

YANJIUSHENG SNUXUESHITI JIEDA

研究生数学试题解答

下 册

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

武汉工学院电子工程系

目 录

二、代数部分

62. 上海科技大学 (线性代数) 1
63. 上海纺织工学院 (线性代数) 6
64. 中山大学 (高等代数) 13
65. 中国科技大学 (高等代数) 20
66. 中国科技大学 (线性代数) 27
67. 北京工业学院 36
68. 吉林大学 (高等代数) 41
69. 吉林大学 (高等代数) 48

三、复变函数部分

70. 北京大学 53
71. 宁夏大学 58
72. 成都科技大学 65

四、微分方程部分

73. 上海交通大学 (数理方程) 71
74. 北京大学 (常微分方程) 82
75. 兰州大学 (常微分方程) 87
76. 武汉大学 96
77. 复旦大学 103

五、数学分析部分

78. 山东大学 111
79. 上海师范大学 (一) 118

80. 上海师范大学(二)	127
81. 上海科技大学	134
82. 上海纺织工学院	141
83. 中山大学(一)	147
84. 中山大学(二)	155
85. 中国科技大学(一)	159
86. 中国科技大学(二)	166
87. 中国科技大学(三)	171
88. 中国科技大学(四)	175
89. 中国科技大学(五)	178
90. 中国科学院计算中心(一)	187
91. 中国科学院计算中心(二)	195
92. 中国科学院数学所	202
93. 长沙铁道学院(一)	210
94. 长沙铁道学院(二)	215
95. 北京大学(一)	222
96. 北京大学(二)	231
97. 北京大学(三)	238
98. 北京工业学院	242
99. 北京师范大学	248
100. 兰州大学	254
101. 东北工学院	261
102. 华东工程学院	268
103. 吉林大学(一)	273
104. 吉林大学(二)	278
105. 南开大学	283
106. 复旦大学	290
107. 福州大学	294

二、代数部分

62 上海科技大学 (线性代数)

一、(15分)

1. 证明: 在二维向量空间 R^2 中, 向量 $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ 线性相关的充分必要条件是 $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

2. 写出在 n 维向量空间 R^n 中, 向量组 $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), (i=1, \dots, n)$ 为线性相关的充分必要条件.

证明: 若 (a_1, a_2) 与 (b_1, b_2) 线性相关, 则有不全为0的数 c_1, c_2 使

$$c_1(a_1, a_2) + c_2(b_1, b_2) = (0, 0).$$

不妨设 $c_1 \neq 0$, 除以 c_1 得到

$$(a_1, a_2) = -\frac{c_2}{c_1}(b_1, b_2)$$

亦即

$$a_1 = -\frac{c_2}{c_1}b_1, \quad a_2 = -\frac{c_2}{c_1}b_2$$

故有

$$a_1 b_2 = -\frac{c_2}{c_1}b_1 b_2 = -\frac{c_2}{c_1}b_2 b_1 = a_2 b_1.$$

反之, 若 $a_1 b_2 = a_2 b_1 = k$, 若 $k = 0$, 不妨设 $a_1 = 0$, 若 $a_2 = 0$, 则 (a_1, a_2) 为0向量, 当然 (a_1, a_2) 与 (b_1, b_2) 线性相关; 若 $b_1 = 0$, 则化为 $(0, a_2), (0, b_2)$ 当然线性相关. 若 $k \neq 0$, 则有

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \mu$$

从而有

$$(a_1, a_2) - \mu(b_1, b_2) = 0$$

即 (a_1, a_2) 与 (b_1, b_2) 线性相关. 证毕.

在 R^n 中, 向量组 $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), (i=1, \dots, n)$ 线性相关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

二、(15分)

1. 验证: 在 n 维欧氏空间 R^n 中, 与子空间 W 中的一切向量都正交的所有向量的集合 $W^\perp$ 也是 R^n 的一个子空间.

证明: 设 $a, b \in W^\perp$, α, β 为常数, 则于任何 $v \in W$.

$$a \cdot v = 0, b \cdot v = 0$$

于是有

$$(\alpha a + \beta b) \cdot v = (\alpha a) \cdot v + (\beta b) \cdot v = \alpha a \cdot v + \beta b \cdot v = 0$$

故知 $\alpha a + \beta b \in W^\perp$. 从而知 $W^\perp$ 为一线性子空间.

2. 在四维向量空间 R^4 中, 设 W 是由向量 $(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)$ 所生成的一个子空间, 试求出子空间 $W^\perp$.

