PROBLEMS IN ARITHMETIC

算术问题集

王刚 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

PROBLEMS IN ARITHMETIC

算术问题集

王刚　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书原始素材来源很杂，例如，AOPS论坛，《美国数学月刊》《疑难数学》杂志，高中竞赛题，QQ群，等等.本书尽量避开经典的、常见的问题，比如费马型方程、卡塔兰型方程、勾股方程、佩尔方程，等等，当然不能完全避开.而且尽量挑选一些当时觉得新奇有趣的问题.本书是一本问题集，不能代替教程类图书.正文部分是一些觉得值得一写或者值得一读的内容.练习题部分跨度比较大，简单的有小学奥数问题，难的到高中竞赛的程度，还收录一些世界上至今无人能解的问题，并且不只有数论问题.

本书可供大专院校数学系师生、研究生及相关学科工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

算术问题集/王刚编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2017.7
ISBN 978-7-5603-6341-7

Ⅰ.①算… Ⅱ.①王… Ⅲ.①数学—普及读物 Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 307905 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘立娟
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 13.75 字数 332 千字
版 次 2017 年 7 月第 1 版 2017 年 7 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6341-7
定 价 38.00 元

目 录 | Contents

第 1 章　存在性,封闭性,表示法

1. 既约真分数集 S 满足 $\frac{1}{2}\in S$,并且只要 $x\in S$ 就有 $\frac{x}{1+x}$, $\frac{1}{1+x}\in S$. 求证:所有既约真分数都在 S 中.

证明　先按顺序推出以下分数属于 S,即

$$\frac{1}{2}\to\frac{1}{3}\to\frac{1}{4}\to\frac{1}{5}\to\cdots\to\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{2}\to\frac{2}{3}\to\frac{2}{5}\to\frac{2}{7}\to\cdots\to\frac{2}{2n+1}$$

若 S 包含所有分子不超过 n 的既约真分数,设 $m=k(n+1)+r,0\leqslant r\leqslant n,\frac{n+1}{m}$ 是既约真分数

$$\frac{r}{n+1}\to\frac{n+1}{n+1+r}\to\frac{n+1}{2(n+1)+r}\to\cdots\to\frac{n+1}{m}$$

这说明 S 包含所有分子不超过 $n+1$ 的既约真分数. 归纳完毕.

2. 求证:$\left([\sqrt{n}]+\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right]\right)\Big|\, n$ 有无数个解.

证明　$2b^2-a^2=1$ 有无数个正整数解,它们都满足

$$a^2<2b^2<(a+1)^2<2(b+1)^2$$

从 $2b^2$ 到 $a(a+2)$ 共 $2a$ 个数,其中必有 $a+b$ 的倍数,就是满足条件的 n.

利用佩尔的构造性问题很常见. 再举一例,求证:存在无数个平面,三维空间第一象限有平方数个整点属于这个平面.

3. 已知存在公差是 n,项数是 $n+1$ 的质数等差数列,求 n.

解　当 n 取 1,2 时成立. 如果 $n>2$,对这 $n+1$ 项取模 $n-1$,得知其中必有某项是 $n-1$ 的倍数;如果这项不是第一项,就一定是合数;如果是第一项,并恰好是 $n-1$,那么最后一项是 n^2-1,仍不是质数. 所以 n 不超过 2.

4.(全俄数学奥林匹克)一开始黑板上只写着两个多项式

$$x^3-3x^2+5, x^2-4x$$

规定如果黑板上有 $f(x)$,$g(x)$这两个多项式,那么

$$f(x)\pm g(x), f(x)g(x), f(g(x)), kf(x)$$

都可以写到黑板上.那么我们能否写出一个形如 x^n-1 的多项式?

解
$$x^3-3x^2+5=(x-2)^3+3(x-2)^2+1$$
$$x^2-4x=(x-2)^2-4$$

黑板上出现的多项式化成关于 $x-2$ 形式的,一定没有一次项,所以得不到.

5.(IMO)求证:对任意正整数 k,n,存在正整数 m_1,m_2,…,m_k 满足

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$$

证明 (原创解答)对 k 归纳.归纳基础略.

如果 n 是偶数

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left[1+\frac{2^{k-1}-1}{\frac{n}{2}}\right]\left(1+\frac{1}{n+2^k-2}\right)$$

如果 n 是奇数

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[1+\frac{2^{k-1}-1}{\frac{n+1}{2}}\right]$$

证毕.

