数学分析基本问题与注释

——一元微分学研究式教学法探索与实践

韩茂安 编著

科学出版社

数学分析基本问题与注释

——一元微分学研究式教学法探索与实践

韩茂安　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是作者在上海师范大学主讲数学分析第一学期课程的教学配套用书. 本书的主要内容可分为两部分, 一部分是针对教材的每一节内容列出了五个基本问题,学生可以在课前预习时参考, 通过问题引领, 有的放矢地让学生自学教材, 理解了这些问题就领会了所学内容. 另一部分是作者根据该节内容和所列问题, 结合自己的理解和体会以及适量例题给出的要点讲解与注释, 以帮助学生正确理解和掌握课本知识. 此外, 各章还配备了测试题及其提示.

本书是作者在长期从事数学分析教学与改革的基础上结合多年经验整理而成的, 可作为高等院校理工科各专业本科生在学习数学分析第一学期课程时的学习材料, 也可供理工科专业考研复习时参考, 还可作为从事数学分析教学的高校教师的教学参考书, 特别可作为华东师范大学数学系所编《数学分析》教材的配套用书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析基本问题与注释: 一元微分学研究式教学法探索与实践/韩茂安编著. —北京: 科学出版社, 2018. 1

ISBN 978-7-03-055046-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ① 韩… Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 265192 号

责任编辑: 张中兴 梁 清 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 1 月第二次印刷 印张: 9 1/4
字数: 187 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

近年来作者在上海师范大学主讲数学专业的基础课数学分析第一学期的课程，所用教材是华东师范大学数学系所编的《数学分析》(第四版)，即文献 [1]. 作者针对每一节内容提出了五个基本问题，并尝试在教学方式上也做了新的探索，其要点如下.

1. 学生根据老师提供的"基本问题"来预习 (这是必须做的，也是关键的一步)，尽可能真正理解所学内容，包括主要概念、理论、方法、思路、难点、主要定理分析，总结出心得体会，并准备好在课上提问老师或者回答老师的提问，同时，也欢迎同学们随时随地给老师写信提问，老师将回信解答或在课堂讲解. 老师的作用主要是掌控进度、调动兴趣、激发思维.

2. 每堂 (3 节课) 按以下安排教学.

(1) 当堂自学与提问 (约 40 分钟). 学生根据老师事先提出的基本问题，在预习的基础上再进行当堂自学，加深理解；在学习过程中遇到问题马上向老师提问与请教. 老师当堂辅导答疑.

(2) 要点讲解 (约 60 分钟). 讲述当堂课要学习掌握的概念、理论与方法，讲解主要定理的证明思路和使用方法 (结合应用实例)，定理分析 (各条件作用与结论等分析与理解) 以及进一步的延伸 (例如，当定理部分条件成立时会有什么样的部分结论)；结合内容给出应用例子.

(3) 答疑、讨论、布置作业 (约 20 分钟). 学生就不明白之处进一步提问，对定理的理解和使用进行交流和分享，老师再做讲解. 最后布置作业.

上述教学过程可以概括为：先通过问题引领进行自学，后通过课堂提问来理解内容，再通过讲解要点来加深理解. 我们不妨将这种教学方法叫做"问题主导的研究式教学模式".

所有大学数学课程中，数学分析是数学专业最先学习的课程之一，也是最重要的数学课程之一 (因为它是所有数学后续课程学习的基础). 作者认为学好数学分析的诀窍在于：基于理解、学会推理、勤于思考、培养技能. 具体来说，就是要做到：刻苦自学、主动提问、认真听讲、独立做题、勤思善问、融会贯通. 于是，为了帮助学生理解和掌握好数学分析的理论和方法，作者根据自己的理解和体会，对每一节的基本问题给出进一步的注释，又对每一章精心挑选了测试题，并给出了关键步骤或提示. 经作者多年使用以及不断修改补充才形成了本书.

