间的关系 ······ 322
9.4 梯形中有向距离与有向面积的定值定理与应用 ······ 324
9.4.1 梯形中有向距离与有向面积的定值定理 ······ 324
9.4.2 梯形中有向距离与有向面积定值定理的应用 ······ 326
参考文献 ······ 331
名词索引 ······ 334

第 1 章　三角形外 (内) 侧多角形中有向面积的定值定理与应用

1.1　三角形外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形有向面积的定值定理与应用

以三角形的三边为边分别向三角形的外 (内) 侧作正三角形, 这三个正三角形的中心所构成的三角形称为三角形的外 (内) 拿破仑三角形. 在几何学中, 关于三角形、拿破仑三角形的一些结论是非常著名的, 但这些结论之间的联系却少为人知. 为此, 本节利用有向面积的方法研究此类问题. 首先, 给出三角形外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形的概念; 其次, 给出外 (内) 侧三角形有向面积公式及其若干推论, 包括著名的 "外、内侧拿破仑三角形面积之差等于三角形面积" 等结论; 最后, 给出外 (内) 侧三角形中有向面积的几个定值定理及其应用, 从而推出一些与拿破仑三角形有关的等积定理、三线共点定理等结论, 揭示这些公式、定理与三角形、拿破仑三角形的一些已知结果之间的联系.

1.1.1　三角形外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形的概念

定义 1.1.1　三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3;P_{3+i}=P_i$, 以下类同) 所在直线把平面分成两部分, 三角形所在的部分称为直线 P_iP_{i+1} 的内侧, 另一部分称为直线 P_iP_{i+1} 的外侧.

定义 1.1.2　在三角形 $P_1P_2P_3$ 各边 P_iP_{i+1} 所在直线的外 (内) 侧各取一点 $M_i(N_i)$, 作 $M_iQ_i\perp P_iP_{i+1}(N_iQ_i\perp P_iP_{i+1})$, 垂足为 $Q_i(i=1,2,3)$. 如果 $\mathrm{D}_{P_iQ_i}/\mathrm{D}_{Q_iP_{i+1}}=\lambda$, $\mathrm{d}_{M_iQ_i}=\mu\mathrm{d}_{P_iP_{i+1}}(\mathrm{d}_{N_iQ_i}=\mu\mathrm{d}_{P_iP_{i+1}})(\mu\geqslant 0)$, 则称 $M_i(N_i)$ 为边 $P_iP_{i+1}(i=1,2,3)$ 的外 (内) 侧 (λ,μ) 点; 称以 $M_1,M_2,M_3(N_1,N_2,N_3)$ 为顶点的三角形 $M_1M_2M_3(N_1N_2N_3)$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形 (图 1.1.1 和图 1.1.2).

特别地, 三角形的 $(1,\sqrt{3}/6)$ 外 (内) 侧三角形, 即三角形的外 (内) 侧拿破仑三角形; 三角形的 $(1,0)$ 外 (内) 侧三角形即三角形的中位三角形. 为方便起见, 当 N_1,N_2,N_3 中有两点或全部重合时, 我们把 N_1,N_2,N_3 所构成的线段或点可看成是内侧 (λ,μ) 三角形的特殊情形.

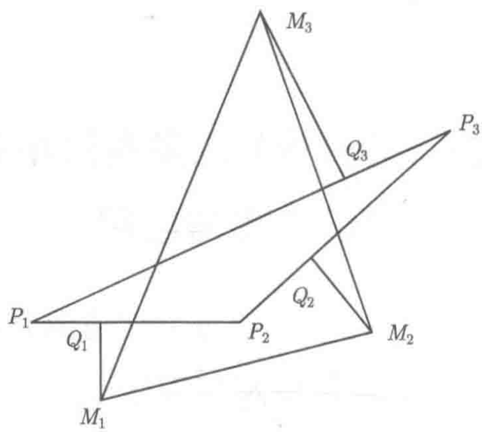

图 1.1.1

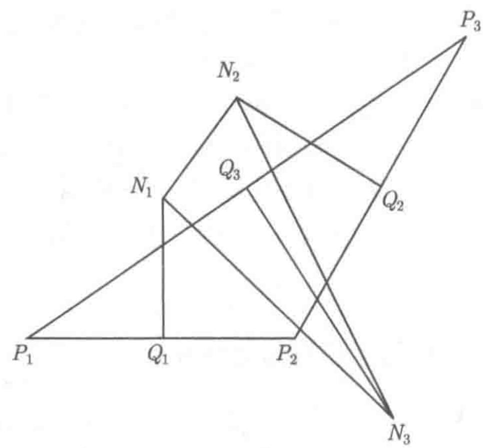

图 1.1.2

1.1.2 三角形外 (内) 侧 (λ, μ) 三角形有向面积公式与应用

引理 1.1.1 (喻德生, 2004, 2014) 设线段 P_iP_{i+1} 端点的坐标分别为 $P_i(x_i, y_i)$, $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, 则其右 (左) 侧 (λ, μ) 点 $M_i(N_i)$ 的坐标为