6.求证:对任意正整数 k,存在自然数 n 满足 $2^k\mid n^n+47$.

证明 基于两个关于次数的性质.

性质 1:$2^k\parallel a, 2^k\parallel b\Rightarrow 2^{k+1}\mid a\pm b$.($p$ 进三角形都是等腰三角形)

性质 2:如果 a,b,n 都是奇数,那么 $\mathrm{pot}_2(a-b)=\mathrm{pot}_2(a^n-b^n)$.

只需在 $2^k\parallel n^n+47$ 成立的情况下验证

$$2^{k+1}\mid(n(2^k+1))^{n(2^k+1)}+47$$

根据升幂定理,可写出两个式子备用

$$\mathrm{pot}_2((2^k+1)^{2^k+1}-1)=\mathrm{pot}_2(2^k)=k$$
$$2^{k+2}\mid n^{2^k}-1$$

接下来验证

$$2^{k+1}\mid(n(2^k+1))^{n(2^k+1)}+47$$

我们把被除数和 n^n+47 作差

$$\mathrm{pot}_2((n(2^k+1))^{n(2^k+1)}-n^n)=$$
$$\mathrm{pot}_2((n(2^k+1))^{2^k+1}-n)=$$
$$\mathrm{pot}_2(n^{2^k}(2^k+1)^{2^k+1}-1)$$
$$n^{2^k}(2^k+1)^{2^k+1}-1\equiv1\times(2^k+1)-1=2^k\pmod{2^{k+1}}$$

最后一个式子用上了两个备用式，这个同余式说明

$$\mathrm{pot}_2((n(2^k+1))^{n(2^k+1)}-n^n)=k$$

根据上述性质1，有

$$2^{k+1}\mid(n(2^k+1))^{n(2^k+1)}+47$$

7. 正整数构成的集合 A 满足：
(1)至少含3个元素；
(2)某数在 A 中，那么它的约数全在 A 中；
(3)如果 $a>b>1$，a 与 b 都在 A 中，那么 $1+ab$ 也属于 A.
求 A.

解　首先 $1\in A$. 由条件(1)，至少含3个元素. 如果有偶数，那么 $2\in A$；如果都是奇数，必有两个超过1，仍推出 $2\in A$. 设 A 中至少含 $1,2,a$ 这3个数，可见

$$2a+1,4a+3,8a+7\in A$$

如果 $3\mid a$，那么 $3\in A$；如果 $3\mid a-1$，那么

$$2a+1\in A\Rightarrow 3\in A$$

如果 $3\mid a-2$，那么

$$(2a+1)(4a+3)+1\in A\Rightarrow$$
$$\frac{(2a+1)(4a+3)+1}{2}\in A\Rightarrow$$
$$\frac{(2a+1)(4a+3)+1}{2}\times 2+1\in A\Rightarrow 3\in A$$

于是

$$7,15,31,\cdots,2^n-1\in A$$

根据条件(2)以及欧拉－费马定理，所有正奇数属于 A. 又因为 $2m+1,2m-1\in A$，所以 $4m^2\in A$，任意正偶数 $2m\in A$. 结论：$A=\mathbf{N}_+$.

8. 求证：有无数组正整数 a,b,c 满足 $a^{2\,013}+b^{2\,014}=c^{2\,015}$.

证明　注意到

$$m^{2\,013\times 2\,015}+m^{2\,014^2}=m^{2\,013\times 2\,015}(1+m)$$

如果 $m+1$ 是个2 015次幂的数，就得到一组解.

由于

$$a=(t^{2\,015}-1)^{2\,015},b=(t^{2\,015}-1)^{2\,014},c=t(t^{2\,015}-1)^{2\,013}$$

得到无数组解.

9. 集合 A 的元素是质数. 如果集合 A 中有 x 和 y，那么就有 $xy+4$(x 和 y 可以相同). 求证：A 是空集.

证明　反证法. 如果 A 中有一个模3余1的质数 p，就有一个模3余2的质数 p^2+4，那么 $p(p^2+4)+4$ 是质数. 其实它是3的倍数，所以不可能，因此 A 中没有模3余1的质数. 如果 $3\in A$，那么 $13\in A$，显然也不行，所以 A 中质数模3余2. 但是这样其实推不出矛盾. 换成讨论模7可以推出矛盾.

