Doi Hopf模的离散形变与积分理论

郭双建　张晓辉◇著

社

Doi Hopf 模的离散形变与积分理论

郭双建　张晓辉　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍国际前沿学科的研究方向：各种 Hopf 代数和量子群结构的离散型量子形变与 Hom 化理论. 包含 Doi Hom-Hopf 模的基本概念、Maschke 型定理、可分函子、仿射准则、量子 Yang-Baxter 方程的解及 Hom-Yetter-Drinfeld 模范畴的对称性与 u 条件、Hom-量子群胚及其表示等. 内容由浅入深，既有理论又有应用，反映了近 20 年来 Hom-结构与积分理论的研究成果.

本书可供数学和数学物理专业的高校师生及科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

Doi Hopf 模的离散形变与积分理论/郭双建，张晓辉著. —北京：科学出版社，2017.11

ISBN 978-7-03-055172-6

Ⅰ.①D… Ⅱ.①郭… ②张… Ⅲ.①郝普夫代数-离散模型 ②郝普夫代数-积分表示 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 269953 号

责任编辑：郭勇斌　邓新平 / 责任校对：张凤琴

责任印制：张　伟 / 封面设计：蔡美宇

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2017 年 11 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16

2017 年 11 月第一次印刷　印张：10 1/4

字数：171 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　　言

从代数学的角度, 对形变理论的研究最早可以追溯到 1964 年 M. Gerstenhaber 等对环与代数的形变性质的研究工作 [1]. 20 世纪 90 年代初期, 为了描述在量子现象的模型中所出现的一种保运算离散型代数形变 (即量子 q-形变), H. Hiro-Oka 等 [2] 和 M. Chaichian 等 [3] 相继引入了 q-形变 Virasoro 代数、q-形变 Witt 代数等概念, 将形变用扭导子这一代数形式来描述. 进一步地, 扭导子体现在李代数中, 便产生了 Hom-李结构 [4], 其中 Jacobi 恒等式在某个自同态 (称为 Hom-结构映射) 下作了相应的扭曲. 随后, 这种扭曲形变的思想也被推广到其他一些代数结构上——如李代数和拟李代数, 于是出现了 Hom-李代数与拟 Hom-李代数的概念. 更进一步地, Hom-余代数、Hom-双代数和 Hom-Hopf 代数等 Hom 化的结构也相继被引入和得以研究. 其中 Hom-结合代数是 2009 年由 A. Makhlouf 和 S. Silvestrov 引入的 [5], 其结合性被 Hom-结构映射作了一定的改变, 被称为 Hom-结合性. 类似地可以得到 Hom-余代数和 Hom-双代数等 [6]. 由于这些概念都体现了离散型扭曲形变在代数上的表达形式, 并且被离散形变后的代数结构具有更好的性质——这些均使得量子形变更具研究价值——因此, Hom 化与离散形变理论引起了数学工作者的兴趣, 大家陆续开始对 Hom-型代数展开研究. 从 2009 年开始, D. Yau 对 Hom-双代数进行了一系列研究工作, 他定义了 Hom-双代数上的拟三角结构 [7], 并由之得到了一组 Hom-型量子 Yang-Baxter 方程的解 [8]. 2012 年, 比利时代数学家 S. Caenepeel 等曾用张量范畴的方法去刻画 Hom-量子群 [9]. 他们构造了一种特殊的非严格张量范畴 (称之为 Hom 范畴), 并将这个范畴中的双代数称为 monoidal Hom-双代数, 继而研究了它的一些性质. 应当注意到: 这种 monoidal Hom-双代数与通常意义下的 Hom-双代数是有区别的, 与前者相比, Hom-双代数并非某个张量范畴中的 bimonoid 对象. 2014 年, A. Makhlouf 等讨论了 Hom-Yetter-Drinfeld 模范畴, 并由之构造了量子 Yang-Baxter 方程的一组解系 [10], 继而又讨论了 Hom-Drinfeld 偶; 2015 年, G. Graziani 等引入了具有更广结构的 Bi-Hom 型代数 [11], 并讨论了相关性质; 2016 年, A. Makhlouf 和 F. Panaite 又陆续刻画了 Hom 型 L-R 冲积 [12]、Hom-扭曲算子 [13] 等一些经典的量子群理论.

国内方面, 早在 20 世纪 90 年代, 胡乃红就展开了对 Witt 型代数的 q-离散形变的研究工作 [14]. 2010 年起, 陈园园、张良云等陆续讨论了 Hom-李（双）代数结构 [15, 16]、Hom 化的 FRT 型定理 [17] 及 monoidal Hom 型量子群的积分理论 [18] 和中心构造 [19]; 此外, 刘玲 [20, 21] 和董丽红 [22]、马天水 [23, 24] 等也分别从

Radford 双积等角度, 讨论了诸如 Hom-Yetter-Drinfeld 模范畴构造与 Hom 扭曲冲积结构等系列问题; 张晓辉 [25]、鹿道伟 [26]、生云鹤 [27−29] 和陈良云 [30] 等也相继在 Hom-群胚代数、Hom-李代数和 Hom-李 2-代数等方向做了相关的研究工作. 这些结果不仅推广了 Hopf 代数和 Lie 代数中的经典结论, 而且进一步改进了量子群理论中的数学方法, 丰富和发展了其内容.

