“十二五”国家重点图书

Springer 精选翻译图书

有限框架：理论与应用

Finite Frames: Theory and Applications

[美] Peter G. Casazza
[德] Gitta Kutyniok
主编

高建军　王 勇　译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

"十二五"国家重点图书

Springer 精选翻译图书

有限框架：理论与应用

Finite Frames: Theory and Applications

[美] Peter G. Casazza
[德] Gitta Kutyniok 主编

高建军 王 勇 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要介绍有限框架的基本理论和典型应用。全书共分为13章，包括绪论、框架的性质、特殊类框架、框架的应用以及框架概念的扩展等。

本书可作为高等院校从事数学分析、数字信号处理等学科研究生的教材，以及从事相关研究的科技工作者和工程技术人员的参考书。

黑版贸审字 08－2016－116

Translation from English language edition:

Finite Frames: Theory and Applications

by Peter G. Casazza and Gitta Kutyniok

图书在版编目(CIP)数据

有限框架：理论与应用/(美)Peter G. Casazza，(德)Gitta Kutyniok 主编；高建军，王勇译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.9

ISBN 978-7-5603-6212-0

Ⅰ.①有…　Ⅱ.①P…　②G…　③高…　④王…　Ⅲ.①调和函数-研究　Ⅳ.①O174.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 232227 号

电子与通信工程
图书工作室

责任编辑　刘　瑶　李长波
封面设计　高永利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　660mm×980mm　1/16　印张 30　字数 550 千字
版　　次　2017 年 9 月第 1 版　2017 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6212-0
定　　价　55.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

译者序

框架理论如今已经成为数学、计算机科学和工程中的一个基础研究方向，不仅深化了线性代数和矩阵理论的研究，同时也推动了应用调和分析、泛函分析和算子理论的发展。在信号处理、图像处理、生物学、地球物理学、成像学、量子计算、语音识别以及无线通信等领域均有应用。当需要对冗余且稳定的数据进行表示时，框架理论便迅速成为其中的一种关键方法。实际上，框架可以视作对正交基概念的自然推广。

有限维空间的框架，即有限框架，因为与应用息息相关，所以是一类非常重要的框架。本书第一次全面地介绍了有限框架的理论和应用，主要描述了有限框架理论的研究现状，并阐述了近 20 年来所取得的进展。本书可作为高等院校从事数学分析、数字信号处理等学科研究生的教材，以及从事相关研究的科技工作者和工程技术人员的参考书。

本书主要由王勇和高建军翻译。具体分工如下：高建军翻译第 1～6 章，王勇翻译第 7～13 章。参加本书翻译工作的人员还有李雪璐、朱鹏凯、徐新博和马淑歌等人，在此对他们的辛勤工作表示衷心的感谢。

由于本书中的各种理论和应用涉及面比较广，而且译者的水平和不可避免的片面性，翻译不当或表述不清之处在所难免，恳请广大读者及专家不吝赐教，提出修改意见。

本书在翻译时尊重原著，所有矢量、向量、矩阵等均未用黑体表示。

译　者

2017 年 2 月

前　　言

框架理论如今已经成为数学、计算机科学和工程中的一个基础研究方向，在多个不同领域有许多振奋人心的应用。框架理论于 1952 年由 Duffin 和 Schaeffer 两人首先提出，1986 年，Daubechies，Grossman 和 Meyer 的开拓性工作揭示了其对于信号处理的重要意义。自此，当需要对冗余且稳定的数据进行表示时，框架理论便迅速成为其中的关键方法。有限维空间的框架，即有限框架，因为与应用息息相关，所以是一类非常重要的框架。这本书全面地介绍了有限框架的理论和应用，通过各个章节概括了这个引人入胜的研究领域的多个方向。