10. 将 1 到 10 分成两个不相交的非空集合 A 与 B，求证：存在 $a\in A,b\in B$ 满足 $11\mid a^3+ab^2+b^3$.

证明 令 $k=\frac{a}{b}$，有

$$11\mid a^3+ab^2+b^3\Rightarrow 11\mid k^3+k+1\Rightarrow$$
$$11\mid k^3+k-10\Rightarrow 11\mid (k-2)(k^2+2k+5)\Rightarrow 11\mid k-2$$

因为 2 是 11 的原根，所以得证.(请读者思考：为什么 2 是 11 的原根问题就解决了？)

11. 无限长非负有理数列满足 $a_m+a_n=a_{mn}$，求证：数列有相同的项.

证明 假设没有相同的项

$$a_1+a_n=a_{1\times n}\Rightarrow a_1=0$$

其他项都大于 0.

设

$$a_2=\frac{p}{q},a_3=\frac{r}{s}\Rightarrow a_{2^{qr}}=qra_2=rp=psa_3=a_{3^{ps}}\Rightarrow 2^{qr}=3^{ps}$$

矛盾.

12. 求证：对任意正整数 n，存在正整数 a,b,c 满足

$$n=(a,b)(c^2-ab)+(b,c)(a^2-bc)+(c,a)(b^2-ca)$$

证明 (AOPS)构造 $a=1,b=n(n+1),c=n(n^2+n-1)$.

13. 求证：$\frac{x^3+y^3+2}{x^2+y^2+1}=2z^2$ 有无数组正整数解.

证明 (AOPS)构造 $x=2z^2-z-1,y=2z^2+z-1$.

14. 求平方数 n，同时 n 是三角数、五边形数.

解

$$n=p^2=\frac{1}{2}q(q+1)=\frac{1}{2}r(3r-1)\Rightarrow$$
$$(6r-1)^2=(4p)^2+(2q+1)^2$$

注意两个等式合成一个，所以损失了信息量. 因为 $q,q+1,2q+1$两两互质，所以

$$(4p,2q+1)=1$$

由于 $6r-1,4p,2q+1$ 是本原勾股数组，存在互质且奇偶性不同的正整数 a,b 满足

$$\begin{cases}6r-1=a^2+b^2\\2p=ab\\2q+1=a^2-b^2\end{cases}$$

为了挽回损失的信息量，将其带入题干中任意一个等式，得到

$$1=a^4-4a^2b^2+b^4\Rightarrow 1+3b^4=(a^2-2b^2)^2$$

因为 $1+3u^4=v^2$ 最多只有两组正整数解，所以 $(u,v)=(1,2),(2,7)$ 是全部解. 所以 $\{a,b\}=\{2,1\}$，$n=r=p=q=1$.

15. 求证：$a^2+b^2=a^3+b^3$ 有无数组非 0 有理数解.

证明　设 $a+b=x$，$ab=y$，得到

$$y=\frac{x^3-x^2}{3x-2}$$

必须保证

$$x^2-4y=x^2-\frac{4x^3-4x^2}{3x-2}=\frac{2x^2-x^3}{3x-2}$$

是有理平方. 由

$$\frac{2-x}{3x-2}=k^2\Rightarrow x=\frac{2+2k^2}{3k^2+1}\Rightarrow$$

$$y=\frac{x^2(1-k^2)}{4}=\frac{\left(\frac{2+2k^2}{3k^2+1}\right)^2(1-k^2)}{4}=\frac{(1+k^2)(1-k^4)}{(3k^2+1)^2}$$

其中 k 是有理数，给出方程的无数组解.

16. 求证：存在无数个正整数 n，使得 2^n 的尾数是 n.

证明　由于 $2^{36}\equiv 736 \pmod{1\,000}$，可知 36 是符合条件的 n. 归纳证明这样的 n 有无数个.