解 设向量 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in W^\perp$, 则有

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

这个方程组显然有无穷多组解, 我们从中挑出两组线性无关的: $(1, 1, -1, 0), (1, -1, 0, 1)$ 而 $W^\perp$ 又必为 2 维的, 故 $W^\perp$ 就是由 $(1, 1, -1, 0)$ 与 $(1, -1, 0, 1)$ 所生成的子空间.

三、(15分)在欧氏空间 R 中定义变换 T :

$$\alpha T = \alpha - k(\alpha, \omega)\omega, \quad \alpha \in R, \quad \omega \text{ 为单位向量}$$

其中 ω 是一个单位向量, k 是一个实数, (α, ω) 是向量 α 与 ω 的内积.

1. 验证: T 是一个线性变换;

证明: 对任意 $\alpha, \beta \in R$, 我们有

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)T &= (\alpha + \beta) - k((\alpha + \beta), \omega)\omega \\ &= \alpha + \beta - k(\alpha, \omega)\omega - k(\beta, \omega)\omega \\ &= \alpha T + \beta T. \end{aligned}$$

又对任何实数 λ , 有

$$\begin{aligned} (\lambda\alpha)T &= \lambda\alpha - k(\lambda\alpha, \omega)\omega \\ &= \lambda(\alpha - k(\alpha, \omega)\omega) = \lambda(\alpha T). \end{aligned}$$

从而按定义知 T 为一线性变换.

2. 求出 k 值, 使 T 为正交变换.

解 先求出线性变换 T 所对应的矩阵 A

$$\begin{aligned} \alpha T &= \alpha - k(\alpha, \omega)\omega = \alpha I - k\alpha\omega'\omega \\ &= \alpha(I - k\omega'\omega), \end{aligned}$$

可见 $A = I - k\omega'\omega$.

若记 A 的行向量为 $a_j, j=1, \dots, n$, 则为使 A 为正交阵, 只

$$\text{须有 } \begin{cases} a_j \cdot a_j = 1 & j=1, \dots, n, \\ a_i \cdot a_j = 0 & i \neq j. \end{cases}$$

具体写出来即

$$\begin{cases} k^2\omega_j^2\omega_1^2 + \dots + k^2\omega_j^2\omega_{j-1}^2 + (1 - k\omega_j^2)^2 + k^2\omega_j^2\omega_{j+1}^2 \\ \quad + \dots + k^2\omega_j^2\omega_n^2 = 1 \\ k^2\omega_i\omega_j\omega_1^2 + k^2\omega_i\omega_j\omega_2^2 + \dots + (1 - k\omega_j^2)(-k\omega_i\omega_j) + \\ \quad \dots + (-k\omega_i\omega_j)(1 - k\omega_j^2) + \dots + k^2\omega_i\omega_j\omega_n^2 = 0 \end{cases}$$

化简并注意 $\|\omega\| = 1$, 得到

$$\begin{cases} 1 - 2k\omega_j^2 + k^2\omega_j^2 = 1, & j=1, \dots, n \\ -2k\omega_i\omega_j + k^2\omega_i\omega_j = 0 & i \neq j \end{cases}$$

解得 $k=0$ 或 $k=2$. 即当 $k=0$ 或 $k=2$ 时, T 为正交变换.

四、(20分) 设 A 是一个 $n \times n$ 矩阵. 证明: 如果 $A^2 = A$, 则 A 的特征值是 1 或 0, 且 A 的秩等于 A 的迹.

证明 设 A 的 *Jordan* 标准形为 J , 即有非异方阵 P , 使

$$P^{-1}AP = J.$$

于是有

$$J = P^{-1}AP = P^{-1}A^2P = P^{-1}APP^{-1}AP = J^2.$$

设

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

其中 $J_j (j=1, \dots, s)$ 为 *Jordan* 小块, 则有

$$J^2 = \begin{pmatrix} J_1^2 & & \\ & J_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s^2 \end{pmatrix}$$

从而有

$$J_j = J_j^2, \quad j=1, 2, \dots, s.$$

此可知, 诸 J_j 都是一阶的且对应的特征值为 0 或 1. 因此

设

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \underbrace{\dots}_{r \text{ 个}} \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 & \dots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq n$$

于是

$$\text{秩}(A) = \text{秩}(J) = T_r(J).$$

但在矩阵求迹的运算中可交换矩阵的次序, 故有

$$T_r(J) = T_r(P^{-1}AP) = T_r(APP^{-1}) = T_r(A)$$

从而得到

$$\text{秩}(A) = T_r(A).$$

五、(15分) 设 A, B 是两个 $n \times n$ 实对称矩阵且 A 为正定.

证明必存在可逆矩阵 P , 使

$$A = P'P, \quad B = P' \begin{pmatrix} u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n \end{pmatrix} P,$$

其中 P' 为 P 的转置矩阵.