现在，框架理论提供了大量的架构，用来对稳定的冗余信号进行分析和分解，并且还具有多种重构步骤。框架理论的主要方法是可以构成框架的表示系统。实际上，框架可以视作对正交基概念的最自然的推广。更具体而言，设 $(\varphi_i)_{i=1}^M$ 为 $\mathbf{R}^N$ 或 $\mathbf{C}^N$ 空间的一组向量，如果存在常数 $0<A\leqslant B<\infty$，使得对于所在空间的所有 x，都有 $A\|x\|_2\leqslant\|(\langle x,\varphi_i\rangle)_{i=1}^M\|_{\ell_2}\leqslant B\|x\|_2$ 成立，则上述向量可构成框架。常数 A 和 B 决定了框架的状况，当 $A=B=1$ 时即为最优，即导出了 Parseval（帕斯瓦尔）框架类。显然，对超完备系统而言，框架的概念允许包含冗余系统，这对于框架的抗干扰能力是很关键的，这里的干扰指的是信号 x 的框架系数 $(\langle x,\varphi_i\rangle)_{i=1}^M$ 受到的噪声、擦除和量化等干扰。这些框架系数可以用来进行图像边缘检测、语音信号传输或丢失数据恢复等。虽然分析算子 $x\mapsto(\langle x,\varphi_i\rangle)_{i=1}^M$ 将信号映射到了更高维空间，但是框架理论同时也提供了重建信号的有效方法。

框架理论的基本原理都是一些基础理念，这些理念对于一大部分研究领域而言都是基础性的，因此，新的理论见解和应用不断涌现。从这层意义上而言，框架理论不仅属于线性代数和矩阵理论，也可视作部分属于应用调和分析、泛函分析和算子理论。本书列举出它众多应用中的一部分，包括生物、地球物理学、成像学、量子计算、语音识别及无线通信。

本书描述了有限框架理论的研究现状，并阐述了近 20 年来取得的进展。本书既适用于对有限框架理论的最新发展感兴趣的研究人员，也适用于对这

个引人入胜的研究领域想要入门的研究生。

本书由 13 章构成，由本领域著名权威专家撰写，除了第 1 章有限框架理论引论部分，其余 12 章涵盖了有限框架理论和应用的诸多专题。第 1 章全面介绍了有限框架理论，为后续章节奠定了必要的基础。其余 12 章可分为 4 个专题：框架性质（第 2～4 章）、特殊类框架（第 5 章和第 6 章）、框架应用（第7～11 章）及框架概念的扩展（第 12 章和第 13 章）。每章包含了对应领域的现状，彼此之间可独立进行阅读。下面对每章内容简述如下：

第 1 章对有限框架理论的基础进行了全面介绍。首先在回答了为什么要研究框架的问题后，从希尔伯特空间理论和算子理论出发介绍了背景资料。接着，介绍了有限框架理论以及与框架相关的算子理论的基本知识。经过这些准备工作，读者就会对信号重建、特殊框架构建、框架性质及应用的一些著名结果有一个大致的了解。

第 2 章是解决在指定框架向量长度和框架算子频谱情况下构建框架的问题。经过数年的研究，已经得到了这个问题的完备解。作者细致入微地展示了如何利用衍生于谱图算法的方法来求解这个问题的算法解。

第 3 章致力于解决如何将一个框架分割为最少数线性独立或最多数生成子集的问题。直接运用 Rado－Horn 定理即可解决第一个问题，但这样做效率极其低下，也没有利用框架的性质。但是，作者改进了 Rado－Horn 定理，并利用框架性质推导出了特殊情况下解决这个问题的多种结果。

第 4 章指出了立足于几何也可以对框架进行分析的事实（除了从分析和代数的性质角度来分析框架外）。针对指定框架算子和框架向量长度的框架，通过几个例子，说明了如何成功利用代数几何方法得到这些框架的代数簇的局部坐标系。尔后，定义了格拉斯曼流形的角度和度量，并用它们证明了在 Parseval 框架类中通用 Parseval 框架是密集存在的。最后，本章从代数几何观点评述了无相位信号重建的结果。

第 5 章建立了有限群论和有限框框架间的联系。相应研究框架被称为群框架，由酉群作用于所在希尔伯特空间而得到。调和框架是一类特殊的群框架。本章的一个亮点是利用群框架来构建我们所最期望的等角框架，因为在应用中等角框架对擦除影响具有恢复能力。