假设 k 位数 n 满足

$$2^n\equiv a\times 10^k+n \pmod{2^{k+1}5^{k+1}}$$

其中 a 是一位数. 由于 $\varphi(5^{k+1})\mid 10^k$，启发我们考察

$$2^{n+b\times 10^k}\equiv n+b\times 10^k \pmod{2^{k+1}5^{k+1}}$$

是否有解，其中 b 是一位数. 先来考察模 5^{k+1}

$$a\times 10^k+n\equiv 2^n\equiv 2^{n+b\times 10^k}\equiv n+b\times 10^k \pmod{5^{k+1}}\Rightarrow 5\mid a-b$$

这意味着无论 a 是什么数字，b 都有两种选择，奇偶性不同. 再来考察模 2^{k+1}. 因为 $2^{k+1}\mid 2n$，所以 b 的两种选择中恰有一种满足条件. 这样得到一个 $k+1$ 位的满足条件的数.

17. 对任意正偶数 k，是否一定存在奇数 n 满足 $\varphi(k)=\varphi(n)$.

解　取

$$k=4\times 3\times 5\times 17\times 257^2,\ \varphi(k)=2^{16}257$$

如果此时有奇数 n 满足等式，那么 n 的质因子只能是费马质数或者 2^m257+1，其中 m 是不超过 16 的正整数. 当 m 是偶数时，2^m257+1 是 3 的倍数；当 m 模 4 余 1 时，2^m257+1 是 5 的倍数. 于是

$$2^3 257+1=11^2 17$$

$$2^7 257+1=67\times 491$$

$$2^{11} 257+1=7\times 17\times 4\ 423$$

$$2^{15} 257+1=1\ 123\times 7\ 499$$

这里推荐使用质因数分解软件. 这样 n 的质因子都是费马质数. 除了 257 以外,最多是 1 次的. 容易验证这是不可能的,所以答案是否定的.

18. 质数 p 的平方非剩余中,不是原根的有 r 个,r 取不到的自然数是否有无数个?

解 (Florian Luca&Gary Walsh 解答)这样的 r 有无数个.

只需证明 $\frac{p-1}{2}-\varphi(p-1)=3\times 2^{4k+3}$ 没有正整数解,其中 p 是质数.

$p=2$ 不是解,所以设

$$p=2^a m+1,2\mid m-1$$

有

$$2^{a-1}(m-\varphi(m))=3\times 2^{4k+3}$$

所以

$$m-\varphi(m)=3\Rightarrow m=9,a=4k+4$$

此时 p 是 5 的倍数,并且大于 5,不是质数.

$3\times 2^{4k+3}$ 就是 r 取不到的自然数,有无数个.

19. 求 3 个有理平方数,构成公差是 5 的等差数列.

解 设这 3 个数为

$$a^2-5=b^2,a^2,a^2+5=c^2$$

得到

$$c^2-b^2=10$$

令 $c+b=m,c-b=\frac{10}{m}$,则

$$2a^2=b^2+c^2=\frac{1}{2}\left(m^2+\frac{100}{m^2}\right)$$

令 $m=\frac{p}{q}$,则 p^4+100q^4 是平方数.

利用勾股方程的结论

$$10q^2=2xy,p^2=x^2-y^2$$

其中$(x,y)=1$,并且 $2\mid xy$.

再次利用勾股方程,设 $x=k^2+t^2$,$y=2kt$ 或 k^2-t^2.

取 $x=k^2+t^2$，$y=2kt$，有

$$10q^2=2xy=4kt(k^2+t^2)$$

$k=2$，$t=1$ 是一组解，代回得到

$$x=5,y=4,p=3,q=2,m=\frac{3}{2},a=\frac{41}{12}$$

本题并不关心通解，严文兰老师指出本题与椭圆方程有关.

20. 求证：$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{2}{a}$ 有无数组整体互质的正整数解.

证明　原方程化为

$$a^2+(b+c)^2=(a+b-c)^2$$

取互质正整数 $m>n$，以下参数解满足方程

$$\begin{cases}a=m^2-n^2\\b+c=2mn\\a+b-c=m^2+n^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=m^2-n^2\\b=n(m+n)\\c=n(m-n)\end{cases}$$

21. 固定奇数 $m>0$，求证：$\omega(m^n+n^m)$ 无界.

证明　根据迪利克雷定理，对任意正整数 k，存在 k 个质数 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 都大于 m，且满足

$$\left(\prod p_i,\prod(p_i-1)\right)=1$$

根据中国剩余定理，存在正整数 n 满足

$$\begin{cases}\prod p_i\mid n+1\\\prod(p_i-1)\mid n\end{cases}$$

此时

$$m^n+n^m\equiv1+(-1)^m\pmod{p_i}$$

根据 k 的任意性，证毕.

