[挪威]盖尔·埃文森(Geir Evensen) 著
刘厂 赵玉新 高峰 译

数据同化
——集合卡尔曼滤波
(第2版)

Data Assimilation
The Ensemble Kalman Filter
(2nd Edition)

国防工业出版社
National Defense Industry Press
Springer

数据同化——集合卡尔曼滤波

（第 2 版）

Data Assimilation

The Ensemble Kalman Filter（2nd edition）

[挪威]盖尔·埃文森（Geir Evensen）　著

刘厂　赵玉新　高峰　译

张绍晴　主审

国防工业出版社

·北京·

著作权合同登记　图字：军-2016-145 号

图书在版编目（CIP）数据

数据同化-集合卡尔曼滤波：第 2 版 /（挪）盖尔·埃文森（Geir Evensen）著；刘厂，赵玉新，高峰译. —北京：国防工业出版社，2017.4

书名原文：Data Assimilation-The Ensemble Kalman Filter（2nd edition）

ISBN 978-7-118-11315-0

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①盖…　②刘…　③赵…　④高…
Ⅲ. ①遥感数据一数据处理　②卡尔曼滤波器
Ⅳ. ①TP751.1　②TM713

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 076690 号

※

国防工業出版社 出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048）
三河市众誉天成印务有限公司印刷
新华书店经售

开本 710×1000　1/16　印张 17　字数 343 千字
2017 年 4 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—2000 册　定价 78.00 元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

译 者 序

集合卡尔曼滤波是贝叶斯信息估计理论的一个直接实现，除了用有限集合来离散代表动力背景的概率密度分布外，它几乎就是贝叶斯条件概率计算公式的直接诠释，因而是将动力模式和观测系统进行最佳结合的资料同化（Data Assimilation）（中文文献通常翻译成数据同化）问题有效而又直接了当的解。集合卡尔曼滤波目前已成为国际上普遍推崇的数据同化方法并正在被广泛使用和发展。

G. Evensen 编写的《数据同化——集合卡尔曼滤波》第 2 版，除包括原版的基础理论介绍和各种滤波方法推导外，又增加了对前沿应用问题的讨论，比如在集合卡尔曼滤波中如何思考计算资源使用问题；应用实例中增加了工业生产中的实际问题，如在石油勘探中如何用实际生产数据来估计油气储层仿真模式中的孔隙度和渗透率等参数而对模式进行优化等。该书是作者根据多年的科研和教学工作经验编写而成的，在章节安排上遵循由浅入深、循序渐进的原则，并结合实例对重点内容进行讲解，有助于读者全面、系统地掌握数据同化相关的知识。

在本书翻译和出版过程中，课题组的多名研究生对初稿进行了仔细校对，在此表示感谢。同时，感谢国家海洋信息中心的张学峰研究员、吴新荣副研究员对书稿认真细致地审阅，并提出了许多宝贵的意见和建议。中国海洋大学的张绍晴教授结合长期在 GFDL/NOAA 领域利用集合卡尔曼滤波作气候分析和预报初始化工作的经验对书稿进行了全面审定和校对，在此表示感谢。

本书的翻译和出版工作得到了国家重点研发计划项目（2017YFC1404100）、国家自然科学基金面上项目（41676088）和中央高校基本科研业务费专项资金（HEUCF041705）的资助。

由于译者水平所限，书中难免还有疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

2017 年 2 月于哈尔滨

第 2 版序言

本书第 2 版为第 13 章的平方根算法提供了一个更完整的表达，在第 1 版中该部分表达不成熟。随着本书第 1 版的出版，关于平方根算法的理解已经得到了显著的发展和增强。

本书增加了一个新的章节“伪相关性、局地化和膨胀”，并对相关问题进行了讨论。同时对集合滤波方法中使用有限的集合大小所造成的伪相关性的影响进行量化。该章提出并讨论了膨胀与局地化方法来减小伪相关性的影响，并提出了一个自适应膨胀算法。