考虑到已有许多有关数学分析解题技巧的书出版，作者编著本书的主要目的在

于用通俗易懂的语言或以新的视角来诠释和解读所出现的重要概念和基本定理的证明方法与思路. 此外, 所有例子都是为了配合基本内容而精心挑选的, 许多例子的解法也是新颖的.

本书在写作过程中参考了文献 [1]~[7], 在此向这些文献的所有作者表示感谢. 本书的初稿在上海师范大学使用过多次, 在使用过程中丁玮教授提出了有益的修改意见. 河北师范大学的杨俊敏教授也曾在数学分析教学中参考过本书初稿, 提出了有价值的建议, 并为本书制作了图形. 在本书的出版过程中, 北京大学的李承治教授和科学出版社的张中兴老师仔细阅读了全稿, 并提出了一系列宝贵的修改意见和建议, 最后科学出版社的梁清老师又对书稿清样进行了认真的校对与规范. 作者在此一并向他们表示衷心感谢.

由于作者水平有限, 书中难免有不当之处, 恳请读者不吝赐教.

作　者
2017 年 7 月

目　　录

第 1 章　实数集与函数

1.1 实　　数

1.1.1 基本问题

1. 什么是无限小数表示? 什么样的有理数有两个 (等价的) 小数表示? 无限小数表示有什么作用? 试利用无限小数表示证明必有无穷多个无理数.

2. 什么是实数的 n 位不足近似和 n 位过剩近似? 它们具有什么性质?

3. 如果把无限小数表示作为实数的定义, 那么如何建立实数的大小与运算?

4. 实数的主要性质有哪些?

5. 实数的绝对值是如何定义的? 它有哪些基本性质?

1.1.2 要点讲解与注释

中学里学过, 整数之比称为有理数, 而无限不循环小数称为无理数, 有理数和无理数统称为实数, 实数与数轴上的点是一一对应的. 有理数的四则运算也是大家所熟悉的. 然而, 要严格建立实数的定义和运算及其性质是很不容易的, 是相当深奥的. 完整的实数理论出现于 19 世纪, 分别由戴德金 (Dedekind, 1831—1916) 和康托尔 (Cantor, 1845—1918) 等所给出, 他们所给实数的定义形异实同, 其本质都是视无理数为有理数之无限逼近. 这里, 我们简单地介绍引入实数定义的两种方法, 即无限小数表示和戴德金分划, 而涉及的细节可参考文献 [1] 中的附录或文献 [2] 中的绪论.

所谓无限小数表示是指形如 $x = a_0.a_1a_2\cdots$ 的量, 其中 a_0 为整数, 而每个 $a_j(j \geqslant 1)$ 为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 之一. 我们把这样的量称为一个实数. 利用这个表示就很容易定义有理数和无理数: 一个无限小数表示若出现无限循环, 就叫做有理数, 否则就叫做无理数. 关于无限小数表示, 我们需要明确下列三个约定.

(1) 出现无限个连续 0 可以写成有限位表示, 也就是说, 如果有 $k \geqslant 0$ 使当 $j \geqslant k+1$ 时有 $a_j = 0$, 则记

$$a_0.a_1a_2\cdots a_k = a_0.a_1a_2\cdots a_k00\cdots.$$

特别有 $a_0 = a_0.00\cdots$, $0 = 0.00\cdots$.

(2) 按照有理数的加法, 成立 $a_0 + 0.a_1a_2\cdots a_k = a_0.a_1a_2\cdots a_k$. 例如, $-0.3 = -1 + 0.7 = (-1).7$.

(3) 出现无限个连续 9 的无限小数表示可以转化成出现无限个连续 0 的无限小数表示, 并视它们相等; 反之亦然. 详之, 我们有

$$a_0.99\cdots=(a_0+1).00\cdots=a_0+1,$$

以及

$$a_0.a_1\cdots a_k99\cdots=a_0.a_1\cdots a_{k-1}(a_k+1)00\cdots=a_0.a_1\cdots a_{k-1}(a_k+1),$$

其中 $k\geqslant 1$, $a_k<9$.

