普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

西南交通大学数学学院 编

科学出版社

普[redacted]见划教材

线性代数

西南交通大学数学学院　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书不仅涵盖研究生入学考试大纲线性代数部分的相关内容，而且更注重培养学生在抽象线性空间内处理理论问题的能力. 全书共四章，从学生熟悉的中学代数课程内容出发，依此建立矩阵的初等理论，使学生受到线性代数基本计算的训练，如求解线性方程组、求逆矩阵、计算行列式等；而后将矩阵提升到抽象的线性空间和线性映射理论，使学生认识到矩阵理论的许多问题(标准型、特征值、特征向量、相似等)都可以在线性空间中很直观简明地处理；最后讲授欧几里得空间与二次型理论. 每章各节后均配备针对性习题，帮助读者掌握分析和思考的方法.

本书可作为高等学校自然科学、工程技术、经济管理等相关专业的线性代数课程教材，也可作为相关实际工作者的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/西南交通大学数学学院编. —北京：科学出版社, 2017.7
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-053921-2

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①西…　Ⅲ. ① 线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 164800 号

责任编辑: 王胡权　罗　吉 / 责任校对: 彭　涛
责任印制: 白　洋 / 封面设计: 华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

三河市书文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 7 月第　一　版　开本: 720 × 1000 1/16
2017 年 7 月第一次印刷　印张: 11 1/2
字数: 232 000

定价: 30.00 元

前言

Preface

西南交通大学创建于 1896 年，是中国第一所工程高等学府，是中国土木工程、交通工程、矿冶工程高等教育的发祥地，交通大学两大最早源头之一. 学校以“唐山交大”“唐院”享誉海内外，素有“东方康奈尔”之美誉. 在学校迎来 120 华诞之时，我们本着“知识基础厚度决定认知高度”的思想对线性代数课程教学的各主要环节进行了调整，目的是使学生接受必要的、足够强度的严格训练，使之尽早融入学校构建的“价值塑造、人格养成、能力培养、知识探究”四维一体的拔尖创新人才培养体系. 为与修订的教学计划相配合，我们编写了本书，以记录我们对理工科人才培养的思考.

作为大学一年级的两大基础课程之一，线性代数比高等数学具有更高的抽象性和一般性. 它所研究的核心内容是线性空间及相互关系 (线性映射). 它是概括了诸多具体的客观事物的共性后形成的一般规律，因此有广泛的应用，在自然科学、工程技术、经济人文等学科的学习以及实际工作中都非常重要. 在线性代数课程中对学生进行抽象思维的训练是提高学生整体素质的一个重要手段. 在教学中，我们应当培养学生在抽象线性空间内处理理论问题的能力，既能把具体的问题转化为抽象线性空间和线性映射的问题来处理，又会把抽象的问题具体化. 为了达到此目的，我们在课程设计上作了以下“提升”. 首先从学生熟悉的中学代数课程内容出发，将二元 (三元) 一次方程组提升为任意的 m 个方程 n 个未知量的一般线性方程组. 依此建立矩阵的初等理论，使学生受到线性代数基本计算，如求解线性方程组、求逆矩阵、计算行列式等的训练. 而后将矩阵提升到抽象的线性空间和线性映射理论，使学生认识到矩阵是线性映射 (变换) 在线性空间取定基后的具体表现形式，矩阵理论的许多问题如标准型、特征值、特征向量、相似以及合同等都可以在线性空间中很直观简明地处理，让学生明确线性代数是以线性空间与线性映射为

主要研究内容，以矩阵为主要研究工具的一门学问.

本书由刘品、阳锐顺、秦应兵、秦克云编写. 第 1 章由阳锐顺和秦应兵执笔，讲授矩阵的初等理论. 我们将行列式内容编排在此以使矩阵的初等理论更显集中；第 2 章和第 3 章由刘品执笔，讲授线性空间和线性映射理论；第 4 章由秦克云执笔，讲授欧几里得空间与二次型理论.