在第 11 章中，在考虑使用极少量奇异向量的采样会导致物理上的不切实际和过于平滑实现的基础上，提出了改进的采样算法。

第 13 与 14 章都使用更新平方根算法来重复试验。在第 14 章中包含了一节关于当使用集合统计来评估误差协方差矩阵时对分析方差有效性的讨论。

最后对附录中的材料进行了整理，同时对参考文献列表进行了更新，其中添加了很多最新关于集合卡尔曼滤波（EnKF）的文献。

在本书第 2 版准备期间与 Pavel Sakov 和 Laurent Bertino 等人进行了互动与讨论，在此向二位表示感谢。

盖尔 · 埃文森

2009 年 6 月于卑尔根

序　言

本书的目的是介绍一些数据同化问题的公式与求解方法，主要集中在那些允许模式包含误差与误差统计随时间演化的方法上。对所谓的强约束方法以及误差统计为常数的方法只是做了简单的介绍，并且作为通用的弱约束问题的特例。

本书重点关注集合卡尔曼滤波（EnKF）和类似的方法。由于这些方法易于实现与解释，并适用于非线性模式，已经变得非常流行。

该书是在多年来关于数据同化方法研究工作的基础上，结合讲授研究生数据同化课程过程中积累的经验完成的。如果没有与学生和同事之间的持续互动与交流，不可能完成这本书的撰写。这里我要特别感谢 Laurent Bertino，Kari Brusdal，Francois Counillon，Mette Eknes，Vibeke Haugen，Knut Arild Lisæter，Lars Jørgen Natvik，Jan Arild Skjervheim 等与我共事多年的同事们的支持与帮助。感谢 Laurent Bertino 与 Francois Counillon 提供的关于海洋数据同化系统 TOPAZ 相关的材料。同时也要对 Laurent Bertino，Theresa Lloyd，Gordon Wilmot，Martin Miles，Jennifer Trittschuh-Vallès，Brice Vallès 与 Hans Wackernagel 等人对本书的最终版本中相关章节的贡献表示感谢。

希望本书能为数据同化问题提供一个全面的阐述，并且希望它能作为从事数据同化方法及其应用等领域研究的学生和学者的教科书。

盖尔 · 埃文森

2006 年 6 月于卑尔根

符 号 表

a	变差函数模式中解的相关长度(11.2)～(11.4)[①]；标量模式(5.5)，(5.22)，(8.22)和(12.23)的初始条件误差
$A(z)$	5.3 节中表示埃克曼模式中的垂直扩散系数
$A_0(z)$	5.3 节中表示埃克曼模式中垂直扩散系数的初猜值
$\boldsymbol{a}$	向量模式(5.70), (6.8)～(6.10),(7.2)的初始条件误差
$\boldsymbol{A}_i$	第 9 章中表示t_i时刻的集合矩阵
$\boldsymbol{A}$	第 9 章中表示集合矩阵
$\boldsymbol{b}$	分析方案(3.38)中为了求解欧拉方程而定义的向量参数
$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t)$	第 7 章中表示边界条件误差
$\boldsymbol{b}_0$	5.3 节中表示埃克曼模式中上边界的随机误差
$\boldsymbol{b}_H$	5.3 节中表示埃克曼模式中下边界的随机误差
c	傅里叶频谱(11.10)和(11.14)中的常数；模拟模式误差(12.21)时应用的常数乘数因子
c_i	模拟模式误差(12.55)时应用的乘数
c_d	5.3 节中表示埃克曼模式中的风应力拖曳系数
c_{d0}	5.3 节中表示埃克曼模式中风应力拖曳系数的初猜值
c_{rep}	第 12 章中表示应用代表函数法建立模式误差时应用的常数乘数因子
$C_{\psi\psi}$	标量状态变量的误差协方差
$C_{c_dc_d}$	风应力拖曳系数c_{d0}的误差协方差
$C_{AA}(z_1,z_2)$	垂直扩散系数$A_0(z)$的误差协方差
$C_{\psi\psi}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$	标量场$\psi(\boldsymbol{x})$(2.25)的误差协方差
$\boldsymbol{C}_{\psi\psi}$	离散的$\boldsymbol{\psi}$的误差协方差(或是$\boldsymbol{C}_{\psi\psi}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$的缩写)
$\boldsymbol{C}_{\psi\psi}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$	由标量状态变量组成的向量$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$的协方差
$C_{\epsilon\epsilon}$	第 3 章中表示ϵ的方差
C_{aa}	标量初始误差协方差
C_{qq}	模式误差协方差
$\boldsymbol{C}$	第 9 章中表示集合分析方法中用于求逆的矩阵

