# Banach空间中非线性常微分方程边值问题

冯美强　张学梅　著

科学出版社

# Banach空间中非线性常微分方程边值问题

冯美强　张学梅　著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是关于Banach空间中非线性常微分方程边值问题的一本专著. 全书共 8 章, 在介绍非线性泛函方法的基础上, 分别对二阶非线性微分方程边值问题、二阶超前型和滞后型微分方程边值问题、二阶脉冲微分方程边值问题、二阶混合型脉冲微分方程边值问题、带 $p$-Laplace 算子的二阶脉冲微分方程边值问题、无穷区间中二阶脉冲微分方程边值问题、高阶微分方程边值问题、二阶微分方程共振边值问题、高阶脉冲微分方程边值问题、抽象空间中常微分方程边值问题和时标上动力方程边值问题, 讨论了可解性、多解性以及正解对参数的连续依赖性的存在条件. 本书总结了作者与其合作者关于非线性常微分方程边值问题的一些研究成果, 阅读本书可使读者尽快了解这一研究领域的前沿.

本书可供高等院校数学专业高年级本科生、研究生及教师阅读, 也可作为从事相关专业科研人员的参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

Banach 空间中非线性常微分方程边值问题/冯美强, 张学梅著. —北京: 科学出版社, 2018. 2

ISBN 978-7-03-051048-8

Ⅰ.①B… Ⅱ. ①冯… ②张… Ⅲ.①巴拿赫空间-非线性方程-常微分方程-边值问题-研究 Ⅳ.①O177.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 303814 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 杨 然
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 2 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 2 月第一次印刷 印张: 28
字数: 550 000

**定价: 198.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前　　言

在自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性及化学反应过程稳定性的研究中, 许多问题都可以化为常微分方程边值问题的求解, 或者化为解的性质的研究. 因此, 常微分方程边值问题具有重要的应用价值, 是常微分方程最有生命力的分支之一. 到目前, 对非线性微分方程边值问题的研究已经取得了丰硕成果, 并且出版了多部优秀专著. 本书对二阶非线性微分方程边值问题、二阶超前型和滞后型微分方程边值问题、二阶脉冲微分方程边值问题、二阶混合型脉冲微分方程边值问题、带 $p$-Laplace 算子的二阶脉冲微分方程边值问题、无穷区间中二阶脉冲微分方程边值问题、二阶微分方程共振边值问题、高阶微分方程边值问题、高阶脉冲微分方程边值问题、抽象空间中微分方程边值问题和时标上动力方程边值问题的可解性、多解性以及正解对参数的连续依赖性进行系统的研究. 本书出版的目的是帮助致力于非线性微分方程边值问题研究的学者尽快了解这一领域的前沿并融入该领域的研究之中.

全书共 8 章.

第 1 章概述 Banach 空间中非线性常微分方程边值问题进展, 论述了二阶非线性微分方程边值问题、二阶非线性脉冲微分方程边值问题、高阶非线性微分方程边值问题、抽象空间中常微分方程边值问题和时标上动力方程边值问题的发展概况、背景知识与最新进展.

第 2 章介绍基本概念和理论, 主要内容包括锥和不动点定理、迭合度理论、抽象空间中的锥和不动点定理、时标上动力方程微积分基本理论、特征值理论以及 Hölder's 不等式.

第 3 章讨论二阶奇异非线性微分方程边值问题, 运用上下解方法、锥上不动点定理和锥上不动点指数定理分别研究了二阶奇异非线性微分方程边值问题、二阶超前型和滞后型非线性微分方程边值问题正解和对称正解的存在性、多解性, 并获得了正解存在的特征值区间.

第 4 章讨论二阶非线性脉冲微分方程边值问题, 运用锥上不动点理论、特征值理论以及 $\alpha$-凹算子理论分别给出了二阶非线性脉冲微分方程边值问题、二阶混合型非线性脉冲微分方程边值问题、二阶滞后型非线性脉冲微分方程边值问题、带 $p$-Laplace 算子的二阶非线性脉冲微分方程边值问题以及无穷区间中二阶脉冲非局部问题可解性、正解的存在性和多解性的条件, 并获得了正解对参数的连续依赖关系.