第 6 章给出了关于有限阿贝尔群上 Gabor（盖伯）框架的一个基础而又独立的简述。前半章介绍了信号处理中 Gabor 分析的主要思想，证明了 Gabor 框架的一些基本结论。后半章涉及 Gabor 合成矩阵的几何性质，如线性独立、相干以及有限等距性质，正是这些性质使得 Gabor 框架可应用于压缩感知。

第 7 章研究了可控精度下利用框架来恢复编码、含噪和磨损数据的适宜性。在评述了框架对于含噪测量的恢复结果后，作者分析了擦除和误差校正的效果。一个主要结果表明，等角和随机 Parseval 框架对于抗上述干扰是具有最佳鲁棒性的。

第 8 章考虑了框架量化问题，这对于将模拟信号进行数字化过程是关键的一步。作者介绍了无记忆标量量化以及一阶和高阶 Σ－Δ 量化算法，并且就重建误差讨论了它们的性能。并特别指出，选择合适的量化方案和编码算子，将会使误差随过采样率呈几何级数递减。

第 9 章调查了稀疏信号处理的近期工作，稀疏信号处理在 2012 年已经成为一种新的模式。作者着力解决确定和随机状态下稀疏信号的精确或有损恢复、估计、回归和支持集检测等问题。等范数紧框架在噪声中检测稀疏信号可起到特殊作用，这个例子即可说明框架对于这种方法对策的意义。

第 10 章考虑了有限框架和滤波器组间的关系。在简单介绍了基本的相关操作如卷积、降采样、离散傅里叶变换和 Z 变换后，证明了滤波器组具有多相表达式，并讨论了它的性质和优点。之后，作者说明了如何实现与一个滤波器组相关联的框架的不同需求。

第 11 章分为两部分。第一部分叙述了从纯数学、应用数学以及工程的不同研究领域所产生的一些猜想。有趣的是，这些猜想都等价于 1959 年著名的 Kadison－Singer 难题。第二部分专注于 Paulsen 难题，由纯框架理论术语来表述，至今仍未解决。

第 12 章描述了框架的一种推广形式，称之为随机框架。这些框架的集合是一种概率测度集，以点测度的形式包含了通常的有限框架。作者叙述了随机框架的基本性质，并调查了一系列方向，如定向统计这个概念就悄然位列其中。

第 13 章介绍了融合框架，是框架的一种推广，被设计用来很好地模拟分布式处理。融合框架将信号投影到多维子空间来处理，这与只考虑一维投影的框架形成了对比。作者对许多结果进行了评论，包括融合框架构建、融合框架测量的稀疏重建以及融合框架的具体应用。

作者感谢在此书准备期间 Janet Tremain 的全力支持和帮助。

美国，密苏里，哥伦比亚　Peter G. Casazza
德国，柏林　Gitta Kutyniok

目　　录

第 1 章　有限框架理论引论 …………………………………………… 1

1.1　研究框架的意义 …………………………………………… 1
1.2　背景资料 …………………………………………………… 4
1.3　有限框架理论基础 ………………………………………… 12
1.4　框架和算子 ………………………………………………… 15
1.5　从框架系数进行重构 ……………………………………… 22
1.6　框架构建 …………………………………………………… 28
1.7　框架的性质 ………………………………………………… 34
1.8　有限框架的应用 …………………………………………… 38
1.9　扩展 ………………………………………………………… 40
本章参考文献 ………………………………………………………… 41

第 2 章　用已知频谱构造有限框架 ………………………………… 53

2.1　引言 ………………………………………………………… 53
2.2　谱图法 ……………………………………………………… 55
2.3　特征步法的必要性与充分性 ……………………………… 60
2.4　确定特征步的参数 ………………………………………… 65
2.5　通过特征步构造框架元素 ………………………………… 85
本章参考文献 ………………………………………………………… 104

第 3 章　有限框架的生成性和独立性 ……………………………… 108

3.1　引言 ………………………………………………………… 108
3.2　有限框架的生成性和独立性 ……………………………… 112
3.3　Rado－Horn 定理Ⅰ及其证明 ……………………………… 123
3.4　Rado－Horn 定理Ⅲ及其证明 ……………………………… 129
3.5　框架中生成集的最大数目 ………………………………… 133