从 2007 年开始, 本书作者郭双建在可分函子、拟三角 Hopf 代数的构造、Drinfeld 偶和广义量子 Yang-Baxter 方程的解系等领域, 陆续开展了一系列学习和研究工作, 取得了一定进展. 尤其是作者近两年在与国内外学术同行展开广泛合作交流的基础上, 在仿射准则、Frobenius 性质、广义 Yang-Baxter 方程的解的构造和应用、量子群胚的离散形变等方面, 利用范畴论和同调方法等, 统一了某些已知的经典结论, 获得了一些可喜的研究成果, 为进一步刻画某些重要 Hom-结构的等价条件和普遍性质提供了新的数学途径.

本书旨在介绍国际前沿学科的研究方向: 各种 Hopf 代数和量子群结构的离散型量子形变与 Hom 化理论. 读者可以从中领略到这一理论具有高度概括、涉及面广、逻辑结构严谨的特点. 在写作方面, 本书尽量做到自成体系, 但本书的取材具有很深的代数学及数学物理背景, 为此我们假定读者已经熟悉 Hopf 代数与范畴论的基本知识.

在本书付梓之际, 首先要感谢博士生导师王栓宏教授和硕士生导师王顶国教授在研究生阶段对两位作者的谆谆教诲; 感谢博士后合作导师卢涤明教授多次指导性的交流与给予的各种帮助; 还要感谢学术同行王圣祥副教授, 他与作者进行了多次深入的讨论, 对本书的成文大有裨益.

本书出版得到了以下基金的资助: 国家自然科学基金 (11761017), 国家自然科学基金数学天元基金 (11426073), 中国博士后科学基金面上项目 (2015M580508), 贵州省科学技术基金 (黔科合 J 字 [2014] 2045, 黔科合基础 [2016]1021) 和贵州省高校优秀科技创新人才支持计划 (黔教合 KY 字 [2015]481), 作者在此表示衷心感谢.

尽管作者一直追求尽善尽美, 但因水平所限, 书中难免有疏漏之处, 恳请同行专家和广大读者提出宝贵的批评意见和建议.

郭双建　张晓辉

2017 年 7 月

目　　录

第1章 预备知识

设 k 为交换环, $\mathcal{M}_k=(\mathcal{M}_k,\otimes,k,a,l,r)$ 为 k-模范畴. 考虑构造一个新的张量范畴 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_k)$ 如下:

• 对象为二元组 (M,μ), 其中 $M\in\mathcal{M}_k$, $\mu\in Aut_{\mathcal{M}_k}(M,M)$($M$ 的所有线性自同构做成的集合);

• 态射为 $f:(M,\mu)\to(N,\nu)$, 其中 f 为从 M 到 N 的线性映射且满足 $f\circ\mu=\nu\circ f$;

• 对任意的 $(M,\mu),(N,\nu)\in\mathcal{H}(\mathcal{M}_k)$, 其张量积定义为

$$(M,\mu)\otimes(N,\nu)=(M\otimes N,\mu\otimes\nu).$$

张量单位为 (k,id_k);

• 对任意的对象 $(M,\mu),(N,\nu),(L,\varsigma)\in\widetilde{H}(\mathcal{M}_k)$, 结合约束和单位约束分别为

$$\tilde{a}_{M,N,L}=a_{M,N,L}\circ((\mu\otimes Id)\otimes\varsigma^{-1})=(\mu\otimes(Id\otimes\varsigma^{-1}))\circ a_{M,N,L},$$

$$\tilde{l}_M=\mu\circ l_M=l_M\circ(Id\otimes\mu),\ \ \tilde{r}_M=\mu\circ r_M=r_M\circ(\mu\otimes Id).$$

我们称范畴 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_k)$ 为$\mathcal{M}_k$ 的相关 Hom-范畴.

下列 Hom-结构的有关概念可见文献 [9].

定义 1.1 一个monoidal Hom-代数为 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_k)$ 中的代数对象 (A,α), 具体地, 其带有元素 $1_A\in A$ 和线性映射 $m:A\otimes A\to A$, $a\otimes b\mapsto ab$ 满足下列条件: 对任意的 $a,b,c\in A$, 有

$$\alpha(a)(bc)=(ab)\alpha(c),\ \alpha(ab)=\alpha(a)\alpha(b),$$
$$a1_A=1_Aa=\alpha(a),\ \alpha(1_A)=1_A.$$

若不考虑 Hom-结构映射 α 的可逆性, 事实上 monoidal Hom-代数与Hom-代数(见文献 [31]) 是等价的.

定义 1.2 设 (A,α) 为 monoidal Hom-代数. 一个左 (A,α)-Hom-模包含 $(M,\mu)\in\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_k)$ 和态射 $\psi:A\otimes M\to M$, $\psi(a\otimes m)=a\cdot m$, 满足下列条件:

$$\alpha(a)\cdot(b\cdot m)=(ab)\cdot\mu(m),\ 1_A\cdot m=\mu(m),\ \mu(a\cdot m)=\alpha(a)\cdot\mu(m),$$

设 (M,μ) 和 (N,ν) 为两左 (A,α)-Hom-模. 如果 $f(am)=af(m)$, 对任意的 $a\in A,m\in M$ 和 $f\circ\mu=\nu\circ f$, 则称态射 $f:M\to N$ 为左 A-线性的. 我们以 $\widetilde{\mathcal{H}}({}_A\mathcal{M})$ 表示左 (A,α)-Hom-模做成的范畴.