第 5 章研究高阶非线性微分方程边值问题, 运用锥上不动点定理分别给出了 Banach 空间中四阶微分方程非局部边值问题、四阶脉冲微分方程非局部边值问题、带 $p$-Laplace 算子的四阶微分方程边值问题和 $n$ 阶脉冲微分方程边值问题存在正解的充分条件; 利用最大值原理和上下解方法给出了一类 $2n$ 阶奇异边值问题存在正解的充分必要条件.

第 6 章研究非线性常微分方程共振边值问题, 利用 Mawhin 连续性定理和推广的 Mawhin 连续性定理给出了二阶微分方程非局部共振问题和二阶脉冲微分方程非局部共振问题在 $dimKerL=2$ 的情况下有解的条件.

第 7 章讨论抽象空间中非线性微分方程边值问题, 包括抽象空间中脉冲微分方程边值问题和脉冲积分–微分方程边值问题, 首先利用抽象空间中严格集压缩算子的不动点指数理论得到了一个新的泛函形式的锥不动点定理; 然后, 利用这个定理和抽象空间中严格集压缩算子不动点定理对抽象空间中二阶微分方程、二阶脉冲微分方程、四阶微分方程、四阶脉冲微分方程以及 $n$ 阶微分方程和带参数的 $n$ 阶脉冲微分方程进行了系统的研究, 获得了一系列新的结果.

第 8 章研究时标上非线性动力方程边值问题, 运用锥上不动点定理给出了时标上二阶动力方程边值问题和带 $p$-Laplace 算子的二阶、四阶动力方程边值问题存在正解的充分条件; 利用最大值原理和上下解方法给出了一类二阶动力方程边值问题存在正解的充分必要条件.

作者与其合作者自 1998 年以来一直得到郭大钧教授和刘兆理教授的指导和帮助. 在 2005 年和 2007 年, 作者与其合作者先后到北京理工大学师从葛渭高教授从事非线性常微分方程边值问题的研究工作. 在此, 谨向他们致以崇高的敬意和衷心的感谢! 本书的出版得到了国家自然科学基金项目 (11301178), 北京市自然科学基金项目 (1163007), 北京市教育委员会科技创新服务能力建设–科研计划项目 (71E1610973), 北京信息科技大学促进高校内涵发展–软性支出项目 (5211623901), 北京信息科技大学促进高校内涵发展–数理公共基础课程教学改革项目(5211623901) 等项目的资助, 在此一并感谢!

书中有不当之处, 恳请读者多提宝贵建议.

作　者
2016 年 9 月

# 目　录

# 第 1 章　Banach 空间中非线性常微分方程边值问题的进展

微分方程几乎是和微积分同时产生的, 牛顿在建立微积分的同时, 对简单的微分方程用级数来求解. 后来瑞士数学家雅各布·伯努利、欧拉, 法国数学家克雷洛、达朗贝尔、拉格朗日, 又不断地丰富了微分方程的理论. 其后, 常微分方程的发展是和力学、天文学、物理学, 以及其他科学技术的发展密切相关的. 数学的其他分支的新发展, 如复变函数、李群、组合拓扑等, 都对常微分方程的发展产生过深刻的影响, 当前计算机的发展更是为常微分方程的应用及理论研究提供了非常有力的工具. 牛顿研究天体力学和机械力学的时候, 利用了微分方程这个工具, 从理论上得到了行星运动规律. 后来, 法国天文学家勒维烈和英国天文学家亚当斯使用微分方程分别计算出了当时尚未发现的海王星的位置. 这些都使数学家更加深信微分方程在认识自然、改造自然方面的巨大作用. 微分方程也就成了最有生命力的数学分支之一. 在微分方程这个数学分支中, 对边值问题的研究深受国内外数学工作者的热爱, 1900 年, 希尔伯特应邀参加巴黎国际数学家大会, 并在会上作了题为《数学问题》的重要演讲, 提出了 23 个著名的数学问题, 边值问题就是其中之一. 现在, 常微分方程边值问题在很多学科领域内有着重要的应用, 如自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究、化学反应过程稳定性的研究等. 许多问题都可以化为常微分方程边值问题的求解, 或者化为解的性质的研究. 应该说, 应用常微分方程边值问题理论已经取得了很大的成就, 但是, 它的现有理论还远远不能满足需要, 有待于进一步的发展, 以使这门学科的理论更加完善.