① 括号中表示公式号，余同。

$\boldsymbol{C}_{\epsilon\epsilon}$	测量误差协方差$\boldsymbol{\epsilon}$
$\boldsymbol{C}_{\epsilon\epsilon}^{e}$	观测误差$\boldsymbol{\epsilon}$协方差
$\boldsymbol{C}_{aa}$	初始误差协方差
$\boldsymbol{C}_{qq}$	模式误差协方差
d	观测值
$\boldsymbol{d}$	观测向量
$\boldsymbol{D}$	第 9 章中表示观测扰动
$\boldsymbol{D}_j$	第 9 章中表示在第j个采样时间的观测扰动
$\boldsymbol{E}$	第 9 章中表示观测扰动
$f(\boldsymbol{x})$	任意函数，如式(3.55)所示
$f(\psi)$	概率密度函数，可写作$f(\psi)$与$f(\boldsymbol{\psi})$，其中，$\boldsymbol{\psi}$为向量或区域中的向量
F	分布函数，如式(2.1)所示
$g(\boldsymbol{x})$	任意函数，如式(3.55)和式(3.59)所示
G	线性模式(4.1)中标量状态的算子，非线性模式(4.14)中标量状态的算子
$\boldsymbol{G}$	线性模式(4.11)中状态向量的算子，非线性模式(4.21)，(9.1)和(7.1)中状态向量的算子
$h(\,)$	在不同情况下应用的任意函数
H	5.3 节中表示埃克曼模式中底边界的值
$\boldsymbol{h}$	新息向量(3.51)；空间距离向量(11.1)
$i(j)$	图 7.1 中表示关于观测j的时间索引
$\boldsymbol{I}$	单位矩阵
J	图 7.1 中表示观测的次数
$\boldsymbol{k}$	5.3 节中表示埃克曼模式中的单位列向量(0,0,1)；第 11 章中的波数$\boldsymbol{k}=(\kappa,\lambda)$
$\boldsymbol{k}_h$	渗透率
$\boldsymbol{K}$	卡尔曼增益矩阵(3.85)
$\boldsymbol{m}_j$	图 7.1 中表示第j个时刻观测的数量
$\boldsymbol{m}$	表示$\boldsymbol{m}_j$的缩写
$\boldsymbol{m}(\psi)$	附录中表示非线性观测函数
M	同化窗口内的观测总数
$\boldsymbol{M}$	离散状态向量(3.76)的观测矩阵；观测矩阵算子(10.20)
n	第 9 章与第 10 章中表示状态向量的维数$n=n_\psi+n_\alpha$
n_α	第 9 章与第 10 章中表示参数个数
n_ψ	第 7～10 章中表示模式状态的维数
n_x	第 11 章中表示x轴方向上的网格数目
n_y	第 11 章中表示y轴方向上的网格数目

N	样本或集合的大小
p	第 3 章中表示标量或标量区域的初猜值误差；第 14 章中表示矩阵的秩；式(6.24)中表示概率
p_A	表示 5.3 节中埃克曼模式的垂直扩散系数的初猜值误差
p_{c_d}	表示 5.3 节中埃克曼模式的风拖曳系数的初猜值误差
P	第 17 章中表示储层压力
q	用于卡尔曼滤波公式，表示标量模式的随机误差
$\boldsymbol{q}(i)$	式(6.16)中表示t_i时刻的模式误差
$\boldsymbol{q}$	用于卡尔曼滤波公式，表示向量模式的随机误差
$\boldsymbol{Q}$	11.4 节中表示模式噪声集合
r	式(11.10)中表示傅里叶空间的去相关长度
r_1	式(11.11)中表示傅里叶空间中主要方向上的去相关长度
r_2	式(11.11)中表示傅里叶空间与主要方向正交的去相关长度
r_x	式(11.23)中表示物理空间中主要方向上的去相关长度
r_y	式(11.23)中表示物理空间与主要方向正交的去相关长度
$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)$	式(3.39)与式(5.48)中表示代表函数向量
$\boldsymbol{r}$	影响函数矩阵(3.80)
$\boldsymbol{R}$	代表函数矩阵(3.63)
R_s	第 17 章中表示在储层中呈液态、在表层变成气态的气体的量
R_v	第 17 章中表示在储层中呈冷凝状、在表层变成液态的气体的量
S_w	第 17 章中表示水的饱和度
S_g	第 17 章中表示气的饱和度
S_o	第 17 章中表示油的饱和度
$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t)$	代表函数(5.49)的伴随向量
$\boldsymbol{S}_j$	第 9 章中表示在j时刻的集合扰动观测
$\boldsymbol{S}$	第 9 章中表示集合扰动观测
t	时间变量
T	一些例子中表示同化的最终时间
u	式(5.99)中的因变量
$\boldsymbol{u}(z)$	5.3 节中表示埃克曼模式中的水平速度向量
$\boldsymbol{u}_0(z)$	5.3 节中表示埃克曼模式中速度向量的初始条件
$\boldsymbol{U}$	11.4 节与式(14.68)的奇异值分解中表示左奇异向量
$\boldsymbol{U}_0$	式(14.19)的奇异值分解中表示左奇异向量
$\boldsymbol{U}_1$	式(14.52)的奇异值分解中表示左奇异向量
$\boldsymbol{v}$	式(5.101)中表示任意向量
$\boldsymbol{V}$	11.4 节与式(14.68)的奇异值分解中表示右奇异向量