利用不出现无限个连续 9 的无限小数表示 $x=a_0.a_1a_2\cdots$, 可以定义实数的整数部分 (记为 $[x]$) 和 (纯) 小数部分 (记为 $\{x\}$), 即

$$[x]=a_0,\quad \{x\}=0.a_1a_2\cdots.$$

进一步可以利用这样的表示定义正数和负数, 即若 $a_0>0$ 或 $a_0=0$ 且存在某个 $j\geqslant 1$ 使 $a_j>0$, 则称 x 为正数, 若 $a_0<0$, 则称 x 为负数. 此外, 利用无限小数表示可以定义实数的相等和大小, 使得任意两个实数 x 与 y, 关系 $x=y$, $x>y$ 与 $x<y$ 有且只有一个成立. 不过, 这里需要约定实数 x 与 y 的无限小数表示均不出现无限个连续 9 或均不出现无限个连续 0. 否则, 就无法比较其大小, 因为成立 $0.00\cdots=(-1).99\cdots$. 例如, 设 $x=a_0.a_1a_2a_3\cdots$, $y=b_0.b_1b_2b_3\cdots$, 它们均不出现无限个连续 9. 若存在整数 $k\geqslant 0$ 使 $a_k>b_k$, $a_j=b_j$, $0\leqslant j\leqslant k-1$, 则称 x 大于 y 或 y 小于 x, 记为 $x>y$ 或 $y<x$. 这里指出, 由于 a_k 与 b_k 均为非负整数, 因此 $a_k>b_k$ 意味着 $a_k\geqslant b_k+1$.

于是, x 为正数 (负数) 当且仅当 $x>0(x<0)$. 此外, 总有

$$x=[x]+\{x\},\quad 0\leqslant\{x\}<1,\quad x-1<[x]\leqslant x.$$

利用无限小数表示又不难证明有理数的稠密性和确界原理 (见 1.2 节), 而利用有理数的四则运算可以定义实数的四则运算. 例如, 设 x, y 为任意两个给定实数, 则可证必有唯一的实数 z, 使得任取满足 $x_1<x<x_2$, $y_1<y<y_2$ 的有理数 x_1, x_2, y_1 与 y_2, 均有 $x_1+y_1<z<x_2+y_2$. 于是, 我们定义 z 为 x 与 y 的和, 记为 $z=x+y$.

按照实数的加法, 若 $x=a_0.a_1a_2\cdots$, $y=b_0.b_1b_2\cdots$ 满足 $a_j+b_j\leqslant 9$, $j\geqslant 1$, 则

$$x+y=(a_0+b_0).(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)\cdots.$$

从而对任意 $k\geqslant 1$ 成立

$$x_k\leqslant x\leqslant a_0.a_1a_2\cdots a_k99\cdots=\bar{x}_k,\tag{1.1}$$

其中 $x_k = a_0.a_1a_2\cdots a_k$, $\bar{x}_k = a_0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$, 分别称为 x 的 k 位不足近似与 k 位过剩近似. 易见, x_k 随 k 增而不减, 而 $\bar{x}_k$ 随 k 增而不增.

不足近似与过剩近似具有下述性质 (这里的叙述与文献 [1] 略有不同).

