应力-应变关系的几何场理论

肖建华 著

科学出版社

应力-应变关系的几何场理论

肖建华 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书论述应力-应变关系(物性方程)。首先,对 Clifford 几何代数进行必要的介绍,在此基础上论述微元体变形的应变张量概念;其次,把应力概念的工程定义改写为在 Clifford 几何代数意义下的张量定义,从而实现应力、应变概念的协调;再次,利用结合力概念论述微元体上的构形应力概念,再基于结合力随尺度变化的非线性关系,建立一般物性方程。

本书可作为工程力学、材料科学、理性力学等专业高年级本科生和研究生的参考书,也可供相关专业科研人员和工程技术人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

应力-应变关系的几何场理论/肖建华著. —北京:科学出版社,2017.6
ISBN 978-7-03-051755-5

Ⅰ.①应… Ⅱ.①肖… Ⅲ.①普遍应力应变关系 Ⅳ.①O344.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 027077 号

责任编辑:张艳芬 纪四稳 / 责任校对:郭瑞芝
责任印制:张 伟 / 封面设计:熙 望

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 B5
2017 年 6 月第一次印刷 印张:12 1/4
字数:234 000
定价: 85.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

序

在连续介质力学中，体力与面力的理性关系是一个长期没有形成共识的理论问题，表现为力学基础理论中如何解释工程力学中的载荷概念。在工程上是借助于载荷概念来引入应力概念，而在抽象力学理论中是借助于积分形式的动量平衡方程来引入应力概念。

对于工程力学中的载荷概念，在大多数中文力学类教科书及专著中，几乎没有进行过系统性的理性论述，而更多的是直接引入此概念，就像是一个公理。事实上，载荷概念的存在基础就是圣维南原理。因此，作为连续介质力学基础概念的载荷概念的确是力学的基本问题，也是一个没有彻底解决的问题。就目前文献所述，公认的引出载荷概念的集度矢量定义为体力/体积，取体积趋于零的极限，文字上解释为单位体积微元体的受力。有了这个概念，才能引出应力概念。弹塑性力学的创立者应用一个公理来保证载荷概念的基础地位和不可论证(公理)性，这个公理就是圣维南原理。有了这个公理，载荷概念就是不言自明的。圣维南原理指出:作用在物体表面上的力只决定作用面邻近的变形，而对远处的变形没有明显的贡献。该原理在很多文献中用局部化原理来替代。

力学界在60年前用体力的体积分、面力的外表面积分构造动量守恒方程来替换载荷概念。但是，现在用批判的眼光看，这实际上还是古老的集度矢量概念，也就是载荷的积分定义。把微分换为积分，从理论上看，是把载荷概念建立在物理学基本规律之上。然而，虽然物理基础上看是严格了，但是其不符合实验室的载荷概念，也不能概括实验室概念的本质内涵。从而，理论没有概括实际。

我国理性力学家陈至达先生所建立的理性力学体系对应力进行了混合张量定义，解释了载荷概念。但是，由于各种各样的原因，人们并没有认识到陈至达先生提出的应力概念的力学含义和工程价值。

作者曾长期致力于通过对弹性参数时变和空变测量来反演介质的内在几何变化和组分变化(地震勘探)的研究，在应力-应变方程上有深厚的实践和理论积累。

作者以经典理论的本构方程为基础，在物性参数客观不变性意义下，利用物性方程来协调应力张量和应变张量的关系。以 Clifford 几何代数为数学基础，全面地论述了我国理性力学家陈至达先生所建立的理性力学体系中的应力张量概念和应变张量概念，用拖带系下的现代几何场理论论述了载荷概念，解决了力学理论与工程力学在基础概念上的协调问题。同时，以 Clifford 几何代数为数学基

础，论证了陈至达先生所建立的理性力学的抽象数学基础。

目前对力学本构方程中的物性参数的力学意义的研究有很多，但大多数是由一般性物理学原理来论述的，并没有直观的图像。利用结合能来解释物性参数的基本意义已有很多理论研究和实验研究。在力学已有研究基础上，以化学上对分子结合力的实验研究为依据，作者把本构方程建立在微元体构形结合力概念上，系统性地导出了微元体物性方程由理想弹性固体演化为简单流体的相关物性方程，这是理性力学物性理论的重要进展，对于推动现代理性力学在工程上的应用是很有价值的。