$\boldsymbol{V}_0$	式(14.19)的奇异值分解中表示右奇异向量
$\boldsymbol{V}_1$	式(14.52)的奇异值分解中表示右奇异向量
w_k	式(11.33)中表示采样于均值为 0、方差为 1 的分布的一个随机样本
W_{aa}	标量初始误差协方差的逆
$\boldsymbol{W}$	在式(14.63)与式(14.64)中定义的矩阵
$\boldsymbol{W}_{\psi\psi}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$	$\boldsymbol{C}_{\psi\psi}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$的泛函逆，例：式(3.27)
$\boldsymbol{W}_{aa}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$	初始误差协方差的泛函逆
$\boldsymbol{W}_{aa}$	初始误差协方差的逆
$\boldsymbol{W}_{\eta\eta}$	式(6.19)中表示平滑权重矩阵
$\boldsymbol{W}_{\epsilon\epsilon}$	协方差矩阵$\boldsymbol{C}_{\epsilon\epsilon}$的逆矩阵
$\boldsymbol{x}$	独立空间变量
x_n	第 11 章中表示网格中x方向的位置$x_n = n\,\Delta\,x$
$\boldsymbol{X}_0$	式(14.26)与式(14.51)中定义的矩阵
$\boldsymbol{X}_1$	式(14.30)与式(14.55)中定义的矩阵
$\boldsymbol{X}_2$	式(14.34)与式(14.59)中定义的矩阵
x，y，z	Lorenz 模式中的因变量(6.5) (6.6)
$\boldsymbol{x}$	Lorenz 模式中的因变量$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = (x,y,z)$
$\boldsymbol{x}_0$	Lorenz 模式中的初始条件$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} = (x_0,y_0,z_0)$
y_m	第 11 章中表示网格中y方向的位置$y_m = m\,\Delta\,y$
$\boldsymbol{Y}$	式(14.65)中定义的矩阵
$\boldsymbol{Z}$	来自特征值分解的特征向量矩阵
$\boldsymbol{Z}_1$	来自特征值分解(14.27)的特征向量矩阵
$\boldsymbol{Z}_p$	来自特征值分解(14.15)的包含p个特征向量的矩阵
$\mathcal{B}$	观测空间中的罚函数，例如式(3.66)中的$\mathcal{B}[\boldsymbol{b}]$
$\mathcal{D}$	模式区域
$\partial\mathcal{D}$	模式区域的边界
$\mathcal{H}$	在混合 Monte Carlo 算法中应用的哈密顿函数(6.25)
$\boldsymbol{\mathcal{H}}$	Hessian 运算符(模式运算符的二阶导数)
$\mathcal{J}$	罚函数，例如$\mathcal{J}[\boldsymbol{\psi}]$
$\mathcal{M}$	标量观测函数(3.24)
$\boldsymbol{\mathcal{M}}$	观测函数向量
$\mathcal{N}$	正态分布
$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	在代表函数方法中被反演的矩阵(3.50)
α	11.4 节中的参数
α_1,α_2	第 3 章中应用的系数