定义 1.3　一个monoidal Hom-余代数为 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_k)$ 中的余代数对象 (C,γ), 具体地, 其伴有线性映射 $\Delta:C\to C\otimes C$, $\Delta(c)=c_1\otimes c_2$ 和 $\varepsilon:C\to k$, 满足下列条件: 对任意的 $c\in C$, 有

$$g^{-1}(c_1)\otimes\Delta(c_2)=\Delta(c_1)\otimes\gamma^{-1}(c_2),\ \Delta(\gamma(c))=\gamma(c_1)\otimes\gamma(c_2),$$
$$c_1\varepsilon(c_2)=\varepsilon(c_1)c_2=\gamma^{-1}(c),\ \varepsilon(\gamma(c))=\varepsilon(c).$$

定义 1.4　设 (C,γ) 为 monoidal Hom-余代数. 一个左 (C,γ)-Hom-余模包含 $(M,\mu)\in\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_k)$ 和态射 $\rho_M:M\to C\otimes M$, $\rho_M(m)=m_{(-1)}\otimes m_0$, 满足下列条件: 对任意的 $m\in M$,

$$\Delta_C(m_{(-1)})\otimes\mu^{-1}(m_0)=\gamma^{-1}(m_{(-1)})\otimes(m_{0(-1)}\otimes m_{00}),$$
$$\rho_M(\mu(m))=\gamma(m_{(-1)})\otimes\mu(m_0),\ \varepsilon(m_{(-1)})m_0=\mu^{-1}(m).$$

如果 $g\circ\mu=\nu\circ g$ 和 $m_{(-1)}\otimes g(m_0)=g(m)_{(-1)}\otimes g(m)_0$, 对任意的 $m\in M$, 则称态射 $g:M\to N$ 为左 C-余线性的. 用 $\widetilde{\mathcal{H}}({}^C\mathcal{M})$ 表示所有的左 (C,γ)-Hom-余模范畴.

定义 1.5　一个monoidal Hom-双代数 $H=(H,\alpha,m,1_H,\Delta,\varepsilon)$ 是指 Hom-范畴 $\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_k)$ 中的双代数对象. 具体地, 其满足 $(H,\alpha,m,1_H)$ 为一个 monoidal Hom-代数, $(H,\alpha,\Delta,\varepsilon)$ 为一个 monoidal Hom-余代数且 Δ 和 ε 是 Hom-代数同态, 即对任意的 $h,g\in H$, 有

$$\Delta(hg)=\Delta(h)\Delta(g),\qquad \Delta(1_H)=1_H\otimes 1_H,$$
$$\varepsilon(hg)=\varepsilon(h)\varepsilon(g),\qquad \varepsilon(1_H)=1_k.$$

定义 1.6　一个 monoidal Hom-双代数 (H,α) 称为monoidal Hom-Hopf 代数, 如果存在一个对极$S:H\to H\in\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_k)$ (如 $S\circ\alpha=\alpha\circ S$), 它是恒等映射 Id_H 的卷积逆 (即满足 $S*Id_H=\eta_H\circ\varepsilon_H=Id_H*S$), 也就是对任意的 $h\in H$, 有

$$S(h_1)h_2=\varepsilon(h)1_H=h_1S(h_2).$$

定义 1.7　设 (H,α) 为 monoidal Hom-Hopf 代数. 对象 $(M,\beta)\in\widetilde{\mathcal{H}}(\mathcal{M}_k)$ 称

为左–左-Hom-Yetter-Drinfeld 模, 若 (M,β) 既是左 (H,α)-Hom-模又是左 (H,α)-Hom-余模并满足下列条件: 对任意的 $h\in H$ 和 $m\in M$,

$$h_1m_{(-1)}\otimes h_2\cdot m_0=(h_1\cdot\beta^{-1}(m))_{(-1)}h_2\otimes\beta((h_1\cdot\beta^{-1}(m))_0).$$

应当注意到, 对任意的 $h\in H$ 和 $m\in M$, 上述等式和以下等式是等价的:

$$\rho(h\cdot m)=(h_{11}\alpha^{-1}(m_{(-1)}))S(h_2)\otimes\alpha(h_{12})\cdot m_0.$$

定义 1.8 设 (H,α) 为 monoidal Hom-Hopf 代数. 则 (H,α) 为 Hom-Yetter-Drinfeld 模, 其中左 (H,α)-作用为 $h\cdot g=(h_1\alpha^{-1}(g))S(\alpha(h_2))$ 和左 (H,α)-余作用为 Hom-余乘 Δ, 记为 $H_1=(H_1,\text{伴随},\Delta,\alpha)$. 对偶地, (H,α) 为 Hom-Yetter-Drinfeld 模, 其中左 (H,α)-作用为 Hom-乘法 m 和左 (H,α)-余作用为 $\rho(h)=h_{11}\alpha^{-1}(S(h_2))\otimes\alpha(h_{12})$, 记为 $H_2=(H_2,m,\text{余伴随},\alpha)$.