命题　*设 $x = a_0.a_1a_2\cdots$ 与 $y = b_0.b_1b_2\cdots$ 为两个实数, 则 $x > y$ 当且仅当存在正整数 n 使 $x_n > \bar{y}_n$, 其中 x_n 表示 x 的 n 位不足近似, $\bar{y}_n$ 表示 y 的 n 位过剩近似.*

由于 1.2 节确界原理的证明要用到这个命题, 为了论证的完整性, 我们这里给出证明. 先证必要性. 设 $x > y$, 为确定计, 又不妨设它们的无限小数表示均不出现无限个连续 0. 于是, 由定义知存在 $k \geqslant 0$ 使 $a_k \geqslant b_k + 1$, 而对 $0 \leqslant j \leqslant k-1$ 有 $a_j = b_j$. 故由式 (1.1) 可知

$$\begin{aligned} x_k &= a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k-1)99\cdots \\ &= a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}(a_k-1) + 10^{-k} \\ &\geqslant a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}b_k + 10^{-k} = \bar{y}_k. \end{aligned}$$

因为 x 的无限小数表示不出现无限个连续 0, 故必存在 $n > k$ 使 $x_n > x_k$, 从而 $x_n > \bar{y}_k \geqslant \bar{y}_n$.

再证充分性. 设存在正整数 n 使 $x_n > \bar{y}_n$, 则由式 (1.1) 立知 $x > y$. 证毕.

上述命题的证明中出现名词 "必要性" 与 "充分性". 我们来解释一下它们的含义. 这个命题中, "$x > y$" 是一个明确的结论, 而 "存在正整数 n 使 $x_n > \bar{y}_n$" 是一个具体的条件. 由前者推出后者就是证明条件的必要性, 而由后者导出前者则是证明充分性. 一般地, 假设有这样一个命题或定理: 如果条件 A 成立, 则结论 B 必成立. 这个命题的逆否命题是: 如果结论 B 不成立, 则条件 A 必不能成立. 因此, 条件 A 足以保证结论 B 成立, 也即结论 B 就是条件 A 的必然结果. 我们把 A 称为 B 的充分条件. 而对这样一个命题的证明往往不去明确充分性和必要性. 然而, 很多命题或定理是以这样的形式出现的: 结论 B 成立的充要条件是条件 A 成立, 或者, 结论 B 成立当且仅当条件 A 成立. 在这个叙述中, 结论 B 先列了出来. 在证明这样一类命题或定理的时候, 往往需要明确充分性与必要性, 其中必要性部分就是在 "结论 B 成立" 的假设下推出条件 A, 简记为 $B \Rightarrow A$, 而充分性部分则是在 "条件 A 成立" 的假设下证明 B, 记为 $A \Rightarrow B$. 我们再看一个具体例子. 前面我们利用无限循环的无限小数表示定义了有理数. 进一步可证: 实数 x 是有理数的充分必要条件是存在互素整数 m 和 n, 且 $n \neq 0$, 使 $x = m/n$. 这里我们不打算证明这个命题, 只是借着它来解释充分性和必要性. 利用 "x 是有理数" 来导出 "$x = m/n$" 就是证明必要性, 利用 "$x = m/n$" 来导出 "x 是有理数" 就是证明充分性. 这个命题表明条件 "$x = m/n$" 既是 "x 是有理数" 的必要条件, 也是 "x 是有理数" 的充

分条件.

有时候命题或定理会以其他形式出现, 例如: 条件 A 成立当且仅当条件 B 成立, 这个命题的意思是说条件 A 和条件 B 是等价的, 在证明这种形式的命题时, 也可能分两部分进行, 即 $A \Rightarrow B$ 与 $B \Rightarrow A$, 但却一般 (并不是绝对) 不再明确哪部分是充分性, 哪部分是必要性, 因为这里出现的都是条件.

可能读者已经看到, 上面引入无限小数表示的方式与文献 [1] 有所不同 (当实数为负时), 这里的论证逻辑也有区别, 此处的出发点是利用无限小数表示来定义实数, 来引出正数和负数, 以及比较实数的大小, 再利用有理数引出实数的四则运算, 并导出实数的主要性质.

实数的主要性质有如下几条 (证略).

1. 实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除 (除数不为 0) 四则运算是封闭的.

2. 具有有序性, 即对任意实数 a, b, 关系 $a < b$, $a = b$, $a > b$ 有且仅有一个成立.