α_{ij}　式(17.1)中应用的系数

$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})$　第 7 章中表示待估计的未知模式参数

$\boldsymbol{\alpha}'(\boldsymbol{x})$　第 7 章与第 10 章中表示模式参数误差

β　Lorenz 模式(6.7)中的参数；11.4 节中的常数(包括β_{ini}和β_{mes})

$\delta\psi$　ψ的变化量

ϵ　第 3 章中表示真实观测误差

$\epsilon_{\mathcal{M}}$　5.2.3 节中表示观测算子的额外误差

ϵ_d　5.2.3 节中表示真实的观测误差

ϵ　5.2.3 节中表示观测误差与算子误差之间的随机误差

$\boldsymbol{\eta}$　在梯度方法(6.19)中应用的平滑算子

γ　在式(6.32)中表示用于平滑范数分析的常数；在式(6.22)中表示步长

$\gamma(\boldsymbol{h})$　变差函数(11.1)

$\kappa_2(\boldsymbol{A})$　第 11 章中表示条件数

κ_l　第 11 章中表示在x方向的波数

λ_p　第 11 章中表示在y方向的波数

λ　式(13.18)中表示特征值；式(5.37)中表示标量伴随变量

$\boldsymbol{\lambda}$　向量伴随变量

$\boldsymbol{\Lambda}$　由特征值分解得到的以特征值为对角线的对角阵

$\boldsymbol{\Lambda}_1$　式(14.26)中表示由特征值分解得到的以特征值为对角线的对角阵

$\boldsymbol{\Lambda}_p$　式(14.14)中表示由特征值分解得到的以特征值为对角线的对角阵

μ　样本均值(2.20)

$\mu(\boldsymbol{x})$　样本均值(2.23)

ω　频率变量(6.33)

ω_i　噪声过程(8.10)的单位方差

$\boldsymbol{\Omega}$　噪声过程ω_i(8.12)的误差协方差

ϕ　第 2 章中表示标量变量

$\phi(\boldsymbol{x})$　第 17 章中表示孔隙度

$\phi_{l,p}$　式(11.10)中表示均匀分布随机数

Φ　第 2 章中表示标量随机变量

π　圆周率

$\boldsymbol{\pi}$　混合 Monte Carlo 算法(6.25)中应用的动量变量

ψ　标量状态变量(方差为$C_{\psi\psi}$)

$\psi(\boldsymbol{x})$　标量状态变量场(方差为$\boldsymbol{C}_{\psi\psi}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$)

$\hat{\psi}(\boldsymbol{k})$　第 11 章中表示$\psi(\boldsymbol{x})$傅里叶变换

$\boldsymbol{\psi}$　向量状态变量，例如：由离散化$\psi(\boldsymbol{x})$得到的(方差为$\boldsymbol{C}_{\psi\psi}$)

$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$　标量状态变量组成的向量(方差为$\boldsymbol{C}_{\psi\psi}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$)

Ψ	第 2 章中表示随机标量变量
Ψ_0	标量动力模式初始条件的最佳猜测，可为$\boldsymbol{x}$的函数
$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$	向量场，常缩写为$\boldsymbol{\psi}$
$\boldsymbol{\psi}_0$	第 7 章中表示初始条件$\boldsymbol{\Psi}_0$的估计
$\boldsymbol{\psi}_b$	第 7 章中表示边界条件$\boldsymbol{\Psi}_b$的估计
$\boldsymbol{\Psi}$	第 10 章中表示组合状态向量
$\boldsymbol{\Psi}_0$	初始条件的最佳猜测
$\boldsymbol{\Psi}_b$	第 7 章中表示边界条件的最佳猜测
ρ	式(11.33)的相关参数；Lorenz 模式(6.6)中的系数
$\boldsymbol{\Sigma}$	11.4 节与式(14.68)中表示来自奇异值分解的奇异值矩阵
$\boldsymbol{\Sigma}_0$	来自奇异值分解(14.19)的奇异值矩阵
$\boldsymbol{\Sigma}_1$	来自奇异值分解(14.52)的奇异值矩阵
σ	第 2 章中定义的标准差；用于 Lorenz 模式(6.5)的系数；11.4 节与第 13、14 章中表示的奇异值
τ	式(12.1)中表示去相关时间长度
θ	模拟退火算法中应用的伪温度变量；式(11.11)中主方向的旋转角度
$\boldsymbol{\Theta}$	第 13 章 SQRT 分析方法中应用的随机旋转
ξ	Metropolis 算法中应用的随机数
$\boldsymbol{\xi}$	在模式边界域上运行的坐标
$\mathbf{1}_N$	每个元素都为 1 的$N \times N$矩阵
$\delta(\,)$	狄拉克函数(3.24)
$\boldsymbol{\delta}_{\psi_i}$	第 7 章中用于提取状态向量分量的一个向量
$E[\,]$	期望算子
$\mathcal{O}(\,)$	量级函数的阶数
$\Re$	实数空间维数，例如：$\Re^{n\times m}$表示 $n \times m$阶实数矩阵