3.6 问题 …… 135
本章参考文献 …… 136

第 4 章 代数几何和有限框架 …… 138

4.1 引言 …… 138
4.2 框架约束下的消去理论 …… 140
4.3 格拉斯曼流形 …… 154
本章参考文献 …… 164

第 5 章 群框架 …… 166

5.1 框架的对称性(其对偶框架和互补框架) …… 166
5.2 表示和 G—框架 …… 168
5.3 群矩阵和 G—框架的格拉姆矩阵 …… 169
5.4 所有紧 G—框架的特征描述 …… 171
5.5 调和框架 …… 172
5.6 等角调和框架和差集 …… 176
5.7 高度对称紧框架(和有限反射群) …… 177
5.8 核心 G—框架 …… 179
5.9 海森堡框架(SIC—POVMs)Zauner 猜想 …… 181
本章参考文献 …… 184

第 6 章 有限维 Gabor 框架 …… 187

6.1 引言 …… 187
6.2 $\mathbf{C}^N$ 中的 Gabor 框架 …… 189
6.3 作为时频分析工具的 Gabor 框架 …… 195
6.4 有限阿贝尔群中的 Gabor 分析 …… 201
6.5 Gabor 框架和 Gabor 框架算子的基本性质 …… 207
6.6 线性独立 …… 212
6.7 相干性 …… 218
6.8 约束等距常量 …… 224
6.9 压缩感知中的 Gabor 合成矩阵 …… 225
本章参考文献 …… 227

第 7 章　框架编码 …… 236

7.1　引言 …… 236
7.2　模拟数据编码框架 …… 237
7.3　压缩编码的融合框架 …… 249
本章参考文献 …… 256

第 8 章　量化和有限框架 …… 262

8.1　引言 …… 262
8.2　无记忆标量量化 …… 268
8.3　一阶 Sigma－Delta 量化 …… 275
8.4　高阶 Sigma－Delta 量化 …… 278
8.5　根指数精确度 …… 286
本章参考文献 …… 291

第 9 章　稀疏信号处理中的有限框架 …… 296

9.1　引言 …… 296
9.2　稀疏信号处理:一致保证和格拉斯曼框架 …… 298
9.3　一致保证性之外:典型行为 …… 307
9.4　用于稀疏信号存在性检测的有限框架 …… 315
9.5　其他主题 …… 322
本章参考文献 …… 322

第 10 章　框架理论与滤波器组 …… 329

10.1　引言 …… 329
10.2　框架与滤波器 …… 332
10.3　滤波器组 …… 344
10.4　多相表达式 …… 348
10.5　设计滤波器组框架 …… 359
本章参考文献 …… 367

第 11 章　有限框架理论中的卡迪森－辛格问题与保尔森问题 …… 370

11.1　引言 …… 370
11.2　卡迪森－辛格问题 …… 370

11.3 桑德伯格问题 …… 387
11.4 Paulsen 问题 …… 387
11.5 最后评论 …… 397
本章参考文献 …… 397

第 12 章 概率框架:概述 …… 401

12.1 引言 …… 401
12.2 概率框架 …… 402
12.3 概率框架的势 …… 412
12.4 与其他领域的关系 …… 413
本章参考文献 …… 420

第 13 章 融合框架 …… 423

13.1 引言 …… 423
13.2 融合框架基础 …… 426
13.3 融合框架势 …… 431
13.4 融合框架的构建 …… 434
13.5 融合框架的鲁棒性 …… 443
13.6 融合框架与稀疏 …… 448
13.7 正交融合框架 …… 453
本章参考文献 …… 456

附部分彩图 …… 461

第1章 有限框架理论引论

摘要 框架已经成为应用数学、计算机科学和工程中的一个标准概念，作为一种方法，对信号进行冗余且稳定的分解，便于分析和传输，同时也促进了稀疏展开。重构程序则基于相关对偶矩阵中的一个，当为Parseval框架时，可以选择框架本身。本章对有限框架理论进行了全面的论述，为后续章节奠定了基础。本章首先在回顾了希尔伯特空间理论和算子理论的一些背景信息后，引入了框架的概念及其一些重要性质和构建过程。然后讨论了算法方面，如基本的重构算法，并简要介绍了框架的多样化应用和扩展。本书后续章节将对许多有趣方向的重要专题进行展开。