证明 因为 A 为正定实对称矩阵, 故有非异方阵 Q , 使

$$Q A Q' = I_n$$

令 $B_1 = Q B Q'$

则 B_1 也是 $n \times n$ 实对称矩阵, 于是有正交变换 T , 使

$$B_2 = T B_1 T'$$

为对角形, 同时

$$T Q A Q' T' = T T' = I_n.$$

令 $P = (TQ)'^{-1}$, 则 $P' = (TQ)^{-1}$, 于是

$$A = (TQ)^{-1} (TQ)'^{-1} = P' P$$

而

$$B = (TQ)^{-1} B_2 (TQ)'^{-1} = P' B_2 P.$$

六、(20分) 设 A 是一个 $n \times n$ 矩阵有 n 个不同特征值, 则凡满足 $AB = BA$ 的 $n \times n$ 矩阵 B , 其特征矩阵的初等因子都是一次的.

证明 因为 A 有 n 个不同的特征值, 故它的 *Jordan* 标准形为对角形, 且对角元恰为它的 n 个特征值, 亦即有非异的

矩阵 P , 使

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

记 $B_1 = P^{-1}BP$, 则

$$B_1 J = P^{-1}BPP^{-1}AP = P^{-1}BAP = P^{-1}ABP = JB_1.$$

若记 $B_1 = (b_{ij})$, 则

$$B_1 J = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$JB_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix}$$

比较两个得阵的诸相同位置的元素, 并注意 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 互不相同, 便得 $b_{ij} = 0, i \neq j$.

从而 B_1 为对角矩阵, 当然它的特征矩阵的初等因子都是一次的。因为 $B \sim B_1$, 故 B 的特征矩阵的初等因子也都是一次的。

63 上海纺织工学院 (线性代数)

一、(10分) 已知 1998, 2196, 2394, 1800 都能被 18 除尽, 试证 (不能用算行列式的值来证明): 四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

也能被18整除。

证法(一) 将第1列乘以1000后加到第4列, 将第2列的100倍再加到第4列, 再将第3列的10倍加到第4列, 于是得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 1998 \\ 2 & 1 & 9 & 2196 \\ 2 & 3 & 9 & 2394 \\ 1 & 8 & 0 & 1800 \end{vmatrix}$$

因第4列所有元素都能被18整除, 故行列式亦能被18整除。

证法(二) 因为第3列可以被9整除, 第4列能被2整除, 故行列式可被18整除。

二、(10分) 当 m 为何值时, 下列二次齐式为正定:

$$5\xi_1^2 + \xi_2^2 + m\xi_3^2 + 4\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3$$

解法(一) 这个二次齐式所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

计算行列式的值可得 $m-2>0$, 即当 $m>2$ 时, 所论二次齐式是正定的。

解法(二) 这个二次齐式所对应的矩阵的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & m-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (6+m)\lambda^2 - (6m-1)\lambda + (m-2) = 0 \quad (1)$$

为使原二次齐式为正定, 必须且只须三个特征根均为正, 利用根与系数的关系便知有 $m-2>0$, 即 $m>2$. 这时特征方

程(1)之奇次项系数为负, 偶次项系数均为正, 故不可能有负根, 由此知当 $m > 2$ 时, 三个特征根均为正, 此时原二次齐式为正定。

解法(三) 这个二次齐式所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}$$

利用合同变换将它化为对角形:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & m - \frac{1}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & m - 2 \end{pmatrix}$$

由二次型的惯性定理知原二次齐式正定当且仅当 $m > 2$ 。

三、(21分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, 计算 A^{100}

解 先求 A 的 *Jordan* 标准形:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & \lambda - 3 \\ \lambda - 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & \lambda - 3 \\ 0 & \frac{1}{2}(\lambda - 2)(\lambda - 3) - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 4) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因而有

$$A \sim J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

再用待定系数法求化标准形所用的非异方程 P : 设

$$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

则有

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3bc & ac3 \\ -3bd & 1 + 3ad \end{pmatrix}$$

于是得到联立方程组

$$\begin{cases} 1 - 3bc = 2 \\ -3bd = 2 \\ 3ac = 1 \\ 1 + 3ad = 3 \\ ad - bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = -\frac{1}{3} \\ bd = -\frac{2}{3} \\ ac = \frac{1}{3} \\ ad = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = -\frac{1}{3} \\ d = 2c \\ a = -b \end{cases}$$

可以求得一组解:

$$a = 1, b = -1, c = \frac{1}{3}, d = \frac{2}{3}$$

于是 $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

因而

$$\begin{aligned} A^{100} &= P J^{100} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2 + 4^{100}) & \frac{1}{3}(-1 + 4^{100}) \\ \frac{2}{3}(-1 + 4^{100}) & \frac{1}{3}(1 + 2 \times 4^{100}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其它方法请看吉林大学(一)高等代数第一题

四、(21分)满秩矩阵, 正交矩阵以及对称矩阵(设有逆矩阵), 它们的逆矩阵是否仍为同类矩阵? 为什么? 并分别举出满秩矩阵, 正交矩阵以及对称矩阵各一例.