目 录

第 1 章 引言……1
第 2 章 统计学定义……4
2.1 概率密度函数……4
2.2 统计矩……6
2.2.1 期望值……6
2.2.2 方差……7
2.2.3 协方差……7
2.3 样本统计……7
2.3.1 样本均值……8
2.3.2 样本方差……8
2.3.3 样本协方差……8
2.4 随机场统计……8
2.4.1 样本均值……8
2.4.2 样本方差……9
2.4.3 样本协方差……9
2.4.4 相关性……9
2.5 偏差……9
2.6 中心极限定理……10
第 3 章 分析方案……11
3.1 标量……11
3.1.1 状态-空间公式……11
3.1.2 贝叶斯公式……13
3.2 扩展到空间维度……13
3.2.1 基本公式……13
3.2.2 欧拉-拉格朗日方程……15
3.2.3 解决方案……16
3.2.4 描述函数矩阵……16
3.2.5 误差估计……17
3.2.6 解的唯一性……18
3.2.7 罚函数的最小化……19

3.2.8 罚函数的先验与后验值……20
3.3 离散形式……20
第 4 章 顺序的数据同化……22
4.1 线性动力学……22
4.1.1 标量下的卡尔曼滤波……22
4.1.2 矢量下的卡尔曼滤波……23
4.1.3 具有线性平流方程的卡尔曼滤波……23
4.2 非线性动力学……26
4.2.1 标量下的扩展卡尔曼滤波……26
4.2.2 扩展卡尔曼滤波器的矩阵形式……27
4.2.3 扩展卡尔曼滤波举例……29
4.2.4 扩展卡尔曼滤波器的平均值……30
4.2.5 讨论……31
4.3 集合卡尔曼滤波……31
4.3.1 误差统计的表述……31
4.3.2 误差统计的预测……32
4.3.3 分析方案……33
4.3.4 讨论……35
4.3.5 QG 模式的应用实例……36
第 5 章 变分逆问题……38
5.1 简单例子……38
5.2 线性逆问题……41
5.2.1 模式和观测……41
5.2.2 观测函数……41
5.2.3 观测方程的说明……41
5.2.4 统计假设……42
5.2.5 弱约束变分公式……42
5.2.6 罚函数的极值……42
5.2.7 欧拉-拉格朗日方程……43
5.2.8 强约束逼近……44
5.2.9 代表函数展开获得的解……45
5.3 使用埃克曼模式的代表函数法……46
5.3.1 逆问题……46
5.3.2 变分公式……47
5.3.3 欧拉-拉格朗日方程……48
5.3.4 代表函数的解……48
5.3.5 范例试验……49