定义 1.9 设 (H,α) 为 monoidal Hom-Hopf 代数. 一个Hom-Yetter-Drinfeld 范畴 ${}^H_H\mathcal{HYD}$ 是一个辫子 monoidal 范畴, 它的对象为左–左 (H,α)-Hom-Yetter-Drinfeld 模, 态射既是左 (H,α)-线性的又是 (H,α)-余线性的, 辫子 $C_{-,-}$ 定义为: 对任意的 $m\in(M,\mu)\in{}^H_H\mathcal{HYD}$ 和 $n\in(N,\nu)\in{}^H_H\mathcal{HYD}$,

$$C_{M,N}(m\otimes n)=m_{(-1)}\cdot\nu^{-1}(n)\otimes\mu(m_{(0)}).$$

定义 1.10 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, F: $\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 为函子. 则由文献 [32] 可知若存在自然变换 m: $FF\to F$, 和 η: $id_{\mathcal{C}}\to F$, 满足下列条件:

$$m\circ mF=m\circ Fm,\quad id_F=m\circ\eta F=m\circ F\eta,$$

则称三元组 (F,m,η) 为范畴 $\mathcal{C}$ 上的单子.

定义 1.11 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, $A\in\mathcal{C}$, (F,m,η) 为 $\mathcal{C}$ 上的单子. 由文献 [32], 若存在态射 θ_A: $FA\to A$, 满足等式:

$$\theta_A\circ m_A=\theta_A\circ F(\theta_A),\quad \theta_A\circ\eta_A=id_A,$$

则称 (A,θ_A) 为单子 F 上的模, 简记为 F-模.

F-模同态f: $A\to A'$ 是指 $\mathcal{C}$ 中的态射 f, 满足 $\theta_{A'}\circ Ff=f\circ\theta_A$. 由 F-模和 F-模同态做成的范畴记为 $\mathcal{C}_F$.

定义 1.12 设 $(\mathcal{C},\otimes,I,a,l,r)$ 为张量范畴, (F,m,η) 为 $\mathcal{C}$ 上的单子且 F 同时为余张量函子, 即存在自然变换 F_2: $F\otimes\to F\otimes F$ 和 $\mathcal{C}$ 中的态射 F_0: $F(I)\to I$, 使

得对任意的 $X,Y,Z\in\mathcal{C}$, 下列等式成立:

$$
\begin{aligned}
&(id_{F(X)}\otimes F_2(Y,Z))\circ F_2(X,Y\otimes Z)\circ F(a_{X,Y,Z})\\
&\quad =a_{FX,FY,FZ}\circ(F_2(X,Y)\otimes id_{F(Z)})\circ F_2(X\otimes Y,Z),\\
&r_{FX}\circ(id_{F(X)}\otimes F_0)\circ F_2(X,I)\circ F(r_X^{-1})\\
&\quad =id_{F(X)}=l_{FX}(F_0\otimes id_{F(X)})F_2(I,X)\circ F(l_X^{-1}).
\end{aligned}
$$

此时由文献 [33] 和 [34], 我们称 F 为$\mathcal{C}$ 上的双单子, 若 F 满足下列条件:

$$
\begin{cases}
(M1)\ (m_X\otimes m_Y)\circ F_2(FX,FY)\circ F(F_2(X,Y))=F_2(X,Y)\circ m_{X\otimes Y};\\
(M2)\ F_2(X,Y)\circ\eta_{X\otimes Y}=\eta_X\otimes\eta_Y;\\
(M3)\ F_0\circ F(F_0)=F_0\circ m_I;\\
(M4)\ F_0\circ\eta_I=id_I.
\end{cases}
$$

由文献 [35], 我们称 F 为$\mathcal{C}$ 上的弱双单子, 若 F 满足下列条件:

$$
\begin{cases}
(W1)\ (m_X\otimes m_Y)\circ F_2(FX,FY)\circ F(F_2(X,Y))=F_2(X,Y)\circ m_{X\otimes Y};\\
(W2)\ m_X\circ F(r_{FX})\circ F(id_{FX}\otimes F_0)\circ F(id_{FX}\otimes m_I)\circ F(F_2(X,FI))\circ F(\eta_{X\otimes FI})\\
\qquad =r_{FX}\circ(id_{FX}\otimes F_0)\circ(id_{FX}\otimes m_I)\circ F_2(X,FI);\\
(W3)\ m_X\circ F(l_{FX})\circ F(F_0\otimes id_{FX})\circ F(m_I\otimes id_{FX})\circ F(F_2(FI,X))\circ F(\eta_{FI\otimes X})\\
\qquad =l_{FX}\circ(F_0\otimes id_{FX})\circ(m_I\otimes id_{FX})\circ F_2(FI,X);\\
(W4)\ a_{FX,FY,FZ}\circ(F_2(X,Y)\otimes id_{FZ})\circ F_2(X\otimes Y,Z)\circ\eta_{X\otimes Y\otimes Z}\\
\qquad =(id_{FX}\otimes m_Y\otimes id_{FZ})\circ(id_{FX}\otimes F_2(FY,Z))\circ(id_{FX}\otimes\eta_{FY\otimes Z})\circ a_{FX,FY,Z}\\
\qquad\quad \circ(F_2(X,Y)\otimes id_Z)\circ(\eta_{X\otimes Y}\otimes id_Z);\\
(W5)\ (F_2(X,Y)\otimes id_FZ)\circ F_2(X\otimes Y,Z)\circ\eta_{X\otimes Y\otimes Z}\circ a^{-1}_{X,Y,Z}\\
\qquad =(id_{FZ}\otimes m_Y\otimes id_{FZ})\circ(F_2(X,FY)\otimes id_{FZ})\circ(\eta_{X\otimes FY}\otimes id_{FZ})\circ a^{-1}_{X,FY,FZ}\\
\qquad\quad \circ(id_X\otimes F_2(Y,Z))\circ(id_X\otimes\eta_{Y\otimes Z}).
\end{cases}
$$