关键词 有限框架应用；框架构建；对偶框架；框架；框架算子；Grammian 算子；希尔伯特空间理论；算子理论；重构算法；冗余；紧框架

1.1 研究框架的意义

100多年来，傅里叶变换一直是一种主要的分析工具，但它仅提供了频率信息，并（在其相位中）隐藏了关于信号的发射时刻和时长信息。D. Gabor在1946年引入了一个新的信号分解基本方法，从而解决了这个问题。Gabor的方法迅速成为这个领域的范例，因为它除了具有捕获信号特征的能力外，还提供了对加性噪声、量化和传输损失的复原方法。Gabor不知道的是，他没有通过任何形式体系便发现了一种框架的基本性质。1952年，Duffin和谢弗在研究非调和傅里叶级数的一些深层次的问题，处理$L^2[0,1]$上的过完备指数函数族时，需要用到一种形式结构。为此，他们提出了Hilbert（希尔伯特）空间框架的概念，Gabor方法现在只是其中的一种特殊情况，属于时频分析领域。很久以后，在20世纪80年代后期，Daubechies、格罗斯曼和迈耶（参见文献[75]）再次为框架的基本概念注入活力，他们展示了其对数据处理的重要性。

框架通常被用于信号和图像处理、非调和傅里叶级数、数据压缩和采样理论。但今天，框架理论的应用正不断增加，比如在纯数学和应用数学、物理学、工程学和计算机科学等问题上，不胜枚举。本书将对其中一些应用进行深入研究。由于这些应用大部分只需有限维空间的框架，因此这将是我们的重

点。在这种情况下,一个框架是一组向量的生成集,它通常是冗余(超完备)的,要求控制其条件数。因此,一个典型的框架拥有的框架向量数目多于相应空间的维数,并且在空间中的每个向量相对于该框架而言,将具有无限多的表述方式。正是框架的这种冗余性,成为它们在许多应用方面发挥作用的关键所在。

这种冗余性所担任的角色随着当前应用的需求而变化。第一,冗余性使设计更加灵活,使得可以构造一个框架来解决一个特殊的问题,而一组线性独立的向量是不可能完成的。例如,在量子层析领域,需要一类标准正交基,要求其具有如下性质:来自不同基底的向量的内积的模为常数。第二个例子来自于语音识别,比如当需要通过框架系数的绝对值来确定向量时(涉及相位因子)。第二,冗余具有稳健性。通过在较宽的向量范围内传播信息,就可实现对于损耗(擦除)的恢复。例如,当在无线传感器网络中发生传输损耗或传感器间歇性衰落时,或在模拟大脑而记忆细胞消亡时,擦除都是一个严重的问题。在一个较宽的向量范围内传播信息带来的另一个好处是可以减轻信号中噪声的影响。

以上例子仅代表在本书中框架理论和应用中的很小一部分。框架理论的构成原则都是一些基本理念,这些理念对于一大部分研究领域而言都是基础性的,因此,新的理论见解和应用不断涌现。从这层意义上讲,框架理论不仅属于线性代数和矩阵理论,也可认为部分属于应用调和分析、泛函分析和算子理论。

1.1.1 分解和展开的作用

下面介绍有限维数的情况。假定 X 是给定的数据,属于某实数或复数 N 维 Hilbert空间 $\mathscr{H}^N$。进而,让$(\varphi_i)_{i=1}^M$ 为 $\mathscr{H}^N$ 中的一个表征体系(即生成集),这个表征体系可从现有选项中选择,而这些选项则是依据所针对的数据类型而设计,抑或从数据的样本集合中学习而得到。

一种常见的数据处理方法是根据系统$(\varphi_i)_{i=1}^M$ 对数据 X 进行分解,即考虑下述映射:

$$x \mapsto (\langle x, \varphi_i \rangle)_{i=1}^M$$

可以看出,生成序列$(\langle x, \varphi_i \rangle)_{i=1}^M$ 属于 $\ell_2(\{1,\cdots,M\})$,可以被用于对 x 的传输等。此外,仔细选择表征体系将使我们能够解决各种分析任务。例如,在一定条件下图像 x 的边缘的位置和方向,可通过索引 $i \in \{1,\cdots,M\}$ 来确定,这些索引对应幅度 $|\langle x, \varphi_i \rangle|$ 中的最大系数,比如在$(\varphi_i)_{i=1}^M$ 是剪切波系统(参