该书利用 Clifford 几何代数对力学理论的解释是全面的，把 Clifford 几何代数普及到工程界，升级传统的矢量代数概念是未来的大趋势。该书是力学上利用 Clifford 几何代数论述我国力学家陈至达先生所建立的理性力学理论的专著，也是全面论述工程力学应力-应变关系的专著，特此推荐。

宋彦琦
中国矿业大学(北京)
2016 年 9 月 18 日

前 言

20 世纪 60 年代，国外理性力学家 Truesdell 等着力发展各类连续介质的一般应力-应变关系，但是因其论证是以抽象数学来进行的，没有明确的直观工程意义，与实验测量的实践脱节，从而没有获得工程应用。后来的理性力学研究把工程上的各类非线性应力-应变经验关系提升为理论形式，但是既不能从微观物理机制上论述，也不能建立各类非线性应力-应变关系在物理力学机制下由简单到复杂的理论表述。目前工程上应用的应力-应变关系(物性方程)基本上还是经验性的。

另外，化学、结晶学、凝聚态物理、统计物理等学科，在微观力学机制上取得了大量的理论和实验成果，拓展了应力的概念。而实验技术的完善则能够高精度地实测微元体意义上的变形。这类应力-应变关系均远远超越了传统的应力-应变关系范畴，能对物性参数及其演化进行理论表述。这样，就为建立统一概念意义下的应力-应变关系奠定了客观基础。就这点而言，相关学科的理论和实验进展远远超越了连续介质力学理论。

在上述两个方面的理论和实验研究进展基础上，根据我国力学家陈至达先生的理性力学体系的混合张量理论，本书基于化学上分子结合力理论引入构形应力概念，利用分子构形结合力的变化来表征物性参数。在这样的理论表述下，对同一个材料，其固态、液态、气态的应力-应变关系就有统一的理论形式，材料的内在属性(结合能)和微元体的几何属性就表现为物性参数。这样，在工程力学上就为统一解释各类实验曲线提供了理论基础。

第 1、2 章首先简单地介绍 Clifford 几何代数理论。在此基础上，利用几何代数理论对平面、球面上弯曲矢量的张量表达进行论述。这两章实质上是在现代几何代数理论下展开陈至达先生创立的有限变形几何场理论，从而对 $S+R$ 和分解定理的局部转动概念构造一个几何代数理论论证。

第 3 章全面地论述陈至达理性力学体系的混合张量理论，对微元体变形的混合应变张量和混合应力张量的物理量纲论题进行了理论论证。着重论述变形(应变)的几何概念，目的在于揭示力学上长期以来在应力-应变张量上的不同学术论点间的关系。

第 4 章是应力-应变关系理论的抽象统一理论。由结合能概念，详细的论述了连续介质的面结合力概念，然后建立连续介质的一般性应力-应变关系。针对连续介质，基于微元体间基本结合力(范德瓦尔斯力)实验观测性质，在微元体几何约束下，用拉格朗日条件极值方法，由结合面力取极值导出基于微元尺度的微元体

应力-应变关系。

第 5 章在统一概念下论述各类应力-应变经验关系方程。以微元尺度变化为参量，用这个基本关系方程解释介质由弹性应力-应变关系演化为塑性应力-应变关系的有关方程。对于孔隙弹性、疲劳断裂的应力-应变关系也给出相应的论述。

第 6 章介绍软物质的应力-应变关系，主要研究介于液态和气态的连续介质。这是与相变态物质密切联系的论题。

第 7 章主要论述在应力-应变关系实验中如何理解和应用混合张量。由应变张量的实验测量方法引出抽象应变张量的计算方法，由应力的测量方程引出抽象应力张量的计算方法，在物性方程的意义上，统一这两类张量的测量计算方法。

第 8 章探讨在宏观应力作用下的微结构变形模式，实质上是对连续介质分叉性(不稳定性)的理论论述。这是个有待进一步开拓的研究方向。

本书是对陈至达理性力学的混合应力张量和混合应变张量概念，以及物性方程(应力-应变关系)部分的理论研究进展。本书的出版对于我国工程力学服务于工业实现自主创新具有一定的现实意义。

肖建华

目　　录

第0章 引　　言

连续介质力学理论张量化的基本问题是长期困扰力学界的基本理论问题。应变从本质上讲是绝对物理量，是没有量纲的。但是，在引入长度坐标和角度坐标时，各分量需要统一地换算到单位长度上。而对任意的长度尺度变换，各应变分量需要把实际长度统一起来。在这个意义上的物理量纲化实际上是应变张量各分量之间的内部分配系数(尺度归一化)调整关系。正应变是与尺度调整无关的绝对物理量(无量纲量)，而角应变则因纵横向长度尺度调整而需要归一化，这种调整直接地受体积量的制约。