## 1.1　常微分方程的边值问题

二阶常微分方程两点边值问题有 Dirichlet 边值问题、Neumann 边值问题、Robin 边值问题、Sturm-Liouville 边值问题和周期边值问题. 这些问题已经被广泛研究, 并取得了深刻的结果, 见参考文献 [1]—[8]. 对二阶微分方程的周期边值问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b, \\ x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b), \end{cases}$$

Gaines 和 Mawhin[9] 运用上下解方法建立了上述问题解的存在性条件, 所得定理中

的条件之一为: 存在正值函数 $\psi \in C^1[0,+\infty)$ 使得

$$|f(t,x,y)| \leqslant \psi(|y|),\ \ |x| \leqslant R;\ \ \int_0^{+\infty} \frac{\sigma d\sigma}{\psi(\sigma)} = +\infty.$$

Yang[10] 研究了二阶微分系统周期边值问题

$$\begin{cases} x'' = f(t,x), \quad x = (x_1, \cdots, x_n), \quad f = (f_1, \cdots, f_n), \\ x(0) = x(1), \quad x'(0) = x'(1), \end{cases}$$

运用上下解方法在 $f(t,x)$ 关于 $x$ 满足 Lipschitz 条件的假设下建立了该问题有解的结果. Zhang 和 Wang[11] 研究了周期边值问题

$$\begin{cases} x''(t) + \rho^2 x(t) = f(t,x(t)),\ \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ x(0) = x(2\pi),\ \ x'(0) = x'(2\pi), \end{cases}$$

应用锥拉伸、锥压缩定理证明了在 $f$ 满足

$$\lim_{|x|\to 0^+} \max_{t\in[0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = 0, \quad \lim_{|x|\to 0^+} \min_{t\in[0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = +\infty \quad (\text{超线性})$$

或者

$$\lim_{|x|\to 0^+} \max_{t\in[0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{|x|\to 0^+} \min_{t\in[0,2\pi]} \frac{f(t,x)}{x} = 0 \quad (\text{次线性})$$

时方程存在正解. 对于三阶微分方程周期边值问题, Kong L, Wang S 和 Wang J[12] 用锥拉伸、锥压缩定理研究了下面的周期边值问题解的存在性:

$$\begin{cases} x'''(t) + \rho^2 x(t) = f(t,x(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi). \end{cases}$$

对于四阶微分方程周期边值问题, 文献 [13] 使用锥拉伸、锥压缩不动点定理研究了问题

$$\begin{cases} x'''' - \beta x'' + \alpha x = f(t,x(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1), \quad i = 0,1,2,3 \end{cases}$$

的可解性. 文献 [14] 采用上下解方法研究了问题

$$\begin{cases} x'''' = f(t,x(t),x''(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \\ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(2\pi), \quad i = 0,1,2,3 \end{cases}$$

解的存在性.