见文献[115]）的情况下，这些系数通过硬阈值即可确定。最后，序列 $(\langle x,\varphi_i\rangle)_{i=1}^{M}$ 可对 x 进行压缩，当 $(\varphi_i)_{i=1}^{M}$ 选择为一个小波系统时，它实际上就是新的 JPEG2000 压缩标准的核心。

一种伴随方法是考虑序列 $(c_i)_{i=1}^{M}$ 满足 $x=\sum_{i=1}^{M} c_i\varphi_i$，从而对数据 x 进行展开。

众所周知，适当选择表征系统可以得到稀疏序列 $(c_i)_{i=1}^{M}$，即意味着 $\|c\|_0=\#\{i:c_i\neq 0\}$ 很小。例如，从上述意义而言（例如，见文献[77]、[122]、[133] 和它们的参考文献），某些小波系统通常可以将自然图像进行稀疏化。这个观测结果是允许应用现有稀疏性方法（比如针对 x 的压缩感知）冗余性的关键。相对于假设 x 明确给出的情况，在 x 只能隐性给出的情况下，比如所有偏微分方程（PDE）求解都面临这样的问题，对数据进行展开的方法也是非常有效的。因此，在试探函数空间中使用 $(\varphi_i)_{i=1}^{M}$ 作为生成系统，偏微分方程求解器的任务减少到只需函数计算 $(c_i)_{i=1}^{M}$，这有利于推导高效的求解（但必须像之前假设的稀疏序列的确存在（参见文献[73]、[106] 中的例子））。

1.1.2　超越标准正交基

选择表征体系 $(\varphi_i)_{i=1}^{M}$ 来生成 $\mathscr{H}^N$ 空间的一个正交基是标准选择，但对于前述应用，这种体系的线性无关性会导致各种问题。

以分解的观点开始，对于擦除而言，在传输时应用 $(\langle x,\varphi_i\rangle)_{i=1}^{N}$，其稳健性是不够的，因为仅擦除其中一个系数就会造成一次真正的信息丢失。另外，对于分析任务，正交基也不适用，因为它不允许在设计上有任何的灵活性，但这种灵活性是必需的，例如在方向性表征系统的设计上。事实上，没有同时具有如曲波或剪切波性质的正交基存在。

从展开的观点看，也不建议使用标准正交基。一个影响稀疏方法以及 PDE 求解器应用的具体问题是序列 $(c_i)_{i=1}^{M}$ 的唯一性，这种不灵活性禁止对稀疏系数序列的搜索。

很显然，允许系统 $(\varphi_i)_{i=1}^{M}$ 存在冗余，即可解决这些问题。当然，在利用修改的系统 $(\tilde{\varphi}_i)_{i=1}^{M}$ 进行典型数据处理时，其数值稳定性问题必须加以考虑。

$$x \mapsto (\langle x,\varphi_i\rangle)_{i=1}^{M} \mapsto \sum_{i=1}^{M}\langle x,\varphi_i\rangle\tilde{\varphi}_i \approx x$$

这自然就引出了（Hilbert 空间）框架的概念。其主要思想是在数据 x 与系数序列 $(\langle x,\varphi_i\rangle)_{i=1}^{M}$ 之间寻求一种可控的范数等价。

无论是在纯粹数学还是应用数学中，框架理论这个研究方向都与其他研

究领域关系非常密切。广义(Hilbert 空间)框架理论,特别是包括无限维的情况,贯穿了泛函分析与算子理论。它与应用谐波分析领域也有密切联系,此时,一个主要目的就是设计一种表征体系,这一般通过对傅里叶域进行精心分解来实现。一些研究者甚至认为框架理论隶属于这个领域。限制在有限维的情况下(习惯上使用有限框架理论这个称谓),古典矩阵理论和数值线性代数密切交叉,并且出现了新兴研究方向,比如压缩感知。