而应力则不同，其几何量纲是面积的倒数，在长度尺度比例增大时，面积的比例增大系数取决于其几何体积。从而，面积量的调整是由体积和法向尺度共同决定的。与应变张量不同，应力是与面积尺度调整直接相关的。

因此，从形式上看，应变张量依赖于长度尺度的变换关系，应力张量依赖于面积尺度的变换关系。从而，两类张量在本质上就有差别。但是，从本质抽象上看，长度尺度可以表示为由体积和面积决定，应变张量由体积和面积决定。而应力张量实质上也是由体积和面积决定的，因此应力张量和应变张量在几何上是可以实现协调的。另外，由于在物性方程上应力与应变呈线性关系，因此必须把应力和应变定义为同一类张量。这个原则是出于理论本身的逻辑协调性的要求。本书将研究和论述有关的抽象几何代数理论。

为实现应力-应变张量理论本身的逻辑协调性，国内外理性力学家做了长达半个多世纪的研究工作。本书反映的是我国力学家陈至达先生建立的有限变形几何场理论和以此为几何理论基础的理性力学理论[1]。为使读者能理解这个理论，用现代数学中的Clifford几何代数理论[2](超代数理论)进行了系统性的理论解说。以此作为主线，对于现代力学的其他理论体系也进行了详尽的论述。基本上把现代力学的主流学派[3-5]论点囊括在本书中。

连续介质力学的第二个基本问题是物性参数的物理意义。经典理论的固体、液体、气体物性参数的意义是不同的，本构方程的形式也有显著的差异。这样，材料由固体经相变转化为液体，再转化为气体的一个连续的变形运动就被理论形式本身分割成不同的介质类别。这个基本问题不仅制约了材料科学研究和工业生产，还制约了对材料性能在各类外力作用下发生演化的力学理论表述问题。因此，需要在解决张量问题后对已有的各类本构方程(经验方程)进行新的理论表述。而这就必须回答应力的本质是什么的基础理论问题，好在这个问题的化学键

力理论已在 1970 年前后建立，因此在此基础上应用本书前半部分的几何场理论，就能建立物性方程（本构方程）的理性力学理论，形成本书后半部分的内容。

0.1 应变张量是何种张量

在数学上使用长度坐标时（逆变坐标），在微分长度不变量意义上，经典弹性力学理论把应变张量定义为协变张量。对于$(\mathrm{d}x^i, \boldsymbol{g}_i)$系，长度平方不变量为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{0-1}$$

在经典理论中，应变定义为

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}s_0} \approx \frac{\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s_0^2}{2\,(\mathrm{d}s_0)^2} \tag{0-2}$$

从而，应变张量的自然定义[6,7]为

$$\varepsilon = \frac{1}{2\,(\mathrm{d}s_0)^2}(g_{ij} - g_{ij}^0)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = \frac{1}{(\mathrm{d}s_0)^2}\varepsilon_{il}\,g_{lj}^0\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{0-3}$$

多数力学文献将式(0-3)解释为单位长度上的变化，则 ε_{ij} 就是应变张量，其张量基为 $\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j$，从而应变张量的抽象形式为 $\varepsilon_{ij}\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j$。物理量与抽象量的关系为

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}\,\sqrt{g_{(ii)}}\,\sqrt{g_{(jj)}} \tag{0-4}$$

这就是目前教科书普遍采用的协变应变张量理论。

但是，对于单位坐标所代表的微元体，取线元 $\mathrm{d}s_1 = \sqrt{g_{11}}\,\mathrm{d}x^1$ 为参考，则有

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}\,\frac{g_{12}\,\mathrm{d}x^2}{g_{11}\,\mathrm{d}x^1} + \varepsilon_{13}\,\frac{g_{13}\,\mathrm{d}x^3}{g_{11}\,\mathrm{d}x^1} \tag{0-5}$$