22. 求证：存在无数个正整数 n，使得 $\varphi(x)=2n$ 无解.

证明　这是厄多斯提出的一个简单问题.

$\varphi(x)$ 几乎总是 2 的倍数，构造奇数 $n=7^m$，$m>0$，使 $\varphi(x)=2n$ 无解.

$\varphi(x)=2\times7^m\Rightarrow\omega(x)<3$，分两种情况讨论：

(1) $x=p^t$，其中 p 是奇质数.

$p^{t-1}(p-1)=2\times7^m\Rightarrow t=1\Rightarrow p=2\times7^m+1$ 不可能，因为此时 $3\mid p$.

(2) $x=2\times p^t$，其中 p 是奇质数. 得到的方程同上.

23. 0,1 序列 1110001011 任取连续 3 位得到的 8 个 3 位数各不相同,并且遍历由 0,1 所组成的 3 位数.求证:按照如下方式能构造这样的序列,遍历 n 位数,即先写 n 个 1,然后每位尽量写 0,除非得出与前面重复的 n 位数.

证明 (我们在二进制下考虑本题)等价的叙述方式如下.

n 是正整数,连续自然数 0 到 2^n-1 可排列成如下数列:$a_1=2^n-1$,a_{k+1}是 $2a_k$ 除以 2^n 得到的余数.如果这个余数在前 k 项里面出现过,那么 a_{k+1}是 $2a_k+1$ 除以 2^n 得到的余数.

我们先来证明数列首次重复的数是 2^n-1.设首次出现重复的是 $a_i=a_j$,$i<j$.可见两项都是奇数.数列某项如果是奇数并且不是首项,那么这项之前一定有一项比这项小 1.这个映射关系记作 $a_{(k)}=a_k-1$,不妨设 $a_i-1=a_j-1=a_t$,也就是$(i)=t$.此时 a_{i-1},a_{j-1},a_{t-1}这 3 个 n 位数末 $n-1$ 位相同,所以其中有 2 个是相等的.这和"首次"矛盾,所以不妨设数列首次重复是 $a_1=a_j=2^n-1$.直接的推论就是,$a_{j-1}=2^{n-1}-1$ 末位恰有 $n-1$ 个 1,a_{j-2}末位恰有 $n-2$ 个 1,a_{j-3}末位恰有 $n-3$ 个 1……a_{j-n+1}末位恰有 1 个 1.

a_{j-1}的存在意味 a_j 之前存在两个这样的 n 位数:0 作首位,接下来是 $n-2$ 个 1.

a_{j-1}与 $a_{(j-1)}$前 $n-1$ 位相同,所以 a_{j-2}与 $a_{(j-1)-1}$末 $n-1$ 位相同.这两个奇数只有首位不同,并且分别减 1 得到的数都在 a_j 之前出现过.

所以前 $j-1$ 项取到 4 个这样的 n 位数:0 在第 2 位,接下来是 $n-3$ 个 1.

我们来说明这个规律能归纳证明.

假设前 $j-1$ 项遍历形如$\overline{a01111}$,$\overline{a01110}$的所有多位数,其中 a 是多位数.

取定 a,那么$\overline{a01111}$,$\overline{a01110}$这两项左边的邻项都以$\overline{a0111}$结尾,所以分别是$\overline{0a0111}$,$\overline{1a0111}$.所以$\overline{0a0110}$,$\overline{1a0110}$也在前 $j-1$ 项中.

根据 a 的任意性,前 $j-1$ 项遍历形如$\overline{ba011c}$的所有多位数.b 与 c 取 0 或 1.

前 $j-1$ 项取到 8 个这样的 n 位数:0 在第 3 位,接下来是 $n-4$ 个 1.

前 $j-1$ 项取到 16 个这样的 n 位数:0 在第 4 位,接下来是 $n-5$个 1.

……

第 1 项是首次重复的数,保证了取到的这些数不重复.

除了上述前 $n-1$ 位中含 0 的多位数,再算上 a_1,a_2 就是连续自然数 0 到 2^n.

24. 求证:任意整数能表示成两个平方数与一个立方数之和.