如今,框架已经成为应用数学、计算机科学和工程中的一个标准概念。由于其应用的重要性,有限框架理论值得特别关注,甚至可以考虑将其作为一个研究方向。这也是为什么本书特别关注有限框架理论的原因。后续章节将展示至今为止这个丰富而生动的研究领域的多样性,包括框架开发、框架具体性质分析、不同类别框架设计、框架的各种应用以及框架概念的扩展。

1.1.3 概述

首先,1.2 节介绍 Hilbert 空间理论和算子理论的一些背景资料,使得本书自成一体。随后在 1.3 节引出框架,接着是对与框架相关的 4 个主要算子的论述,即分析、合成、框架和 Gramian 算子(见 1.4 节)。重构结果和算法、对偶框架的概念,是 1.5 节的重点。这之后是展示紧致及非紧致框架的不同构建方法(1.6 节),1.7 节讨论框架的某些关键性质,特别是其生成性质、框架的冗余性和框架间的等价关系。最后简要介绍框架的多种应用和扩展(1.8 和 1.9 节)。

1.2 背景资料

首先来回顾 Hilbert 空间理论和算子理论的一些基本定义和结论,这是所有后续章节所需要的。本节没有给出所示结论的证明,而是参考了相应的标准文献,例如,Hilbert 空间理论和算子理论。这里强调下列的所有结论仅在有限维背景下展开,这是本书的重点所在。

1.2.1 Hilbert 空间理论基础回顾

令 N 为正整数,用 $\mathscr{H}^N$ 来表示实数或复数的 N 维 Hilbert空间。对此空间的研究将贯穿本书。有时为方便起见,将 $\mathscr{H}^N$ 等同于 $\mathbf{R}^N$ 或 $\mathbf{C}^N$,分别将 $\mathscr{H}^N$ 的内积和其范数表示为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$。

框架理论是一个正交基的概念。下面介绍后续章节需要用到的基本定义。

定义 1.1　如果 $\|x\|=1$,则称向量 $x\in\mathscr{H}^N$ 已归一化。两个向量 x,$y\in\mathscr{H}^N$,如果 $\langle X,Y\rangle=0$,则称其为正交。一个 $\mathscr{H}^N$ 空间的向量系统 $(e_i)_{i=1}^k$ 被称为:

(1) 完备的(或生成集),如果生成集 $\{e_i\}_{i=1}^k=\mathscr{H}^N$。

(2) 正交的,如果对所有的 $i\neq j$,向量 e_i 和 e_j 正交。

(3) 标准正交的,如果它是正交的,并且每个 e_i 是归一化的。

(4) $\mathscr{H}^N$ 的一个标准正交基,如果它是完备且标准正交的。

Hilbert 空间理论的一个基本结论是 Parseval 恒等式。

命题 1.1(Parseval 恒等式)　如果 $(e_i)_{i=1}^N$ 是 $\mathscr{H}^N$ 空间的一个标准正交基,则对每个 $x\in\mathscr{H}^N$,有

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^N|\langle x,e_i\rangle|^2$$

从一个信号处理的角度解释这个恒等式,就意味着信号的能量在映射 $x\mapsto(\langle x,e_i\rangle)_{i=1}^N$ 下被保持,将这种映射称为分析映射。不仅仅有标准正交基满足这种恒等关系,实际上,冗余系统(“非基”) 如 $(e_1,\frac{1}{\sqrt{2}}e_2,\frac{1}{\sqrt{2}}e_2,\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\frac{1}{\sqrt{3}}e_3,\cdots,\frac{1}{\sqrt{N}}e_N,\cdots,\frac{1}{\sqrt{N}}e_N)$ 也满足这种等价关系,称为 Parseval 框架。

由 Parseval 恒等式可得推论 1.1,这表明一个向量 x 可以通过一个简单的过程从系数 $(\langle x,e_i\rangle)_{i=1}^N$ 中得到恢复。因此,从应用的角度来看,这样的结果也可以被解释为一个重构公式。