3. 序关系具有传递性: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$.

4. 实数具有阿基米德性: 若 $b > a > 0$, 则必存在正整数 n, 使 $na > b$.

5. 有理数集、无理数集都在实数集中稠密.

6. 实数集 $\mathbf{R}$ 与数轴上的点可建立一一对应关系 (因此, 以后经常 "点" 与 "数" 不加区分).

例 1.1.1　试利用无限小数表示证明: (1) 有无穷多个无理数; (2) 任意两个不同实数之间必有一个有理数和一个无理数.

证明　(1) 我们来构造出无穷多个无理数. 用 0^k 表示 k 个 0 连续排在一起, 例如, $0^2 = 00$, $0^3 = 000$. 令

$$x(1) = 0.010010001\cdots = 0.010^2 10^3 1\cdots,$$

$$x(2) = 0.001000100001\cdots = 0.0^2 10^3 10^4 1\cdots,$$

一般地,

$$x(k) = 0.0^k 10^{k+1} 10^{k+2} 1\cdots.$$

易见, 对任一 $k \geqslant 1$, $x(k)$ 都是正无理数, 且 $x(1) > x(2) > x(3) > \cdots$. 结论 (1) 得证.

(2) 设有两个不同实数 x 与 y, 不妨设 $x < y$, 于是可设

$$x = a_0.a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}a_ka_{k+1}\cdots,$$

$$y = a_0.a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}b_kb_{k+1}\cdots,$$

其中 $a_k < b_k$. 为了构造方便, 我们可设上述两个无限小数表示都不出现无限个连续 9. 于是可知, 必有 $m > l > k$, 使 $a_l < 9, a_m < 9$. 令

$$r = a_0.a_1a_2a_3\cdots a_k\cdots a_l9999999\cdots,$$

$$\alpha = a_0.a_1a_2a_3\cdots a_l\cdots a_{m-1}9101001\cdots.$$

易见, $x < \alpha < r < y$, r 为有理数, 而 α 为无理数. 结论 (2) 得证.

例 1.1.2　设有三个实数 a, b, c, 满足: 对任何正数 ε 都成立 $c-\varepsilon \leqslant a \leqslant b+\varepsilon$, 则 $c \leqslant a \leqslant b$. 特别地, 若对任何正数 ε 都成立 $|a| \leqslant \varepsilon$, 则 $a = 0$.

证明　用反证法. 题设条件中有个关键词 "任何", 也可以替换为 "任意", 而落脚点在于 "小" 上, 即正数 ε 是任意小的, 它是动态的, 这样的正数有无穷多个, 并且充满正半直线. 若结论 $a \leqslant b$ 不成立, 则由有序性就得 $a > b$. 从而 $(a-b)/2 > 0$, 取其为 ε, 则 $b+\varepsilon = (a+b)/2 < a$, 矛盾. 这样我们找出了一个正数 ε, 这个正数不满足题设条件, 即出现了不合于题设条件的矛盾现象. 这就表明我们要证明的结论是必须成立的, 于是必有 $a \leqslant b$. 同理可证 $c \leqslant a$. 特别地, 若对任何正数 ε 都成立 $|a| \leqslant \varepsilon$, 则取 $b = c = 0$ 即得 $a = 0$.

反证法是数学中一种重要的论证方法. 这种证明方法在数学分析里经常出现. 其基本步骤是: 假设结论不真, 然后利用正常的逻辑推理得出矛盾, 就是得出与题设不合的结论 (若是在推理中利用了题设条件, 就应该得出与某已知的或已证得的结果不合的结论). 出现这种现象的原因就是开始时 "假设结论不真".

1.1.3　补充材料: 戴德金分划简介

以上所介绍的利用无限小数表示来研究实数的方法比较具体, 也比较容易理解, 特别是, 我们可以构造出无穷多个无理数. 下面我们再简述利用戴德金分划来研究实数理论的方法.