第 2 章　相关 Hom-Hopf 模与积分

2.1　函子与结构

定义 2.1　设 (H,α) 为 monoidal Hom-Hopf 代数, (A,β) 为 monoidal Hom-代数, 一个右 (H,α)-Hom-余模代数是一个 (H,α) Hom-余模 ($\rho_A : A \to A\otimes H$, $\rho_A(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$) 满足下列条件, 对任意的 $a, b \in A$,

$$\rho_A(ab) = a_{[0]}b_{[0]} \otimes a_{[1]}b_{[1]},$$

$$\rho_A(1_A) = 1_A \otimes 1_H.$$

定义 2.2　设 (H,α) 为 monoidal Hom-Hopf 代数, (A,β) 为右 (H,α)-Hom-余模代数. 一个相关 Hom-Hopf 模 (M,μ) 既是 (A,β)-Hom-模又是右 (H,α)-Hom-模 ($\rho_M : M \to M \otimes H$, $\rho_M(m) = m_{[0]} \otimes m_{[1]}$) 满足下列条件: 对任意的 $m \in M, a \in A$,

$$\rho_M(ma) = m_{[0]} \cdot a_{[0]} \otimes m_{[1]}a_{[1]}.$$

用 $\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$ 表示所有右相关 Hom-Hopf 模构成的范畴.

性质 2.1　忘却函子 $F : \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H \to \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A$ 存在右伴随函子 $G : \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A \to \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$. G 定义如下:

$$G(M) = M \otimes H,$$

结构映射为: 对任意的 $a \in A, m \in M, h \in H$,

$$(m \otimes h) \cdot a = m \cdot a_{[0]} \otimes ha_{[1]},$$

$$\rho_{G(M)}(m \otimes h) = (\mu^{-1}(m) \otimes h_{(1)}) \otimes \alpha(h_{(2)}),$$

证明　首先验证 $G(M) \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$. 直接验证即可知 $G(M)$ 是右 (H,α)-Hom-余模和右 (A,β)-Hom-模. 我们在此仅验证结合条件, 事实上, 对任意的 $a \in A$, 有

$$\begin{aligned}
&\rho_{G(M)}((m \otimes h) \cdot a) \\
&= \rho_{G(M)}(m \cdot a_{[0]} \otimes ha_{[1]})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu^{-1}(m) \cdot \beta^{-1}(a_{[0]}) \otimes h_{(1)} a_{[1](1)} \otimes \alpha(h_{(2)} a_{[1](2)}) \\
&= \mu^{-1}(m) \cdot a_{[0][0]} \otimes h_{(1)} a_{[0][1]} \otimes \alpha(h_{(2)}) a_{[1]} \\
&= (m \otimes h)_{[0]} \cdot a_{[0]} \otimes (m \otimes h)_{(1)} a_{[1]} \\
&= \rho(m \otimes c) \cdot a.
\end{aligned}
$$

取一个 A-线性映射 $\varphi : (M, \mu) \to (N, \nu)$, 令

$$G(\varphi) = \varphi \otimes id_H : M \otimes H \to N \otimes H.$$

直接计算可以证明 $G(\varphi)$ 为右 (A, β)-Hom-模同态和右 (H, α)-Hom-余模同态. 对任意的 $M \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$, 定义 $\eta_M : M \to M \otimes H$ 如下: 对任意的 $m \in M$,

$$\eta_M(m) = m_{[0]} \otimes m_{[1]}.$$

不难验证 $\eta_M \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$. 对任意的 $N \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A$, 定义 $\delta_N : N \otimes H \to N$, 对任意的 $n \in N$ 和 $h \in H$,

$$\delta_N(n \otimes h) = \varepsilon(h)\nu(n),$$

δ_N 是 (A, β)-线性的. 不难验证 $\eta_M \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$. 又易知 η 和 δ 均是自然变换, 并满足对任意的 $M \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$ 和 $N \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A$, 有

$$G(\delta_N) \circ \eta_{G(N)} = I_{G(N)},$$

$$\delta_{F(M)} \circ F(\eta_M) = I_{F(M)}.$$

由于 (A, β) 为右 (A, β)-Hom-模, $G(A)$ 是相关 Hom-Hopf 模, 结构如下: 对任意的 $a, b \in A, h \in H$.