从而，对 $\mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^3$ 的单位数值微元体，应变的张量形式为 $\widetilde{\varepsilon}_{1j} = \varepsilon_{1j}\,\dfrac{\sqrt{g_{(jj)}}}{\sqrt{g_{11}}}$。按黎曼张量几何理论推断，对应的张量基为 $\boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^1$，从而是混合基。对于其他两条线可进行类似讨论，从而抽象张量的张量基的实际形式应为 $\varepsilon_{ij}\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j$。这样，就出现了混合张量理论解释。但是力学家很快就发现，虽然可以对 $\boldsymbol{g}^j$ 做面积解释，但是其尺度却不是面积，从而在应用黎曼张量理论上就出现了数学上的难题。因此，多数力学教科书取 $g_{(ii)} = 1$ 的单位正交系为参考系。在这种情况下，并不需要区分协变和逆变，从而把应变张量定义为二阶协变张量。但是在概念上依然要强调一个下标代表面矢方向，一个下标代表线矢方向。更多的文献是直接取$(\mathrm{d}s_0)^2 = 1$，从而在逻辑上回避式(0-3)的逻辑严密性问题。

下面将以上两种解释合并。由于变形的基本矢量变换表达为 $\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i^0 + \varepsilon_i^j\boldsymbol{g}_j^0$（本书后面章节中，重复指标 j 表示对 $j=1,2,3$ 求和），因此有

$$g_{ij} - g_{ij}^0 = (\varepsilon_i^l\delta_j^k + \varepsilon_j^l\delta_i^k)\,g_{lk}^0 \tag{0-6}$$

这样，就可以论证

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon_j^i + \varepsilon_i^j) \tag{0-7}$$

所以，ε_{ij} 是二阶协变应变张量（格林应变张量），其黎曼几何条件为 $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon_j^i - \varepsilon_i^j) = 0$。对于方程(0-7)的合理性人们只是在内心有所质疑，因为它广泛地出现在各类文献中。也由于这个因素，应变张量为对称张量的概念广为流传。

力学上，一般称 $\widetilde{\varepsilon}_i^j = \varepsilon_i^j \dfrac{\sqrt{g_{(jj)}}}{\sqrt{g_{(ii)}}}$ 为柯西应变张量。实验力学家并不接受应变的长度平方定义，但是接受柯西应变张量概念，因为对于 i 截面，其长度 $\sqrt{g_{(ii)}}$ 作为应变计算的除数。称 ε_i^j 为以 i 截面为参考的 j 方向的位移变化。而且，即使是接受平方长度变化定义，其物理量纲化原则也必须是 $\widetilde{\varepsilon}_{1j} = \varepsilon_{1j} \dfrac{\sqrt{g_{(jj)}}}{\sqrt{g_{11}}}$ 的形式。实验力学家不接受数学家给出的概念。

数学家也不接受混合张量（柯西应变张量）的概念，这是因为如果另选坐标系 $(\mathrm{d}X^i, \boldsymbol{e}_i)$，那么对于坐标变换：

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^l}\mathrm{d}X^l \tag{0-8}$$

协变基本矢量的变换为

$$\boldsymbol{e}_l = \frac{\partial x^i}{\partial X^l}\boldsymbol{g}_i \tag{0-9}$$

而逆变基的变换为

$$\boldsymbol{e}^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^l}\boldsymbol{g}^l \tag{0-10}$$

从而就有

$$\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j \tag{0-11}$$

因此，在数学上，不少学者认为黎曼意义下的混合基是一个不变的张量基，所以没有意义。但是，也有不少学者（如爱因斯坦）认为混合张量的意义远大于单纯协变或单纯逆变张量[8]，因为它具有自身内在的不变性。

另外，对于黎曼张量理论，如果只使用逆变坐标而不引入协变坐标，那么对于正交基的度规张量 $g_{ij} = g_{(ii)}\delta_{ij}$，逆变基的度规张量为 $g^{ij} = g^{(ii)}\delta_{ij}$。由于在黎曼张量理论中约定

$$g_{il}g^{lj} = \delta_i^j \tag{0-12}$$

因此对于正交基，在同一坐标下，有

$$g_{(ii)}g^{(ii)} = 1 \tag{0-13}$$

这样，对于协变基 $\boldsymbol{g}_1$，对应的逆变基[由式(0-13)定义]并不具有自然面积 $\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3$ 的几何意义，从而在多数文献中的逆变基定义为

$$\boldsymbol{g}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3 \tag{0-14}$$

即便如此，也不能得到应变张量的合理形式，这是因为柯西应变张量 $\tilde{\varepsilon}_i^j = \varepsilon_i^j \dfrac{\sqrt{g_{(jj)}}}{\sqrt{g_{(ii)}}}$要求的实际逆变基为

$$\sqrt{g^{11}} = \sqrt{g_{11}} \tag{0-15}$$

因此，应变张量的混合性并不直接受到黎曼几何的支持，除非是约定式(0-15)。而一旦做出这种约定，在黎曼张量几何意义下这只能是单位正交系[9]。把黎曼张量理论直接应用于应变张量就出现了数学理论上的难题。