设 A 为有理数集的一个非空真子集, A' 表示 A 关于有理数集的余集, 我们说 A 确定了一个分划, 记为 (A, A') 或简单地记为 A, 如果满足下列两条:

(1) 如果 $a \in A$, $a' \in A'$, 则 $a < a'$;

(2) 如果 $a \in A$, 则 A 中必包含大于 a 的有理数.

我们定义所有分划的全体称为实数集. 利用集合的包含关系可以引入该实数集上的一个序关系, 例如, 两个分划 (A, A') 与 (B, B'), 若 $A = B$, 则说它们相等, 记为 $(A, A') = (B, B')$, 若 A 是 B 的真子集, 则说 (A, A') 小于 (B, B'), 记为 $(A, A') < (B, B')$. 不难证明, 所有分划只有两类, 一类是 A' 有最小元, 即存在有理数 r, 使得 $A = \{p | p < r\}$, $A' = \{p | p \geqslant r\}$. 这样的分划确定唯一的一个有理数 r, 称这样的分划为有理分划或有理数. 另一类是 A' 没有最小元, 称这类分划为无理分

划, 并称无理分划为无理数. 可证全体有理数是稠密的, 以及实数集的有上界子集必有上确界.

进一步, 利用分划的定义和有理数的四则运算可以引入分划的四则运算, 即在实数集上引入四则运算, 它们满足一系列性质.

我们看到, 这样引入的实数是很抽象的, 还不是我们所熟知的数. 为了把这样的实数集跟我们所熟悉的实数集建立一个一一对应关系, 我们还需要把每个分划具体化到一个无限小数表示. 事实上可证, 任意分划 (A, A') 都可唯一地对应一个整数列 $\{c_n\}$, $n \geqslant 0$, 其中对 $j \geqslant 1$, c_j 为 $0, 1, \cdots, 9$ 中一员, 且有无穷个 c_j 满足 $c_j < 9$, 使得由 $a_n = c_0.c_1 \cdots c_n$ 定义的有理数列 $\{a_n\}$ 满足

$$(A_n, A'_n) \leqslant (A, A') < (\tilde{A}_n, \tilde{A}'_n), \quad n \geqslant 1,$$

其中 $A_n = \{p | p < a_n\}$, $\tilde{A}_n = \{p | p < a_n + 10^{-n}\}$, 于是, 若令 $x = c_0.c_1c_2c_3 \cdots$, 则这个量满足

$$a_n \leqslant x < a_n + 10^{-n}, \quad n \geqslant 1, \quad A = \{p | p < x,\ p\text{为有理数}\}.$$

这样一来, 分划 (A, A') 跟我们所熟悉的数 x 就有一一对应关系了, 因此, 就可以用 x 来替代 (A, A').

评注　实数是大家在中学里已经学过的概念, 但并没有严格地定义它. 许多数学分析教材 (例如文献 [1]) 中也没有严格地定义它, 但在这一节的注释中我们利用无限小数表示给出了实数的定义, 又在节末给出了实数的另一个定义, 即戴德金分划. 实数还有其他的定义. 当然这些定义在本质上是等价的, 虽然定义的方式不同. 显而易见, 用无限小数表示来定义实数是最容易理解的一个.

1.2　数集和确界原理

1.2.1　基本问题

1. 什么是区间与邻域, 它们又是如何表示的?

2. 什么是有界集、有上界集、有下界集, 什么是上确界、下确界?

3. 确界原理中的上确界和下确界是如何得到的? 请进一步思考: 确界原理的证明之初假设所述集合含有非负元素, 试给出理由; 如果不这么假设, 试按照该书中的证明思路给出直接证明.

4. 任一集合是否都有上下确界? 上下确界与最大值和最小值有何区别?

5. 思考: 对集合 $A = \{a\}$, 引入集合 $B = \{-a\}$, 由此探讨上界与下界的互转关系, 上确界与下确界的互转关系, 最大值与最小值的互转关系.