推论 1.1　若 $(e_i)_{i=1}^N$ 是 $\mathscr{H}^N$ 的一个标准正交基,则对每个 $x\in\mathscr{H}^N$,有

$$x=\sum_{i=1}^N\langle x,e_i\rangle e_i$$

下面给出一系列的基本恒等式和不等式,这些在很多证明过程中将会用到。

命题 1.2　设 $x,\tilde{x}\in\mathscr{H}^N$:

(1) 柯西－施瓦茨不等式。

$$|\langle x,\tilde{x}\rangle|\leqslant\|x\|\|\tilde{x}\|$$

式中,对常数 c,此式当且仅当 $x=c\tilde{x}$ 时相等,c 为常数。

(2) 三角不等式。

$$\|x+\tilde{x}\|\leqslant\|x\|+\|\tilde{x}\|$$

(3) 极化恒等式(实数形式)。如果 $\mathscr{H}^N$ 是实数空间,则

$$\langle x,\tilde{x}\rangle=\frac{1}{4}[\|x+\tilde{x}\|^2-\|x-\tilde{x}\|^2]$$

(4) 极化恒等式(复数形式)。如果 $\mathscr{H}^N$ 是复数空间，则

$$\langle x,\tilde{x}\rangle=\frac{1}{4}[\|x+\tilde{x}\|^2-\|x-\tilde{x}\|^2]+\frac{\mathrm{i}}{4}[\|x+\mathrm{i}\tilde{x}\|^2-\|x-\mathrm{i}\tilde{x}\|^2]$$

(5) 勾股定理。给出两两正交向量 $(x_i)_{i=1}^M\in\mathscr{H}^N$，有

$$\|\sum_{i=1}^M x_i\|^2=\sum_{i=1}^M\|x_i\|^2$$

以基本符号和定义开始介绍 $\mathscr{H}^N$ 的子空间。

定义 1.2 设 $\mathscr{W},\mathscr{V}$ 为 $\mathscr{H}^N$ 的子空间。

(1) 向量 $x\in\mathscr{H}^N$ 被称为与 $\mathscr{W}$ 正交(记作 $x\perp\mathscr{W}$)，如果

$$\langle x,\tilde{x}\rangle=0,\quad \tilde{x}\in\mathscr{W}$$

则 $\mathscr{W}$ 的正交补集定义为

$$\mathscr{W}^{\perp}=\{x\in\mathscr{H}^N:x\perp\mathscr{W}\}$$

(2) 如果 $\mathscr{W}\subset\mathscr{V}^{\perp}$(或等价地 $\mathscr{V}\subset\mathscr{W}^{\perp}$)，子空间 $\mathscr{W}$ 和 $\mathscr{V}$ 被称为正交子空间(记为 $\mathscr{W}\perp\mathscr{V}$)。

正交直和的概念可以看作 Parseval 恒等式的推广(命题 1.1)，它在第 13 章将发挥重要作用。

定义 1.3 设 $(\mathscr{W}_i)_{i=1}^M$ 是 $\mathscr{H}^N$ 的一个子空间族，则其正交直和被定义为如下空间：

$$\left(\sum_{i=1}^M\oplus\mathscr{W}_i\right)_{\ell^2}:=\mathscr{W}_1\times\cdots\times\mathscr{W}_M$$

对于所有

$$x=(x_i)_{i=1}^M,\quad \tilde{x}=(\tilde{x}_i)_{i=1}^M\left(\sum_{i=1}^M\oplus\mathscr{W}_i\right)_{\ell^2}$$

内积被定义为

$$\langle x,\tilde{x}\rangle=\sum_{i=1}^M\langle x_i,\tilde{x}\rangle_i$$

当选择 $\tilde{x}=x$ 时，可得到 $\|x\|^2=\sum_{i=1}^M\|x_i\|^2$，这是 Parseval 恒等式的扩展。

1.2.2 算子理论基础回顾

下面介绍全书中都在使用的算子理论的基本结论。每个线性算子有一个相关的矩阵表示。

定义 1.4 设 $T:\mathscr{H}^N\to\mathscr{H}^K$ 是一个线性算子，$(e_i)_{i=1}^N$ 是 $\mathscr{H}^N$ 上的一个标准