我国力学家陈至达的理性力学体系基于拖带系下的基本矢量变换 $\boldsymbol{g}_i = F_i^j \boldsymbol{g}_j^0$ 直接得到了柯西应变张量的正确形式，从而解决了混合应变张量的抽象数学理论问题。

然而，由于数学上很多人认为不存在抽象意义上的混合黎曼张量，从而坚持应变张量要么是单纯的协变，要么是单纯的逆变，因此混合张量理论并没有被文献所普遍接受。但是，把 ε_{ij} 的一个下标理解为面矢方向，把另一个下标理解为线矢方向仍是力学界的基本原则。所以，在本质上还是采用了混合张量的概念。

更为重要的是，在 $\tilde{\varepsilon}_i^j = \varepsilon_i^j \dfrac{\sqrt{g_{(jj)}}}{\sqrt{g_{(ii)}}}$混合应变张量概念下，物理分量的对称性并不意味着抽象分量的对称性，反之亦然，也就是对称性被破坏。因此，经典弹塑性力学的张量理论强调 $\omega_{ij} = \dfrac{1}{2}(\varepsilon_j^i - \varepsilon_i^j) = 0$，并由此推演出多种几何协调性条件。而其根本目的无非是要力学理论服从数学理论上的要求(对称性原则)。这就成为一个哲学问题。现代物理理论花了半个世纪的努力才摆脱所谓的对称性原则，从而为不可易数学原则(非对称性张量)进入理论物理铺平道路(物理决定数学的原则)。力学上则是放弃了假定 $\omega_{ij} = 0$，本书的客观背景也在于此。

鉴于以上论述的两个理由，混合张量的柯西应变在黎曼张量代数意义下不成立。这样，在力学上就必须寻求相应的抽象数学理论，而这个理论就是理论物理中已经广为应用的 Clifford 几何代数理论。

总体来说，近一个世纪以来，理论上把应变定义为二阶协变张量 $\varepsilon_{ij}\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j$，但在实际工程计算中把应变分量物理量纲化时，使用原则 $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \dfrac{\sqrt{g_{(jj)}}}{\sqrt{g_{(ii)}}}$。可见，理论与实践脱节。

在力学中，要求被研究的微元体是客观不变的。这个原则被理性力学学派称为物质客观不变性原理。而式(0-13)和式(0-14)对逆变基的面积解释等价于出现了三个不同的体积归一化微元体(而实际微元体的体积是非归一化的)。因此，

虽然运算规则在数学上是正确的，但是在力学微元体客观不变原则下是不正确的。这样，问题就归结为数学决定物理还是物理决定数学的抽象哲学问题。这也是 20 世纪的热门哲学话题。现代科学的最终选择是物理决定数学，用物理规律本身来选择数学运算的基本规则，这就是流行的算子研究的哲学基础。

在力学上也是如此，人们已经知道力学目标量的基本性质，需要做的是寻求相应的数学理论而不是用某个数学理论来否定力学量本身的真实性。

在黎曼几何中是用坐标变换与基本矢量变换的关系来定义张量的，但这样的数学理论不能给出应变张量的概念。基于这个哲学认识，以 Truesdell 等为代表的国外理性力学学派在力学上考查由变形(位移场)引起的坐标变换：

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^l}\mathrm{d}X^l = \left(\delta^i_l + \frac{\partial u^i}{\partial X^l}\right)\mathrm{d}X^l = F^i_l \mathrm{d}X^l \tag{0-16}$$

由于位移场梯度是客观物理量，而这个变换是由力学变形决定的，因此变换 F^i_j 是张量。这是力学界第一次摆脱数学上的张量定义，其客观基础就是工程力学实践的客观事实。数学家则批判说，变换 F^i_j 是坐标变换(等价于雅可比坐标变换)，它不是张量。这类批判本身是基于张量的导出属性，在数学理论上也站不住脚，但却是学界流行的观点(也流行于教科书中)。

理性力学研究的结果虽然达成了力学理论界对变换 F^i_j 为张量的认识，但是数学上这是何种性质的张量呢？Truesdell 等将其称为两点张量[3,4]，意思是说，它是两个点之间几何关系意义上的张量。这当然与黎曼几何张量理论不同。因此，数学上的研究陷入困境。这样，力学家就被迫建立相应的数学理论。我国理性力学家陈至达发现了有限变形几何场理论。