1.2.2 要点讲解与注释

区间是直线上最简单且常用的集合, 它分为开区间 (a,b)、闭区间 $[a,b]$ 和半开半闭区间 $[a,b)$ 或 $(a,b]$, 区间可以是有界的 (此时 a 与 b 均为有限数), 也可以是无界的 (此时 a 与 b 至少有一个是无穷大), 但包含端点的闭区间一定是有界的. 无界区间又称为无穷大区间.

某一点 x 的邻域是一个以该点为中心的开区间 $(x-\delta,x+\delta)$, 其中 δ 为某正数, 称其为该邻域的半径, 它可以很小. 该邻域常称为点 x 的 δ 邻域, 记为 $U(x,\delta)$ 或 $U_\delta(x)$. 从该区间挖去该点所得集合 (记为 $U_\delta(x)\backslash\{x\}$ 或 $U_\delta(x)-\{x\}$) 称为该点的去心邻域或空心邻域, 记为 $U_\delta^\circ(x)$. 空心邻域实际上是两个开区间的并, 因此严格来说, 一个点的空心邻域已经不是该点的邻域了.

因为实数有大小之分, 所以实数集的子集就出现是否有上界、有下界的问题. 既有上界又有下界的集合才是有界集. 一个集合若有上界, 就有很多, 同样, 若有下界, 也会有很多. 于是一个很自然的问题就是: 一个有上界之集的所有上界之中是否有最小者, 即是否有上确界? 一个有下界之集的所有下界之中是否有最大者, 即是否有下确界? 下面的确界原理回答了这个问题.

确界原理 任一非空有上界集必有 (有限的) 上确界; 任一非空有下界集必有 (有限的) 下确界.

上确界和下确界是数学分析中出现的第一个新概念, 一定要正确理解. 上确界首先是一个上界, 其次, 任何比之较小者不再是上界. 因此, 上确界就是最小的上界. 同样, 下确界就是最大的下界. 于是, 上下确界都是唯一存在的. 为了方便, 我们约定无上界之集以正无穷为上确界, 无下界之集以负无穷为下确界. 但对空集, 我们不定义其上下确界. 这样一来, 确界原理可以改述为: 任一非空集合都有唯一的上确界和下确界.

这一节内容的重点是理解上下确界的概念以及确界原理的证明. 现在我们以上确界为例简述一下确界原理的证明及其思路.

设 S 为一非空有上界集, 则存在 $x_0\in S$, 且它以某整数 $N+1$ 为其不可达上界, 即对一切 $x\in S$ 有 $x<N+1$, 特别有 $[x_0]<N+1$. 于是, 下一步的任务就是在区间 $[[x_0],N+1)$ 上把 S 的上确界找出来, 并用一个无限小数表示的形式把它写出来. 为确定无限小数表示的第一个数, 考虑区间 $[[x_0],N+1]$ 的分点 $[x_0]+1,[x_0]+2,\cdots,N+1$, 它们之中必有 S 的最小不可达上界 (注意, 这里的最小是指在这些分点的范围内最小), 记其为 $n+1$, 其中 $[x_0]\leqslant n\leqslant N$ (注意, $N+1$ 已经是不可达上界, 而 $[x_0]$ 不是不可达上界), 则 n 不是 S 的不可达上界, 于是对一切 $x\in S$ 有 $x<n+1$, 但存在 $a_0\in S$, 使 $a_0\geqslant n$. 这个 n 就是所要找的第一个数.

区间 $[n,n+1]$ 有分点 $n.1,n.2,\cdots,n.9,n.9+10^{-1}$, 其中 $n.9+10^{-1}=n+1$, 与

上类似, 它们之中必有 S 的最小不可达上界, 记其为 $n.n_1+10^{-1}$, $0\leqslant n_1\leqslant 9$, 于是对一切 $x\in S$ 有 $x<n.n_1+10^{-1}$, 但存在 $a_1\in S$, 使 $a_1\geqslant n.n_1$.