叶建军教授、谢云丽老师对本书进行了细心的审阅，提出了许多宝贵的修改意见. 本书是西南交通大学线性代数课程教学改革的一个体现，自始至终得到杨晗教授、潘小东副教授的热情支持. 编者在此向他们表示诚挚的感谢.

感谢西南交通大学和数学学院对本课程建设的关心和支持. 感谢科学出版社为本书的完善与出版付出的辛勤劳动. 我们期待各位同行专家和读者提出宝贵意见，敬请联系西南交通大学数学学院刘品：liupin@swjtu.edu.cn.

编 者

2017 年 4 月

于西南交通大学

目 录 Contents

第1章 矩 阵

Chapter 1

矩阵不仅是研究 (有限维) 线性空间的重要工具，而且在自然科学、工程技术中都有着大量的应用. 本章介绍矩阵的概念和矩阵的运算，讨论矩阵的初等变换，方阵的行列式等理论.

如无特别说明，本书所有章节均限定在实数域 $\mathbb{R}$ 上讨论.

1.1 矩 阵

1.1.1 矩阵的概念

在实际生活中，需要对大量数据进行整体处理，常常把它们做成一个数表. 比如，在某一地区，有 m 个煤炭产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 和 n 个销售点 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，用 a_{ij} 表示煤炭从产地 A_i 运到销售点 B_j 的数量，那么调配方案就可以用数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

表示.

在中学代数课程中，已经学过二元 (三元) 一次方程组. 当将方程的个数推广到任意的 m，未知量的个数推广到 n 时，可以得到一般的 n 元线性方程组. n 元线性方程组的一般形式为

$$
(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}
$$

其中，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示 n 个未知量，m 是方程的个数，a_{ij} $(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$ 称为方程组的系数，b_i $(i = 1, \cdots, m)$ 称为常数项. 系数 a_{ij} 的第一个下标 i 表示它在第 i 个方程，第二个下标 j 表示它是未知量 x_j 的系数. 方程组中未知量的个数与方程的个数不一定相等. 如果方程组右端的常数项全部为 0, 即

$$
b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,
$$

则称线性方程组为**齐次线性方程组**.

将系数按照它们在 (1) 中的位置排列成数表，记为

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},
$$

再将常数项 $b_1, \cdots, b_m$ 按照它们在 (1) 中的位置排在最后一列构成下面的数表，记为

$$
\bar{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.
$$

方程组 (1) 的本质属性都可以通过数表 $A, \bar{\boldsymbol{A}}$ 进行刻画.

一般地，我们有

定义 1.1.1 由 $m \times n$ 个数组成的 m 行 n 列的数表

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

称为一个 $m\times n$**矩阵**，简称为**矩阵**，通常记为

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$

或者用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等表示. 称 a_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素，i 称为元素 a_{ij} 的行标，j 称为列标, 其中

$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n.$$

称

$$\alpha_i=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$$

为矩阵的第 i 行，而称

$$\beta_j=\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$$

为矩阵的第 j 列.

线性方程组 (1) 对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为其**系数矩阵**，$\bar{\boldsymbol{A}}$ 称为其**增广矩阵**. 线性方程组 (1) 与它的增广矩阵一一对应.

定义 1.1.2 若两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times k}$, 满足

$$m=l,n=k.$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**同型矩阵**.

如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 对应的元素都相等，即

$$a_{ij}=b_{ij},\ i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n.$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$**相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.1.2 特殊矩阵

下面介绍一些非常重要的特殊矩阵.

1. 零矩阵

元素全为零的矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

2. 行矩阵与列矩阵

称一个 $1\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

为行矩阵，也称为 (n 维)**行向量**. 类似地，称 $n\times 1$ 矩阵

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{pmatrix}$$

为列矩阵，也称为 (n 维)**列向量**.

注意到 $m\times n$ 矩阵可以看成是由 m 个 n 维行向量构成，或者是 n 个 m 维列向量构成.

3. 方阵

行数与列数相同的矩阵称为方阵，具体地，将 $n\times n$ 的矩阵称为 n 阶方阵，简记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_n$. 在矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中，元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的位置称为矩阵的**主对角线**.