对于一般的高阶微分方程边值问题也引起了许多数学工作者的兴趣. 例如, Chyan 和 Henderson[15] 研究了如下一类高阶边值问题

$$\begin{cases} (-1)^{(n-p)}x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)), \quad 0 < t < 1, \\ x^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, p, \\ x^{(i)}(1) = 0, \quad i = p+1, p+2, \cdots, n-1. \end{cases}$$

在参考文献 [16] 中, Davis, Eloe 和 Henderson 研究了所谓 Lidstone 边值问题

$$\begin{cases} u^{(2m)}(t) = f(t, u(t), u''(t), \cdots, u^{(2m-1)}(t)), \quad 0 < t < 1, \\ u^{(2i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, p, \\ u^{(2i)}(1) = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1, \end{cases}$$

利用 Leggett-Williams 不动点定理, 得到了以上边值问题三个正解存在的充分条件.

对于非局部问题, 是在 20 世纪 70 年代, 由 D.Barr 和 T.Sherman 提出研究微分方程多点边值问题而产生的. 这类问题被国内外学者称为非局部问题: 方程的定解条件不仅依赖于区间端点上的取值, 而且依赖于解在区间内部的一些点上的值. Gupta[17] 研究了二阶非线性微分方程三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) - e(t), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(\eta) = u(1), \end{cases}$$

其中, $f \in [0,1] \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. 利用 Leray-Schauder 连续性定理, Gupta 获得了上述问题的可解性结果.

Gupta[18] 研究了二阶微分方程多点边值问题

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x(0) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \alpha_i x(\xi_i), \quad x(1) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \beta_i x(\xi_i), \end{cases}$$

其中, $f$ 是非负连续函数, $\alpha_i$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 0, \cdots, m-2$, $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{m-2} < 1$. Gupta 借助函数凹性, 利用锥拉伸、锥压缩不动点定理证明了问题在 $f(t,x)$ 为超线性和次线性时存在正解.

由于非局部问题在热传导问题和半导体问题等方面有着重要的应用[19,20], 所以国内外学者开始关注一类更广泛的非局部问题——带积分边界条件的非局部问

题. 例如, Boucherif[21] 利用锥上不动点定理研究了边值问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < 1, \\ x(0) - cx'(0) = \displaystyle\int_0^1 g_0(s)x(s)ds, \\ x(1) - dx'(1) = \displaystyle\int_0^1 g_1(s)x(s)ds \end{cases}$$

的可解性, 其中 $f : [0,1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续, $g_0$, $g_1 : [0,1] \to [0, +\infty)$ 连续且是正的函数, $c$ 和 $d$ 是两个非负参数.

在参考文献 [22] 中, Liu 和 Ge 借助 Mawhin 连续性定理获得了高阶边值问题

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x''(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)) + e(t), \quad 0 < t < 1, \\ x^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \\ x(1) = \displaystyle\int_0^1 x(s)dg(s) \end{cases}$$

解的存在性结果. Tian 和 Ge[23] 利用 Leray-Schauder 度和 Vitali 收敛定理对上述高阶边值问题解的存在性进行了研究.

对含 $p$-Laplace 算子的微分方程的研究起源于 20 世纪 80 年代初期, 人们从非牛顿流体力学、多孔介质中的气体湍流、弹性理论、血浆问题、宇宙物理等大量的应用领域及对非线性偏微分方程径向解的研究中发现, 这些问题可归结为带有 $p$-Laplace 算子的微分方程

$$(\varphi_p(u'))' = q(t)f(t, u, u'), \quad 0 < t < 1,$$

其中 $\varphi_p(x) = |x|^{p-2}x, p > 1$; 而研究弹性梁方程的微小形变又导出高阶 $p$-Laplace 边值问题

$$\begin{cases} (\varphi_p(u''))'' = f(t, u, u''), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

由实际问题抽象出的微分方程边值问题的非线性项在很多情形下都具有奇性, 由此产生了一类边值问题: 奇异微分方程边值问题. 如何寻找奇异微分方程边值问题的可解性一直以来都是人们研究的热点之一. 关于奇异微分方程边值问题系统的内容, 见参考文献 [24], 该文献的作者比较全面地研究了微分方程

$$u'' + f(t, u, u') = 0, \quad t \in (0, 1)$$

在不同的边界条件下的可解性. 研究工作的关键一步是利用边界条件将微分方程转化成相应的积分方程, 之后再利用不动点定理. 这一方法不适用于讨论具 $p$-Laplace