$$(a \otimes h) \cdot b = ab_{[0]} \otimes hb_{[1]}; \tag{2-1}$$

$$\rho_{A \otimes H}(a \otimes h) = (\beta^{-1}(a) \otimes h_{(1)}) \otimes \alpha(h_{(2)}), \tag{2-2}$$

注意到 $GFG(A) = A \otimes H \otimes H \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)^H$, 对任意的 $a, b \in A, h, g \in H$, 可得

$$
\begin{cases}
(a \otimes h \otimes g) \cdot b = ab_{[0][0]} \otimes hb_{[0][1]} \otimes gb_{[1]}; \\
\rho_{A \otimes H \otimes H}(a \otimes h \otimes g) = (\beta^{-1}(a) \otimes \alpha^{-1}(h) \otimes g_{(1)}) \otimes \alpha(g_{(2)}).
\end{cases}
$$

类似地, 可以验证 $\widetilde{F} : \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H \to \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)^H$ 具有左伴随, 结构如下:

$$\widetilde{G} : \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)^H \to \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H, \widetilde{G}(N) = A \otimes N, \ N \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)^H.$$

$\widetilde{G}(N)$ 上的相关 Hom-Hopf 模结构如下: 对任意的 $a \in A$ 和 $n \in N$,

$$\begin{cases} (a \otimes n) \cdot b = a\beta(b) \otimes \nu^{-1}(n), \\ \rho_{A \otimes N}(a \otimes n) = (a_{[0]} \otimes n_{[0]} \otimes) \otimes a_{[1]} n_{[1]}. \end{cases}$$

由于 (H, α) 为右 (H, α)-Hom-余模, 则 $\widetilde{G}(H) = A \otimes H$ 可以作为相关 Hom-Hopf 模, 结构如下: 对任意的 $a \in A, h \in H$,

$$(a \otimes h) \cdot b = a\beta(b) \otimes \alpha^{-1}(h); \tag{2-3}$$

$$\rho_{A \otimes H}(a \otimes h) = (a_{[0]} \otimes h_{(1)} \otimes) \otimes a_{[1]} h_{(2)}, \tag{2-4}$$

通过式 (2-1)~式 (2-4) 可知, $A \otimes H$ 上的相关 Hom-Hopf 模结构有两种类型且它们的关系如性质 2.2.

性质 2.2 $A \otimes H$ 上有两种相关 Hom-Hopf 模结构, 其关系如下:

$$G(A) \cong \widetilde{G}(H) \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H.$$

证明 对任意的 $a \in A, h \in H$, 构造两个映射 u 和 v 如下:

$$u : A \otimes H \to A \otimes H, u(a \otimes h) = \beta(a_{[0]}) \otimes h\alpha^{-1}(a_{[1]}),$$
$$v : A \otimes H \to A \otimes H, u(a \otimes h) = \beta(a_{[0]}) \otimes h\alpha^{-1}(S(a_{[1]})).$$

可以验证 $u \circ v = id_{A \otimes H}$. 事实上,

$$\begin{aligned} u \circ v(a \otimes h) &= u(\beta(a_{[0]}) \otimes h\alpha^{-1}(S(a_{[1]}))) \\ &= \beta^2(a_{[0][0]}) \otimes (h\alpha^{-1}(S(a_{[1]})))\alpha^{-1}(a_{[0][1]}) \\ &= \beta(a_{[0]}) \otimes (hS(a_{[1](2)}))\alpha^{-1}(a_{[1](1)}) \\ &= \beta(a_{[0]}) \otimes \alpha^{-1}(h)(S(a_{[1](2)})a_{[1](1)}) \\ &= \beta(a_{[0]}) \otimes \alpha^{-1}(h)\varepsilon(a_{[1]}) \\ &= a \otimes h. \end{aligned}$$

类似地, 可以验证 $v \circ u = id_{A \otimes H}$. 不难验证 u 是 $\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$ 中的同态. □

2.2 自然变换与积分

定义 2.3 设 (H, α) 为 monoidal Hom-Hopf 代数, (A, β) 为右 (H, α)-Hom-余模代数. 称映射 $\phi : (H, \alpha) \to (A, \beta)$ 为整体积分需满足下列条件:

$$\rho_A \phi = (\phi \otimes id_H)\Delta_H, \quad \phi\alpha = \beta\phi, \qquad \phi(1_H) = 1_A.$$

性质 2.3　(A,β) 为右 (H,α)-Hom-余模代数, $(M,\mu),(N,\nu)\in\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$, $u:(N,\nu)\to(M,\mu)$ 是一个 k-线性映射且满足 $u\circ\nu=\mu\circ u$. 假设存在一个整体积分 $\phi:(H,\alpha)\to(A,\beta)$. 则

(1) 映射

$$\widetilde{u}:(N,\nu)\to(M,\mu),\ \widetilde{u}(n)=u(\nu(n_{[0]}))_{[0]}\cdot\phi(S(u(n_{[0]})_{[1]})\alpha^{-1}(n_{[1]})),\ n\in N$$

是右 (H,α)-余线性的.