$$\begin{cases} x_{M_i} = (x_i + \lambda x_{i+1})/(1+\lambda) + \mu(y_{i+1} - y_i), \\ y_{M_i} = (y_i + \lambda y_{i+1})/(1+\lambda) - \mu(x_{i+1} - x_i); \end{cases} \tag{1.1.1}$$

$$\begin{cases} x_{N_i} = (x_i + \lambda x_{i+1})/(1+\lambda) - \mu(y_{i+1} - y_i), \\ y_{N_i} = (y_i + \lambda y_{i+1})/(1+\lambda) + \mu(x_{i+1} - x_i). \end{cases} \tag{1.1.2}$$

定理 1.1.1 (喻德生, 2004) 设三角形 $M_1M_2M_3(N_1N_2N_3)$ 为三角形 $P_1P_2P_3$

的外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形, 则

$$\mathrm{D}_{M_1M_2M_3}=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}\pm\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}^2_{P_iP_{i+1}}; \tag{1.1.3}$$

$$\mathrm{D}_{N_1N_2N_3}=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}\mp\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}^2_{P_iP_{i+1}}, \tag{1.1.4}$$

其中当 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形时, 式 (1.1.3) 取 "+" 号, 式 (1.1.4) 取 "−" 号; 为反向三角形时, 式 (1.1.3) 取 "−" 号, 式 (1.1.4) 取 "+" 号.

证明 如图 1.1.3 所示. 设三角形 $P_1P_2P_3$ 顶点的坐标为 $P_i(x_i,y_i),(i=1,2,3)$. 若三角形 $P_1P_2P_3$ 为正向三角形, 则由三角形有向面积公式和式 (1.1.1), 可得

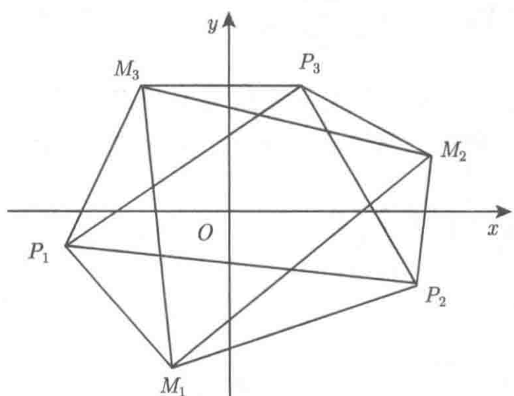

图 1.1.3

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_{M_1M_2M_3}\\
=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left\{\left[\frac{x_i+\lambda x_{i+1}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+1}-y_i)\right]\times\left[\frac{y_{i+1}+\lambda y_{i+2}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+2}-x_{i+1})\right]\right.\\
&\left.-\left[\frac{x_{i+1}+\lambda x_{i+2}}{1+\lambda}+\mu(y_{i+2}-y_{i+1})\right]\times\left[\frac{y_i+\lambda y_{i+1}}{1+\lambda}-\mu(x_{i+1}-x_i)\right]\right\}\\
=&\frac{1}{2(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{3}\left[(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)+\lambda(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)+\lambda^2(x_{i+1}y_{i+2}-x_{i+2}y_{i+1})\right]\\
&-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_ix_{i+2}-x_{i+1}^2+y_iy_{i+2}-y_{i+1}^2)-\frac{\mu^2}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[(x_{i+2}y_{i+1}-x_{i+1}y_{i+2})\right.\\
&\left.+(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})+(x_iy_{i+2}-x_{i+2}y_i)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1-\lambda+\lambda^2}{2(1+\lambda)^2}\sum_{i=1}^{3}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)-\frac{3\mu^2}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_{i+1}y_i-x_iy_{i+1})\\
&\quad-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[(x_ix_{i+2}-x_{i+1}^2)+(y_iy_{i+2}-y_{i+1}^2)\right]\\
&=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}-\frac{\mu}{2}\sum_{i=1}^{3}\left[(x_ix_{i+1}-x_{i+2}^2)+(y_iy_{i+1}-y_{i+2}^2)\right]\\
&=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}\\
&\quad+\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}\left[(x_i^2+x_{i+1}^2-2x_ix_{i+1})+(y_i^2+y_{i+1}^2-2y_iy_{i+1})\right]\\
&=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}+\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}_{P_iP_{i+1}}^2.
\end{aligned}
$$

若三角形 $P_1P_2P_3$ 为反向三角形, 则三角形 $P_3P_2P_1$ 是正向的, 且三角形 $P_3P_2P_1$ 对应的外侧 (λ,μ) 三角形为三角形 $M_3M_2M_1$. 于是由上述证明得

$$
\mathrm{D}_{M_3M_2M_1}=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]\mathrm{D}_{P_3P_2P_1}+\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}_{P_iP_{i+1}}^2,
$$

等式两边乘以 -1, 得

$$
\mathrm{D}_{M_1M_2M_3}=\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}-\frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}_{P_iP_{i+1}}^2.
$$

因此式 (1.1.3) 成立.