算子的边值问题. 困难在于当 $p \neq 2$ 时, 微分算子 $(\phi_p(u'))'$ 关于 $u$ 是非线性的, 因此, 很难将微分方程转化成一个等价的积分方程. 事实上, 到目前为止, 在研究具 $p$-Laplace 算子的二阶奇异边值问题正解的存在性时, 现有的结果大都局限于两点边界条件, 如

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + q(t)f(t,u) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

当 $f(t,u) = f(u)$ 在 $u = 0$ 具有奇性时, 文献 [25] 研究过这个问题; 当 $f(t,u)$ 在 $u = 0$ 具有奇性时, 参考文献 [26] 对该问题的可解性进行了讨论.

常微分方程边值问题不仅大量出现在传统的物理领域, 诸如力学、电学等学科及机电、土木、冶金等工程技术领域, 而且迅速进入了一些非物理领域, 诸如经济、交通、人口、生态、医学、社会等领域. 随着各类边值问题应用研究的不断深入, 各种新的复杂边值问题又会随之而生. 因此, 常微分方程边值问题的理论研究仍需要继续做大量的细致工作, 解决各种新问题.

## 1.2 常微分方程边值问题的正解

许多具体的微分方程和积分方程往往只有在非负解或正解的情况下才符合实际意义. 因此, 如何寻求算子方程的非负解或正解的问题就显得十分重要. 例如, 在材料力学中考察梁的横向弯曲问题时, 梁的挠度曲线 (梁轴上各点的横向位移)$y = y(x)$ 满足

$$EJy'' = M(x),$$

这里 $x$ 为沿梁的长度方向取的坐标, $E$ 为材料的弹性模量, $J$ 为梁横截面的惯性矩, $M$ 为作用在横截面上的弯矩 (截面内的合力矩). 作用在相应横截面上的剪力 (截面内的合力)

$$Q(x) = \frac{dM}{dx};$$

在 $x$ 点的载荷密度即单位长度上的载荷

$$q(x) = \frac{dQ}{dx}.$$

综合有

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right) = q(x)$$

为梁的挠度曲线 $y = y(x)$ 所应满足的微分方程. 为了知道梁的挠度曲线, 需要知道梁的承载方式, 典型的方式有两种: 简支梁和悬臂梁, 可用如下边值来描述

$$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0;$$

$$y(0) = y'(1) = y''(0) = y'''(1) = 0.$$

显然, 变号解是没有意义的.

1998 年, 马如云开始研究二阶微分方程三点边值问题的正解. 后来, 许多数学工作者寻找了二阶微分方程各类多点边值问题存在一个或者多个正解的充分条件. 方法是将问题转化为一个积分方程, 然后定义 Banach 空间上的锥和全连续算子, 应用 Banach 空间锥上不动点定理给出正解.

例如, Ma 和 Castaneda[27] 研究了二阶微分方程多点边值问题

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \alpha_i x'(\xi_i), \quad x(1) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \beta_i x(\xi_i) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x(0) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \alpha_i x(\xi_i), \quad x'(1) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \beta_i x'(\xi_i) \end{cases}$$

的正解的存在性, 其中 $f$ 是非负连续函数, $\alpha_i$, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 0, \cdots, m-2$, $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{m-2} < 1$. 所用的方法是锥拉伸、锥压缩不动点定理.