4. 对角矩阵与单位矩阵

方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

称为对角矩阵，也记为

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

若对角矩阵对角线上的元素全相等，则称其为 n 阶**数量矩阵**. 数量矩阵形如

$$\begin{pmatrix} d & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & d \end{pmatrix}.$$

若 n 阶对角矩阵对角线上的元素全为 1，则称其为 n 阶单位矩阵，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或简记为 $\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

5. 三角矩阵

当方阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线下 (上) 方的元素都是零时，称 $\boldsymbol{A}$ 为上 (下) 三角矩阵. 上三角矩阵形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

下三角矩阵形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

6. 对称矩阵与反对称矩阵

如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$a_{ij}=a_{ji}\ (1\leqslant i,j\leqslant n),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**. 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$a_{ij}=-a_{ji}\ (1\leqslant i,j\leqslant n),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**. 注意，若 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵，则 $a_{ii}=0$, 即反对称矩阵的主对角线上的元素全为 0.

例 1.1.3 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&0\\3&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&2&3\\-2&0&1\\-3&-1&0\end{pmatrix}$$

分别是对称矩阵和反对称矩阵.

1.1.3 矩阵的转置

定义 1.1.4 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列互换，所得到的矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置**，记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. 即，如果

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

注 1.1.5 (1) 显然

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}.$$

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(3) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 同型且满足

$$b_{ij}=-a_{ij},(1\leqslant i,j\leqslant n),$$

则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，并记为 $-\boldsymbol{A}$. 因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

1.2 矩阵的运算

矩阵的意义不仅在于将 $m\times n$ 个数排成数表形式，更在于可以进行一些有实际意义的运算，从而使矩阵成为进行理论研究和解决实际问题的有力工具.

1.2.1 矩阵的线性运算

矩阵的线性运算包括矩阵的加法与数乘.

定义 1.2.1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为两个同型矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和定义为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij}).$$

例 1.2.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

从定义可知，只有同型矩阵才能相加. 由于矩阵的加法就是把矩阵对应的元素相加，因此矩阵的加法满足以下规律.

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (交换律);

(2) $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ (结合律);

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) 对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}.$$

定义 1.2.3 设 λ 是任意实数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 是一个矩阵，定义矩阵的数乘运算如下：

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

由定义可知，用数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就是用数 λ 去乘矩阵中每一个元素.

例 1.2.4

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

容易看出，数乘运算满足以下规律.

(1) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(2) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(4) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$.

其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

显然矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵 $-\boldsymbol{A}$ 满足

$$-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}.$$

当然也可以将

$$\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}$$

视为矩阵的减法.

例 1.2.5 设有列向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

则

$$2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}.$$

通常将 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个**线性组合**, 且 2, -1, 3 是组合系数.

1.2.2 矩阵的乘法

定义 1.2.6 设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times p},\quad \boldsymbol{B}=(b_{kj})_{p\times n},$$

规定

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积, 记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注 1.2.7 (1) 由定义可知, 只有 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时, 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于第一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第二个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的对应元素乘积的和.

(3) 乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数, 列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

例 1.2.8 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&3\\1&2\\3&1\end{pmatrix}$$

那么

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1\times 0+0\times 1+(-1)\times 3 & 1\times 3+0\times 2+(-1)\times 1 \\ (-1)\times 0+1\times 1+3\times 3 & (-1)\times 3+1\times 2+3\times 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

思考

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n =?\quad \boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n} =?$

(2) $\boldsymbol{A}_{m\times t}\boldsymbol{O}_{t\times n} =?\quad \boldsymbol{O}_{m\times t}\boldsymbol{A}_{t\times n} =?$

利用矩阵的乘法，可以得到线性方程组的新的表述方式.

例 1.2.9 给定线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad\qquad \cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
$$

记系数矩阵、未知向量以及常数向量如下:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},
$$

则线性方程组可表示为

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},
$$

即

$$
\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}.
$$