证明 (Andrew Adler 解答)

$$2x+1=(x^3-3x^2+x)^2+(x^2-x-1)^2-(x^2-2x)^3$$

$$4x+2=(2x^3-2x^2-x)^2+(2x^3-4x^2-x+1)^2-(2x^2-2x-1)^3$$

$$8x+4=(x^3+x+2)^2+(x^2-2x-1)^2-(x^2+1)^3$$

$$16x+8=(2x^3-8x^2+4x+2)^2+(2x^3-4x^2-2)^2-(2x^2-4x)^3$$

$$16x=(x^3+7x-2)^2+(x^2+2x+11)^2-(x^2+5)^3$$

25. (2014 EGMO)求证:对任意正整数 k,存在无数个正整数 n,满足 $\omega(n)=k$,并且下面的方程组没有正整数解

$$\begin{cases}n=a+b\\d(n)\mid d(a^2+b^2)\end{cases}$$

证明 构造 $n=2^{p-1}m,\omega(m)=k-1,m$ 的奇质因子都大于 3,奇质数 p 满足 $1.25^{p-1}>m^2$.

满足以上构造的 n 有无数个,所以只需证明以上构造符合题意.反设方程组有解

$$p\mid d(n)\Rightarrow p\mid d(a^2+b^2)$$

存在质数 q 满足

$$\mathrm{pot}_q(a^2+b^2)=cp-1$$

其中 c 是正整数.如果 $q>3$,有

$$2^{2p-2}m^2=n^2=(a+b)^2>a^2+b^2\geqslant q^{p-1}\geqslant 5^{p-1}$$

与构造矛盾,所以 $q=2$ 或 3.

如果 $q=3$,有

$$3\mid a^2+b^2\Rightarrow 3\mid a,b\Rightarrow 3\mid n$$

与构造矛盾,所以 $q=2$.于是

$$\begin{cases}\mathrm{pot}_2(a+b)=p-1\\\mathrm{pot}_2(a^2+b^2)=cp-1\end{cases}$$

显然不可能(p 进三角形是等腰三角形).

26. (国集小测)$f(n)=d(n!)-d((n-1)!)$,求证:存在无数个合数 n,使得任意正整数 $m<n$,都有

$$f(m)<f(n)$$

证明 (原创解答)题目要求 n 是合数,试一下质数 n,发现总是成立的.我们把这个事实当作本题的引理.质数的特点是约数少,并且与小于自身的正整数互质.所以试一下 $n=2p,p$ 是奇质数.

设$(2p)!=2^a p^2 qk$,其中 q 是小于 $2p$ 的最大质数

$$(2p-1)!=2^{a-1}pqk$$

$$f(2p)=(2a+6)d(k)$$

$$q!=2^b pqk_1,(q-1)!=2^b pk_1 \Rightarrow f(q)=2(b+1)d(k_1)$$

因为 $k_1 | k, b\leqslant a$,所以

$$f(2p)>f(q)$$

连续自然数 $q+1$ 到 $2p$ 都是合数,选取其中 f 值最大的数就是题目要求的 n. 这是因为引理能推出:小于 q 的正整数 m 有

$$f(m)<f(q)<f(n)$$

27. 求证:存在无数组正整数 a,b,c,并且如下 6 个数都是平方数
$$ab+c,bc+a,ca+b,ab+a+b,bc+b+c,ca+c+a$$

证明 取正整数 t 使得 $t^2+1=mn$,其中 m,n 是大于 1 的正整数. 很难证明 t^2+1 取到无数个质数,但是容易说明取到无数个合数.

然后令 $a=m-1,b=n-1,c=m+n+2t-1$ 即可.

另一种更简捷的构造:a 和 b 是相邻的平方数.

28. 求证:存在正整数 n,能找出 n 个连续奇数,覆盖不少于 $k[\sqrt{n}]$个质数,其中 $k>0$.

证明 假设对任意正整数 n,n 个连续奇数中质数个数不到 $k[\sqrt{n}]$.

$(2m-1)^3+2\sim(2m+1)^3$ 共 $12m^2+1$ 个连续奇数,其中质数个数不足

$$k[\sqrt{12m^2+1}]<4km$$

它们的倒数和不超过

$$\frac{4km}{(2m-1)^3+2}<\frac{4k}{m^2}$$

这样能推出所有质数倒数和收敛.

前面我们证明过质数倒数和发散,所以假设不成立.

29. 将 n 拆分成正整数的和,$f(n)$表示这些正整数的最小公倍数能取到的最大值. 问 $f(n)$的值能否取到 $1^1 2^2 3^3 4^4 \cdots 2\,015^{2\,015}$?