解: 1° 满秩矩阵的逆仍为满秩矩阵.

因为按定义 $AA^{-1} = I$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0$$

故 A^{-1} 为满秩矩阵, 而且降秩矩阵根本没有逆矩阵.

2°. 正交阵的逆矩阵仍为正交阵.

若 T 为正交阵, 按定义有

$$TT' = I,$$

$$(T')'T' = I.$$

这就表示 T' 为正交阵。

3°. 对称矩阵的逆矩阵亦为对称矩阵。

设 A 为对称矩阵, 即 $A' = A$. 由

$$AA^{-1} = I$$

取转置有

$$I = (A^{-1})' A'.$$

两端右乘 $(A')^{-1}$ 即得

$$A^{-1} = (A')^{-1} = (A^{-1})'$$

这就是说 A^{-1} 为对称阵。

4°. 例如:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A_1, A_2, A_3 都是满秩的, A_2 是正交阵, A_2, A_3 都是对称矩阵。

五、(18分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是线性空间 V 的两个基底, 且

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P,$$

其中

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果 V 中元 a 在这二个基底下的坐标分别为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

试证

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

证明 按坐标定义有

$$\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = a = \sum_{j=1}^n y_j \beta_j \quad (1)$$

按已知有

$$\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i$$

代入(1)式有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i &= \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \right) \alpha_i \end{aligned} \quad (2)$$

因 $\{\alpha_i, i=1, \dots, n\}$ 为基底, 故

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i=1, \dots, n.$$

写成矩阵形式即

$$x = Py.$$

证毕.

六、(20分) 试证 n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似的充分必要

条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

证法(一) 充分性。 设 n 个线性无关的特征向量是 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 它们分别对应的特征值是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 令

$$B = (v_1, v_2, \dots, v_n),$$

则 B 非异且

$$\begin{aligned} AB &= A(v_1, v_2, \dots, v_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

从而有

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

即 A 相似于对角矩阵。

必要性。 设

$$\sim C = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$$

又设 $c_1, \dots, c_n$ 中互异的值为 $c_1, \dots, c_r$, 重数分别为 $t_1, \dots, t_r$, 则

$$t_1 + \dots + t_r = n$$

对于齐次线性方程组

$$(\lambda I - A)x = 0,$$

当 $\lambda = c_j$, ($j=1, \dots, r$) 时, 矩阵 $(\lambda I - A)$ 的秩为 $n - t_j$,

因而有 t_j 个线性无关解向量: $v_k^j, k=1, \dots, t_j$. 它们就是 A 的属于 c_j 的特征向量。又因属于不同特征值的向量线性无关, 故可以断言, 向量组 $\{v_k^j, k=1, \dots, t_j; j=1, \dots, r\}$

线性无关，且恰为 n 个。证毕。

证法(二) 充分性。设 A 的Jordan标准形为 J ：

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

若 α 为 J 的特征向量，即 $J\alpha = \lambda\alpha$

则左乘 P 有

$$AP\alpha = PJP^{-1}P\alpha = PJ\alpha = P\lambda\alpha = \lambda P\alpha.$$

即 $P\alpha$ 为 A 的特征向量。又因 P 非异，故知 A 与 J 之线性无关特征向量数相同。而 J 的每个Jordan小块恰有一个特征向量，从而 J 的线性无关的特征向量恰为 s 个，故 $s=n$ ，这就是说每个Jordan块都是一阶的，亦即 J 为对角矩阵。

必要性。设

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}.$$

则

j 列

$$Je_j = c_j e_j, \quad e_j' = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad j = 1, \dots, n.$$

即 J 有 n 个线性无关的特征向量，从而 A 亦有 n 个线性无关的特征向量。

64 中山大学 (高等代数)

一、(25分)完成下列计算：

1. 已知

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求 A^{-1}

解 将 A 写成分块的形式:

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

容易看出

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ D^{-1} & -D^{-1}BC^{-1} \end{pmatrix}$$

对于二阶方阵 C, D , 容易算出其逆分别为

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

于是

$$D^{-1}BC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

最后得到

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 +$

$13x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ 为标准形, 并求出相应的非退化线性变换.

解 显然, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 所对应的对称矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -1 & 2 \\ -1 & 13 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$