(2) 若 $f:(M,\mu)\to(N,\nu)\in\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$ 是 k-可裂单射 (k-可裂满射), 则 f 有 (H,α)-余线性收缩 (部分).

证明　对任意的 $n\in N$, 有

$$\begin{aligned}
&\rho_M\circ\widetilde{u}(n)\\
=&u(\nu(n_{[0]}))_{[0][0]}\cdot\phi(S(u(n_{[0]})_{[1]})\alpha^{-1}(n_{[1]}))_{[0]}\\
&\otimes u(\nu(n_{[0]}))_{[0][1]}\phi(S(u(n_{[0]})_{[1]})\alpha^{-1}(n_{[1]}))_{[1]}\\
=&u(n_{[0]})_{[0]}\cdot\phi(S(u(\nu(n_{[0]}))_{[1](2)})\alpha^{-1}(n_{[1]}))_{[0]}\\
&\otimes u(\nu(n_{[0]}))_{[1](1)}\phi(S(u(\nu(n_{[0]}))_{[1](2)})\alpha^{-1}(n_{[1]}))_{[1]}\\
=&u(n_{[0]})_{[0]}\cdot\phi(S(u(\nu(n_{[0]}))_{[1](2)(2)})\alpha^{-1}(n_{[1](1)}))\\
&\otimes u(\nu(n_{[0]}))_{[1](1)}S(u(\nu(n_{[0]}))_{[1](2)(1)})\alpha^{-1}(n_{[1](2)})\\
=&u(n_{[0]})_{[0]}\cdot\phi(S(u(n_{[0]})_{[1](2)})\alpha^{-1}(n_{[1](1)}))\\
&\otimes u(\nu^2(n_{[0]}))_{[1](1)(1)}S(u(\nu(n_{[0]}))_{[1](1)(2)})\alpha^{-1}(n_{[1](2)})\\
=&u(n_{[0]})_{[0]}\cdot\phi(S(u(n_{[0]})_{[1](2)})\alpha^{-1}(n_{[1](1)}))\\
&\otimes[u(\nu(n_{[0]}))_{[1](1)(1)}S(u(\nu(n_{[0]}))_{[1](1)(2)})]n_{[1](2)}\\
=&u(n_{[0]})_{[0]}\cdot\phi(S(u(\nu^{-1}(n_{[0]}))_{[1]})\alpha^{-1}(n_{[1](1)}))\otimes\alpha(n_{[1](2)})\\
=&u(\nu(n_{[0][0]}))_{[0]}\cdot\phi(S(u(n_{[0][0]})_{[1]})\alpha^{-1}(n_{[1](1)}))\otimes n_{[1](2)}\\
=&(\widetilde{u}\otimes id_H)\circ\rho_N(n).
\end{aligned}$$

因此 $\widetilde{u}$ 是右 (H,α)-余线性的.

设 $u:(N,\nu)\to(M,\mu)$ 为 k-线性的, 则 $\widetilde{u}:(N,\nu)\to(M,\mu)$ 是右 (H,α)-余线性的. 假设 u 是 f 的收缩, 对任意的 $m\in M$, 有

$$\begin{aligned}
(\widetilde{u}\circ f)(m)&=u(\nu(f(m)_{[0]}))_{[0]}\cdot\phi(S(u(f(m)_{[0]})_{[1]})\alpha^{-1}(f(m)_{[1]}))\\
&=u(\nu(f(m_{[0]})))_{[0]}\cdot\phi(S(u(f(m_{[0]}))_{[1]})\alpha^{-1}(m_{[1]}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \nu(m_{[0][0]}) \cdot \phi(S(m_{[0][1]})\alpha^{-1}(m_{[1]})) \\
&= m_{[0]} \cdot \phi(S(m_{[1](1)})m_{[1](2)}) \\
&= m_{[0]}\varepsilon(m_{[1]}) \cdot 1_A = m.
\end{aligned}
$$

则 $\widetilde{u}:(N,\nu) \to (M,\mu)$ 是 f 的右 (H,α)-余线性收缩. 另外, 如果 u 是 f 的部分, 对任意的 $n \in N$, 有

$$
\begin{aligned}
(f \circ \widetilde{u})(n) &= f(u(\nu(n_{[0]}))_{[0]}) \cdot \phi(S(u(n_{[0]})_{[1]})\alpha^{-1}(n_{[1]})) \\
&= f(u(\nu(n_{[0][0]}))) \cdot \phi(S(u(n_{[0][1]}))\alpha^{-1}(n_{[1]})) \\
&= \nu(n_{[0][0]}) \cdot \phi(S(n_{[0][1]})\alpha^{-1}(n_{[1]})) \\
&= n_{[0]} \cdot \phi(S(n_{[1](1)})n_{[1](2)}) \\
&= n_{[0]}\varepsilon(n_{[1]}) \cdot 1_A = n.
\end{aligned}
$$

因此 $\widetilde{u}:(N,\nu) \to (M,\mu)$ 是 f 的右 H-余线性部分. □

性质 2.4 设 (A,β) 为右 (H,α)-Hom-余模代数. 则下列结论是等价的:

(1) 存在整体积分 $\phi:(H,\alpha) \to (A,\beta)$;

(2) 存在一个自然变换 $\lambda_A : \widetilde{F} \circ G \circ F \to F_A \circ 1_{\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H}$ 分裂 $\rho : \widetilde{F} \circ 1_{\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H} \to \widetilde{F} \circ G \circ F$;

(3) $\rho_A : A \to A \otimes H \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)^H$ 是可裂的.