同理, 由三角形有向面积公式和式 (1.1.2), 可以证明式 (1.1.4) 成立.

定理 1.1.2 设三角形 $M_1M_2M_3(N_1N_2N_3)$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形, 则

$$
\mathrm{D}_{M_1M_2M_3}+\mathrm{D}_{N_1N_2N_3}=2\left[\frac{1-\lambda+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}+3\mu^2\right]\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}. \tag{1.1.5}
$$

证明 式 (1.1.3)+(1.1.4), 即得式 (1.1.5).

推论 1.1.1 设三角形 $M_1M_2M_3(N_1N_2N_3)$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形, 且 $\mu^2=\lambda/(1+\lambda)^2\ (\lambda\geqslant 0)$, 则这两个外 (内) 侧三角形的有向面积的和为定值, 即

$$
\mathrm{D}_{M_1M_2M_3}+\mathrm{D}_{N_1N_2N_3}=2\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}.
$$

证明 将 $\mu^2=\lambda/(1+\lambda)^2\ (\lambda\geqslant 0)$ 代入式 (1.1.5) 即得.

推论 1.1.2 三角形的外侧拿破仑三角形与内侧拿破仑三角形的面积之差等于三角形的面积.

证明 如图 1.1.4 所示. 在式 (1.1.5) 中取 $\lambda=1,\mu=\sqrt{3}/6$, 得

$$\mathrm{D}_{M_1M_2M_3}+\mathrm{D}_{N_1N_2N_3}=\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}.$$

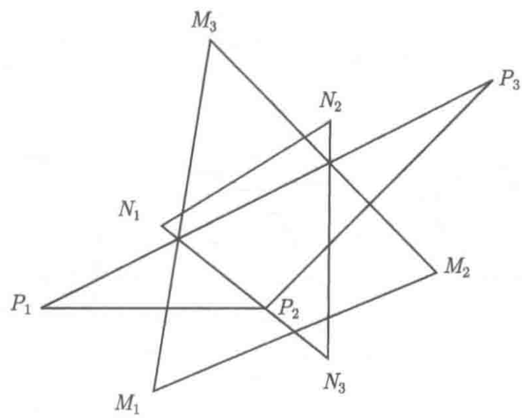

图 1.1.4

因为外 (内) 侧拿破仑三角形 $M_1M_2M_3(N_1N_2N_3)$ 与三角形 $P_1P_2P_3$ 是同向 (反向) 的, 故有 $\mathrm{a}_{M_1M_2M_3}-\mathrm{a}_{N_1N_2N_3}=\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}$.

推论 1.1.3 以三角形的三边为边分别向三角形的外 (内) 侧作正方形, 则这三个正方形的中心所构成的外 (内) 侧三角形的面积的差等于三角形的面积的 2 倍.

证明 在式 (1.1.5) 中取 $\lambda=1,\mu=1/2$, 则三角形 $M_1M_2M_3(N_1N_2N_3)$ 即是以三角形的三边分别向三角形外 (内) 侧所作正方形的中心所构成的外 (内) 侧三角形. 故由式 (1.1.5) 得

$$\mathrm{D}_{M_1M_2M_3}+\mathrm{D}_{N_1N_2N_3}=2\mathrm{D}_{P_1P_2P_3},$$

由于三角形 $M_1M_2M_3(N_1N_2N_3)$ 与三角形 $P_1P_2P_3$ 是同向 (反向) 的, 故有

$$\mathrm{a}_{M_1M_2M_3}-\mathrm{a}_{N_1N_2N_3}=2\mathrm{a}_{P_1P_2P_3}.$$

1.1.3 三角形外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形中有向面积的定值定理与应用

定理 1.1.3 (喻德生, 2004) 设 $M_1M_2M_3(N_1N_2N_3)$ 为三角形 $P_1P_2P_3$ 的外 (内) 侧 (λ,μ) 三角形, P 是三角形 $P_1P_2P_3$ 所在平面上任意一点, 则对固定的 $\lambda(\mu\geqslant 0$ 任意), 有

$$\sum_{i=1}^{3}\mathrm{D}_{PP_iM_{i+1}}=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{D}_{PP_iN_{i+1}}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\mathrm{D}_{P_1P_2P_3}\quad(为定值).\tag{1.1.6}$$