5.3.6 真实观测的同化 ······52
5.4 对代表函数法的评价 ······55
第 6 章 非线性变分逆问题 ······58
6.1 非线性动力的延伸 ······58
6.1.1 洛伦兹方程的广义逆 ······59
6.1.2 强约束假设 ······59
6.1.3 弱约束问题的解 ······62
6.1.4 梯度下降法的最小化 ······63
6.1.5 遗传算法最小化 ······64
6.2 洛伦兹方程的范例 ······67
6.2.1 估计模式误差协方差 ······67
6.2.2 模式误差协方差的时间相关性 ······68
6.2.3 示例试验 ······69
6.2.4 讨论 ······75
第 7 章 概率公式 ······77
7.1 参数与状态联合估计 ······77
7.2 模式方程和量测 ······77
7.3 贝叶斯公式 ······78
7.3.1 离散形式 ······79
7.3.2 测量的顺序处理 ······80
7.4 小结 ······82
第 8 章 广义逆 ······83
8.1 广义逆公式 ······83
8.1.1 未知参数的先验密度 ······83
8.1.2 初始条件的先验密度 ······83
8.1.3 边界条件的先验密度 ······84
8.1.4 测量的先验密度 ······84
8.1.5 模式误差的先验密度 ······85
8.1.6 条件联合密度 ······86
8.2 广义逆问题的求解方法 ······87
8.2.1 标量模式的广义逆 ······87
8.2.2 欧拉-拉格朗日方程 ······88
8.2.3 α 迭代 ······90
8.2.4 强约束问题 ······90
8.3 埃克曼流模式中的参数估计 ······92
8.4 小结 ······94
第 9 章 集合方法 ······96

9.1 引言······96
9.2 线性集合分析更新······98
9.3 误差统计的集合表征······99
9.4 观测的集合表征······100
9.5 集合平滑(ES)······100
9.6 集合卡尔曼平滑(EnKS)······102
9.7 集合卡尔曼滤波(EnKF)······104
9.7.1 线性无噪声模式的应用······104
9.7.2 利用 EnKF 作为先验的 EnKS······106
9.8 Lorenz 方程的应用······106
9.8.1 试验描述······106
9.8.2 同化试验······107
9.9 讨论······111
第 10 章 统计优化······113
10.1 最小化问题的定义······113
10.1.1 参数······113
10.1.2 模式······114
10.1.3 观测······114
10.1.4 代价函数······114
10.2 贝叶斯公式······115
10.3 集合方法的解······116
10.3.1 最小方差的解······117
10.3.2 集合卡尔曼平滑的解······117
10.4 举例······118
10.5 讨论······120
第 11 章 EnKF 的采样策略······128
11.1 引言······128
11.2 样本的模拟······129
11.2.1 傅里叶逆变换······129
11.2.2 傅里叶频谱的定义······130
11.2.3 协方差与方差的确定······131
11.3 模拟相关的域······133
11.4 改进的采样方案······134
11.4.1 理论基础······134
11.4.2 改进的采样算法······135
11.4.3 改进的采样的属性······136
11.5 模式和观测噪声······138

11.6 随机正交矩阵的生成 ······ 138
11.7 试验 ······ 139
11.7.1 试验的概述 ······ 140
11.7.2 集合大小的影响 ······ 142
11.7.3 改进的初始集合采样的影响 ······ 142
11.7.4 改进的观测扰动的采样 ······ 143
11.7.5 集合奇异值谱的演变 ······ 144
11.7.6 总结 ······ 145
第 12 章 模式误差 ······ 146
12.1 模式误差的模拟 ······ 146
12.1.1 ρ 的确定 ······ 146
12.1.2 物理模式 ······ 147
12.1.3 随机强迫引起的方差增长 ······ 147
12.1.4 用观测更新模式噪声 ······ 150
12.2 标量模式 ······ 151
12.3 变分反问题 ······ 152
12.3.1 先验统计 ······ 152
12.3.2 罚函数 ······ 152
12.3.3 欧拉-拉格朗日方程 ······ 152
12.3.4 参数迭代 ······ 153
12.3.5 代表函数展开式的解 ······ 153
12.3.6 模式误差引起的方差增长 ······ 154
12.4 随机模式公式 ······ 155
12.5 例子 ······ 155
12.5.1 例子 A0 ······ 157
12.5.2 例子 A1 ······ 158
12.5.3 例子 B ······ 159
12.5.4 例子 C ······ 160
12.5.5 讨论 ······ 160
第 13 章 平方根分析方案 ······ 163
13.1 集合卡尔曼滤波分析的平方根算法 ······ 163
13.1.1 更新集合均值 ······ 163
13.1.2 更新集合扰动 ······ 164
13.1.3 平方根方案的特性 ······ 165
13.1.4 最终更新方程 ······ 168
13.1.5 使用单一观测的分析更新 ······ 168
13.1.6 使用对角阵 $C_{\epsilon\epsilon}$ 的分析更新 ······ 169