一些作者希望推广以上结果. 例如, Zhang 和 Wang[28] 研究了如下更复杂的边值问题:

$$\begin{cases} [p(t)x'(t)]' + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x(0) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \alpha_i x(\xi_i), \quad x(1) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \beta_i x(\xi_i), \end{cases}$$

$$\begin{cases} [p(t)x'(t)]' + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x'(0) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \alpha_i x'(\xi_i), \quad x(1) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \beta_i x(\xi_i), \end{cases}$$

$$\begin{cases} [p(t)x'(t)]' + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x(0) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \alpha_i x(\xi_i), \quad x'(1) = \sum\limits_{i=0}^{m-2} \beta_i x'(\xi_i) \end{cases}$$

的正解的存在性，其中 $p$ 连续且 $p(t) > 0, t \in [0,1]$, $f$, $\alpha_i$, $\beta_i$ 和 $\xi_i$ 如前面定义.

另有一些作者希望建立带 $p$-Laplace 算子的微分方程非局部问题正解的存在性结果. 例如, Wang 和 Jiang[29] 用上下解方法研究了下面问题的解的存在性:

$$\begin{cases} [g(x'(t))]' + f(t, x(t), x'(t)) = 0, \ \ a \leqslant t \leqslant b, \\ x(a) - \xi x(\alpha) = A, \ \ x(b) - \eta x(\beta) = B, \end{cases}$$

其中 $a < \alpha \leqslant \beta < b; \xi, \eta \geqslant 0; A, B \in R; f$ 是 Caratheodory 函数. 文献 [30]—[32] 研究了方程

$$[\phi(x'(t))]' + a(t)f(x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1$$

与下面的边值条件之一构成的边值问题的正解存在性, 即

$$x(0) = x(1) = 0,$$

$$x'(0) = 0, \quad x(1) + g(x(1)) = 0,$$

$$x(0) - g(x'(0)) = 0, \quad x(1) = 0,$$

$$x'(0) = 0, \quad x(1) + B(x'(\eta)) = 0,$$

$$x(0) - g_1(x'(0)) = x(1) + g_2(x'(1)) = 0.$$

在讨论多个正解存在性方面, 对二阶微分方程两点、三点边值问题, 已有作者用 Banach 空间的锥上的多不动点定理证明了两个或者三个正解的存在性. 例如, 对问题

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta), \end{cases}$$

He 和 Ge[33] 证明了三个正解的存在性. 文献 [31], [34], [35] 用各种不动点定理研究其他相似问题, 也得到了较好的结果.

关于高阶微分方程边值问题正解的存在性和多解性的研究同样获得了很多优秀成果. 例如, Bai 和 Wang[36] 利用不动点定理和度理论讨论了四阶两点边值问题

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) - \lambda f(t, x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = x''(0) = x''(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性、唯一性和多解性结果.

Wei 和 Zhang[37] 考虑了如下边值问题

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) = f(t, x(t)), \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = 0, \\ ax(0) - bx'''(0) = 0, \quad cx(1) + dx'''(1) = 0 \end{cases}$$

正解存在的充分必要条件. 其中, $f \in C((0,1) \times \mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$, $\mathbf{R}^+ = [0,+\infty), \mathbf{R}^- = (-\infty, 0]$.

在参考文献 [38] 中, Graef, Qian 和 Yang 利用 Krasnosel, skii's 不动点定理研究了如下四阶三点边值问题

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) = \lambda g(t) f(x(t)), \quad 0 < t < 1, \\ x(0) = x'(1) = x''(0) = x''(p) - x''(1) = 0 \end{cases}$$

正解的存在性问题. 其中, $p \in (0,1)$ 是一个常数.

对带 $p$-Laplace 算子的四阶边值问题正解的研究也获得了一些好的结果. 例如, 在参考文献 [39] 中, Zhang 和 Liu 讨论了如下一类边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(x''(t)))'' = w(t) f(t, x(t)), \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \quad x(1) = ax(\xi), \\ x''(0) = 0, \quad x''(1) = bx''(\eta), \end{cases}$$

其中, $0 < \xi, \eta < 1$, $0 \leqslant a < b < 1$, $f \in C((0,1) \times (0,+\infty), [0,+\infty))$.