这样继续下去, 每次都找出一个有理数, 它是那一步的最小的不可达上界, 这样就得到一个含有无穷个有理数之集 $\{n.n_1n_2\cdots n_k \mid k\geqslant 1\}$, 而且其元素是随着 k 的变大而不断增加的. 于是, 这个过程就产生一个无限小数表示, 即 $\eta=n.n_1n_2\cdots$, 则不难知道这个 η 就是所要找的上确界.

上述证明可以做一点调整: 在第一步中 $x<N+1$ 改为 $x\leqslant N+1$, 区间 $[[x_0],N+1)$ 改为 $([x_0]-1,N+1]$, 则用同样方法找到的 n 满足: 对一切 $x\in S$ 有 $x\leqslant n+1$, 但存在 $a_0\in S$, 使 $a_0>n$. 以后的每一步中 "不可达上界" 都改为 "上界", 用这种方法也得到 S 的上确界, 显然这样得到的上确界必与上面的相等, 但它们的无限小数表示的形式可能不同.

例如, 取 $S=[0,1]$, $x_0=0$, 则按原来的证法得到的上确界的无限小数表示是 $1.00\cdots$, 而按照调整后的证明所得的上确界之无限小数表示是 $0.99\cdots$. 而对集合 $S=[0,1)$, 两种证法所得的上确界之无限小数表示都是 $0.99\cdots$.

请读者思考: 如果在确界原理的证明之初, 做这样的假设: 设集合 S 含有一个非负数. 这样做合理吗? 详之, 在这样做之前需要做一个什么样的补充说明? 答案在下面的例 1.2.2 中.

确界原理是我们接触的实数理论的第一个基本定理, 其他的基本定理将以确界原理为基础推出来. 很多时候我们把确界原理视为明显的事实而经常不自觉地使用, 而对涉及上下确界的问题常常利用上下确界的定义, 下面给出几个简单的例子.

例 1.2.1　设 A 与 B 为非空集, 且 $A\subseteq B$, 则 $\sup A\leqslant \sup B$, $\inf A\geqslant \inf B$.

证明　所述结论几乎是很显然的事实. 由所设条件, $\forall x\in A$, 都有 $x\in B$, 从而由上确界定义, $x\leqslant \sup B$. 这表示 $\sup B$ 是集合 A 之上界, 故必有 $\sup A\leqslant \sup B$. 同理可证 $\inf A\geqslant \inf B$.

例 1.2.2　设 S 为非空集, c 为一常数, 记 $S+c=\{x+c|\ x\in S\}$, 则 $\inf(S+c)=\inf S+c$, $\sup(S+c)=\sup S+c$.

证明　只证 $\inf(S+c)=\inf S+c$. 由 $\inf S$ 的定义, 对一切 $x\in S$ 有 $x\geqslant \inf S$, 且对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $x'\in S$ 使 $x'<\inf S+\varepsilon$. 于是, 有

$$\forall x\in S,\ x+c\geqslant \inf S+c,\ 且\ x'+c<\inf S+c+\varepsilon.$$

从而由 $\inf(S+c)$ 的定义即知 $\inf(S+c)=\inf S+c$.

例 1.2.3　设 A 与 B 为非空集, 且 $\forall x\in A$, $y\in B$ 均有 $x\leqslant y$, 则 $\sup A\leqslant \inf B$.

证明　任给 $y\in B$, 由假设知 $\forall x\in A$ 均有 $x\leqslant y$, 即 y 是 A 的上界, 于是由上确界定义立知 $\sup A\leqslant y$. 又由于 $y\in B$ 是任意的, 故 $\sup A$ 是 B 的一个下界, 进而由下确界的定义立知 $\sup A\leqslant \inf B$. 即为所证.