解 取不到. 质数 p,q 满足

$$p<q<p^{a-1},p^a | f(n)$$

其中 a 是不小于 3 的整数. 我们来证明 $q|f(n)$. 假设整除式不成立,某个拆分使得所有部分的最小公倍数是 $f(n)$,那么其中一定有 $p^a t$. 如果将 $p^a t$ 拆分成 $p^{a-1}t+q+(p^a t-p^{a-1}t-q)$这样三部分,最小公倍数至少是$\frac{q}{p}f(n)$,与 $f(n)$的定义矛盾. 所以 $q|f(n)$.

如果 $f(n)=1^1 2^2 3^3 4^4\cdots 2\,015^{2\,015}$，根据上面的推理，质数2 017能整除 $f(n)$，矛盾.

30. 正整数 n 能否等于其本身最小的 5 个约数的平方和？

解　模 4 再结合一些简单不等式即可推出 n 是奇数，还可知 n 至少有 11 个约数.

先讨论 n 被 3 整除的情况.

(1) 1,3,9,a,b，其中 $a<b$ 是 2 个大于 3 的质数. 由此可见 $b<3a$. 于是

$$\begin{cases}9a^2<9ab\leqslant n=91+a^2+b^2<91+10a^2\\ 9ab\mid 91+a^2+b^2\end{cases}\Rightarrow 9ab=91+a^2+b^2$$

$$7(ab-13)=(a-b)^2\Rightarrow ab-13=28k^2$$

$$b-a=14k\Rightarrow(a+b)^2=308k^2+52$$

平方数不可能模 7 余 3，所以该情况无解.

(2) 1,3,a,$3a$,b，其中 $a<b$ 是 2 个大于 3 的质数. 于是

$$3ab\leqslant n=10+10a^2+b^2\Rightarrow b\mid a^2+1$$

因为 n 至少有 11 个约数，所以 $3ab$ 再乘一个数才能等于 n，这个数不可能是 3，最小是 a. 如果乘的是不小于 b 的数

$$3ab^2\geqslant 15b^2>10+10a^2+b^2$$

已经超过 n，所以只能

$$3a^2b=10+10a^2+b^2\Rightarrow(3b-10)a^2=b^2+10\Rightarrow 3b-10\mid 190$$

无解.

再来讨论 n 不被 3 整除的情况.

(1) 5 个约数依次是 1,a,b,c,d，后 4 个为质数. 由此可见 $d<ab$. 于是

$$a^2b^2<abcd\leqslant 1+a^2+b^2+c^2+d^2<1+a^2+b^2+2a^2b^2$$

因为 n 是奇数，所以

$$abcd=1+a^2+b^2+c^2+d^2$$

$$1=\frac{1}{abcd}+\frac{a}{bcd}+\frac{b}{acd}+\frac{c}{abd}+\frac{d}{abc}<$$

$$\frac{1}{abcd}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{c}$$

得出矛盾，该情况无解.

(2) 5 个约数是 1,a,b,c,ab，$7\leqslant a<b<c$ 为质数. c 与 ab 的大小关系未知

$$abc\mid 1+a^2+b^2+a^2b^2+c^2$$

abc 乘一个大于 1 的整数等于 n. 这个乘数一定小于 c，理由是

$$\frac{1+a^2+b^2+a^2b^2+c^2}{abc^2}=\frac{1}{ab^3}+\frac{a}{b^3}+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}<$$
$$\frac{4}{ab}+\frac{a}{b}<\frac{1}{b}+\frac{a}{b}<1$$

所以 $n=ab^2c$ (因为 $a\parallel n$)，$c<b^2$. 此时

$$ab^2c=1+a^2+b^2+c^2+a^2b^2\Rightarrow\Delta=a^2b^4-4(a^2+1)(b^2+1)$$

判别式必须是奇数的平方. 又因为

$$\Delta=(ab^2-2a)^2-8a^2-4b^2-4>(ab^2-2a-2)^2$$

所以该情况无解.

(3) 5 个约数是 $1,a,a^2,b,ab$，此时 $b<\frac{n}{a^2b}<ab$.