有些作者对一般的高阶边值问题正解的存在性进行了研究并获得了一些经典结果. 例如, 在参考文献 [40] 中, Eloe 和 Ahmad 利用锥不动点定理对 $n$ 阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) + a(t) f(u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0, \quad \alpha u(\eta) = u(1) \end{cases}$$

正解的存在性进行了研究, 其中, $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha\eta^{(n-1)} < 1$.

Pang, Dong 和 Wei[41] 利用不动点指数理论研究了 $m$ 点边值问题

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) + a(t) f(u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0, \quad u(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i) \end{cases}$$

正解的存在性, 其中, $0 < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{n-2} < 1$, $\alpha_i > 0$ 满足条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\eta_i) < 1$.

还有些学者研究了奇异边值问题正解的存在性. 例如, Jiang 和 Xu[42] 研究了奇异边值问题

$$\begin{cases} (\phi_p(u'))' + q(t) f(t,u) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) + B(u'(1)) = 0 \end{cases}$$

多个正解的存在性. 其中, $f(t,u)$ 在 $u = 0$ 具有奇性.

Eloe 和 Henderson[43] 利用锥不动点定理对 $n$ 阶边值问题

$$\begin{cases} (-1)^{(n-k)}u^{(n)}(t) = f(t,u(t)), \quad t \in (0,1), \\ u^{(i)}(0) = 0, \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \\ u^{(j)}(1) = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-k-1 \end{cases}$$

正解的存在性进行了研究. 其中, $f(t,u)$ 在 $u=0$ 具有奇性.

另外, 还有些学者研究了含无穷多个奇异点的边值问题正解的存在性问题. 例如, 文献 [44] 讨论了如下问题多个正解的存在性

$$\begin{cases} -u'' = a(t)f(t,u), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

其中, 对 $p \geqslant 1$, $a(t) \in L^p[0,1]$ 且在 $\left[0, \dfrac{1}{2}\right)$ 中有很多个奇异点. Liu[45] 以及 Liang 和 Zhang[46] 推广了 Kaufmann 和 Kosmatov[44] 的相关结果.

## 1.3 常微分方程边值问题的应用背景和发展概况

常微分方程边值问题最初是用分离变量法解二阶线性数学物理方程时提出来的. 1833 年至 1841 年, Sturm 和 Liouville 一起研究了二阶线性齐次方程的边值问题和 Sturm-Liouville 特征值问题. 1893 年, Picard 运用迭代法讨论了二阶非线性常微分方程两点边值问题解的存在性和唯一性. 1894 年, Burkhard 讨论了一般边界条件下的边值问题并引入了常微分方程的 Green 函数. 20 世纪初, Hilbert 奠定了常微分方程边值问题的理论基础. 此后, 有关非线性常微分方程边值问题的研究日益活跃, 有许多专著出版. 如我国郭大钧、孙经先和刘兆理教授合著的《非线性常微分方程泛函方法》等. 在国外, Agarwal 和 O'Regan 教授等对非线性常微分方程两点边值问题进行了深入细致的研究, 发表了大量的文章并出版了多本专著, 如*Existence Theory for Nonlinear Ordinary Differential Equations*, *Theory of Singular Boundary Value Problems*, *Positive Solutions of Differential, Difference and Integral Equations*. 这些文献系统地研究了微分和差分方程两点边值问题.

非局部问题的研究起源于许多不同的应用数学和物理领域, 对它的研究相对常微分方程两点边值问题的研究起步较晚. 非局部问题可以将许多经典的两点边值问题纳入同一个框架来处理, 而且非局部问题考虑了实际问题中的测量误差及相关因素的干扰, 因此, 常微分方程非局部问题的研究具有实际意义. 例如, 在利用分离变量的方法解线性偏微分方程的经典问题中, 人们遇到了含有几个参数的满足非局部边界条件的微分方程; 由 $N$ 部分不同密度组成的均匀截面的悬链线的振动可以