因此, 如果上述任何一个条件成立, 则任何一个相关 Hopf 模作为 (H,α)-余模均是内射模.

证明 (1)⇒(2) 假定 $\phi:(H,\alpha) \to (A,\beta)$ 是整体积分. 可构造一个自然变换 λ 分裂 ρ. 设 $(M,\mu) \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$ 和 $\varphi : M \otimes H \to M$ 是 $\rho_M : M \to M \otimes H$, $\varphi(m \otimes h) = \varepsilon(h)m$ 的 k-线性收缩. 定义

$$
\begin{aligned}
&\lambda_M : \widetilde{F} \circ G \circ F(M) \to \widetilde{F}(M), \\
&\lambda_M(m \otimes h) = \mu(m_{[0]}) \cdot \phi(S(m_{[1]})\alpha^{-1}(h)).
\end{aligned}
$$

由性质 2.3 可知, λ_M 是 ρ_M 的右 (H,α)-余线性收缩.

接下来验证 $\lambda_M \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$ 是一个自然变换. 设 $f:(M,\mu) \to (N,\nu)$ 是 $\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$ 中的同态, 验证有

$$f \circ \lambda_M = \lambda_N \circ (f \otimes id_H).$$

由于 f 是右 (H,α)-余线性的, 有

$$\begin{aligned}\lambda_N \circ (f \otimes id_H)(m \otimes h) &= \lambda_N(f(m) \otimes h)\\ &= \nu(f(m)_{[0]}) \cdot \phi(S(f(m)_{[1]})\alpha^{-1}(h))\\ &= \nu(f(m_{[0]})) \cdot \phi(S(m_{[1]})\alpha^{-1}(h))\\ &= f \circ \lambda_M(m \otimes h).\end{aligned}$$

因此 λ_M 是一个自然变换且可分裂 ρ_M.

(2)⇒(3) 对任意的 $(M,\mu) \in \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H$, 假设 $\chi_M : \widetilde{F}(M) \to \widetilde{F} \circ G \circ F(M)$ 在右 H 余模范畴 $\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)^H$ 中是可裂的, 并且可裂的特征是函数式的. 特别地, 考虑相关 Hopf 模 (A,β), 则

$$\rho_A : A \to A \otimes H, \qquad \rho_A(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$$

在 $\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)^H$ 中是可裂的且令

$$\lambda_A : A \otimes H \to A$$

是它的右 (H,α)-余线性收缩.

(3)⇒(1) 假定映射 $\rho_A : A \to A \otimes H, \rho_A(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$ 在 $\widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)^H$ 中是可裂的. 设映射 $\lambda_A : A \otimes H \to A$ 可裂 ρ_A. 定义

$$\phi : (H,\alpha) \to (A,\beta), \qquad \phi(h) = i_A^{-1}(\lambda_A(1_A \otimes h)),$$

其中 $i_A : A \to A$ 是自然同构. 由于 λ_A 是右 (H,α)-余线性的, 有

$$\lambda_A(1_A \otimes h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = \lambda_A(1_A \otimes h)_{[0]} \otimes \lambda_A(1_A \otimes h)_{[1]}.$$

设 $\lambda_A(1_A \otimes h_{(1)}) = b$ 和 $\lambda_A(1_A \otimes h) = q$, 可得 $b \otimes h_{(2)} = q_{[0]} \otimes q_{[1]}$. 因此, ϕ 是 (H,α)-余线性的. 接下来只需验证 $\rho_A\phi = (\phi \otimes id_H)\Delta_H$. 对任意的 $h \in H$, 有

$$\rho_A \circ \phi(h) = \rho_A(i_A^{-1}(\lambda_A(1_A \otimes h))) = q_{[0]} \otimes q_{[1]}.$$

另外,

$$\begin{aligned}&(\phi \otimes id_H)\Delta_H(h) = \phi(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}\\ &= i_A^{-1}(\lambda_A(1_A \otimes h_{(1)})) \otimes h_{(2)} = b \otimes h_{(2)}.\end{aligned}$$

注意 $\phi(1_H) = i_A^{-1}(\lambda_A(1_A \otimes 1_H)) = i_A^{-1}(\lambda_A(\rho_A(1_A))) = i_A^{-1}(1_A) = 1_A$. 容易验证 $\phi\alpha = \beta\phi$. 因此 ϕ 是整体积分. □

推论 2.1　设 $F : \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H \to \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A$ 和 $\widetilde{F} : \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)_A^H \to \widetilde{\mathscr{H}}(\mathscr{M}_k)^H$ 为忘却函子. 则 F 是 $\widetilde{F}$-可分的, 当且仅当存在整体积分 $\phi : (H,\alpha) \to (A,\beta)$.