只能有

$$n=a^4b,\ a^4b=1+a^2+a^4+b^2+a^2b^2\Rightarrow a^2\mid b^2+1$$
$$1=\frac{1}{a^4b}+\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{b}+\frac{b}{a^4}+\frac{b}{a^2}<\frac{1}{a^5}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a^2}$$
$$a^2-a-1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^3}<b<a^2$$

此时不可能 $a^2\mid b^2+1$，所以该情况无解.

(4) 5 个约数是 $1,a,a^2,a^3,b$，其中 $b>a^2$. 于是

$$a^3b\mid 1+a^2+a^4+a^6+b^2$$

可见 a^3b 乘一个小于 b 的数等于 n. $a^2<b<a^4$，n 不是平方数，至少有 12 个约数，所以 $n=a^5b$ 或 a^6b. 但是

$$\frac{1+a^2+a^4+a^6+b^2}{a^5b}<\frac{3}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a^5}<\frac{3}{ab}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}<1$$

这说明 a^5b 超过 n，所以该情况无解.

(5)5 个约数是 $1,a,a^2,b,c$，其中 $c<ab$. 于是

$$a^2bc\leqslant 1+a^2+a^4+b^2+c^2<5a^2b^2\Rightarrow c<5b$$

所以

$$a^2bc=1+a^2+a^4+b^2+c^2$$
$$1=\frac{1}{a^2bc}+\frac{1}{bc}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b}{a^2c}+\frac{c}{a^2b}<\frac{1}{a^4}+\frac{1}{bc}+\frac{a^2}{bc}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$$
$$(a+2)(a+4)\leqslant bc<\frac{1+a^2}{1-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^4}}<$$
$$\frac{1+a^2}{1-\frac{2}{a}}=a^2+2a+5+\frac{10}{a-2}$$

得出矛盾，所以该情况无解. 综上，正整数 n 不可能是最小的 5 个约数的平方和.

第2章 进 位 制

提到进位制,库莫定理和卢卡斯定理不可不知.

库莫定理 若 p 是质数,$S_p(n)$表示 p 进制下 n 的数字和,则

$$\mathrm{pot}_p(n!)=\frac{n-S_p(n)}{p-1}$$

卢卡斯定理 若 p 是质数,且

$$a=(a_m a_{m-1}\cdots a_0)_p,b=(b_m b_{m-1}\cdots b_0)_p$$

则

$$\mathrm{C}_a^b\equiv \mathrm{C}_{a_m}^{b_m}\mathrm{C}_{a_{m-1}}^{b_{m-1}}\cdots \mathrm{C}_{a_0}^{b_0}\pmod p$$

推论 p 进制的 a 与 b,如果 $a-b$ 借位,那么 $p\mid \mathrm{C}_a^b$.

1. 100! 末尾有多少个 0?

解 100 写成五进制是 400,数字和是 4. 答案是$\frac{100-4}{5-1}=24$.

2. 两个自然数 $n\geqslant k$,都不超过 p^2-1,求证

$$\mathrm{C}_n^k\equiv(-1)^k\mathrm{C}_{p^2+k-n-1}^k\pmod p$$

证明 p^2-1 其实是 p 进制中最大的两位数,显然要用到卢卡斯定理.

考虑 p 进制下的减法 $n-k$,如果借位,那么同余式两边都是 p 的倍数.

如果不借位,设 $n=\overline{uv},k=\overline{st}$,则

$$左边\equiv \mathrm{C}_u^s\mathrm{C}_v^t\pmod p,右边\equiv \mathrm{C}_{p-1}^s\mathrm{C}_{p-1}^t\mathrm{C}_{p-1+s-u}^s\mathrm{C}_{p-1+t-v}^t\pmod p$$

因为

$$\mathrm{C}_u^s\equiv \mathrm{C}_{p-1}^s\mathrm{C}_{p-1+s-u}^s\pmod p,\mathrm{C}_v^t\equiv \mathrm{C}_{p-1}^t\mathrm{C}_{p-1+t-v}^t\pmod p$$

所以证毕.

库莫定理能表示出阶乘含 p 的次数,当然也能表示出组合数含 p 的次数.

3. $\frac{(2n)!}{n!\ (n+1\,002)!}$化成最简分数,分母的最大质因子最大是多少?

解 分子、分母都是阶乘形式,所以利用库莫定理. 假设答案是 p,那么根据库莫定理

$$2n-S_p(2n)<n-S_p(n)+n+1\,002-S_p(n+1\,002)$$