我国理性力学家陈至达先生认为，既然在使用同一坐标的意义下(称为拖带坐标)，柯西应变张量 $\tilde{\varepsilon}^j_i = \varepsilon^j_i \dfrac{\sqrt{g_{(jj)}}}{\sqrt{g_{(ii)}}}$ 不是黎曼几何意义下的混合张量，那么就以此为基础来构造有关的几何场理论，放弃对称性概念，引入非对称应变张量。特别地，对于给定的微元体 $\sqrt{g}$，式(0-13)是不能作为逆变基定义的，从而也没有必要在应变张量定义中引入逆变基。混合张量基(微元体的几何表示，3-形矢)不随坐标的变换而改变恰恰说明应变张量本身是客观物理量。这样，对于拖带坐标系的基本矢量变换张量 F^i_j，因为

$$\boldsymbol{g}_i = F^j_i \boldsymbol{g}^0_j = (\delta^j_i + \varepsilon^j_i)\boldsymbol{g}^0_j = (S^j_i + R^j_i)\boldsymbol{g}^0_j \tag{0-17}$$

抽象上 F^j_i 是混合张量，所以是一个客观量。从而自然地得到柯西应变张量的正确形式，并进一步解释到，S^i_j 为对称伸张张量，R^j_i 为正交转动张量(含有反对称分量)。对于坐标变换式(0-8)，利用式(0-9)有

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^l}\boldsymbol{g}_i = (\delta^j_i + \varepsilon^j_i)\frac{\partial x^i}{\partial X^l}\boldsymbol{g}^0_j = \frac{\partial x^i}{\partial X^l}\boldsymbol{g}^0_i + \frac{\partial x^i}{\partial X^l}\varepsilon^k_i \boldsymbol{g}^0_k \tag{0-18}$$

也就是有

$$\boldsymbol{g}_l = \boldsymbol{g}_l^0 + \varepsilon_l^k \boldsymbol{g}_k^0 = (\delta_l^k + \varepsilon_l^k)\boldsymbol{g}_k^0 = F_l^k \boldsymbol{g}_k^0 \tag{0-19}$$

从而证明，在数学意义上，基本矢量变换 F_j^i 就是客观张量。这样，就对上标和下标做出了正变形与逆变形的几何解释。但是，非对称张量显然无法单纯地建立在黎曼几何上，这样就被迫建立了非黎曼几何张量理论（称为有限变形几何场理论）。但是，这个理论不仅与黎曼几何理论不完全协调（黎曼几何不支持反对称张量），而且当时（1990 年前后）还无法在纯粹数学上做出基础理论解释。

陈至达利用有限变形几何场理论[1]，解释应变张量的物理量纲形式为 $\tilde{\varepsilon}_j^i = \varepsilon_j^i \dfrac{\sqrt{g_{(ii)}}}{\sqrt{g_{(jj)}}}$，从而该理论在力学上被合理化，但是这个意义上的张量的基础数学理论是什么的问题依然有待研究。自 1990 年，寻求相应的基础数学理论就成为国内外理性力学家共同的研究目标。最终发现，在 Clifford 几何代数意义下，陈至达所建立的应力-应变张量理论是正确的。

事实上，按照经典对称张量理论，由于位移场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \mathrm{d}u^i \boldsymbol{g}_i \tag{0-20}$$

因此有

$$\varepsilon_j^i = u^i|_j (\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j) \tag{0-21}$$

定义

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\varepsilon_j^i + \varepsilon_i^j) = \frac{1}{2}[u^i|_j (\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j) + u^j|_i (\boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^i)] \tag{0-22}$$

假定 $\omega_{ij} = 0$，无反对称分量，则有

$$u^i|_j (\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j) = u^j|_i (\boldsymbol{g}_j \otimes \boldsymbol{g}^i) \tag{0-23}$$

式中，$u^i|_j$ 为协变导数。由 $g_{(ii)} g^{(ii)} = 1$，判定 $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}\left(\dfrac{\sqrt{g_{(jj)}}}{2\sqrt{g_{(ii)}}} + \dfrac{\sqrt{g_{(ii)}}}{2\sqrt{g_{(jj)}}}\right)$，从而维持抽象分量的对称和物理分量的对称的一致性。

在不少工程力学文献中，则直接使用曲线坐标系定义：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial(u^i \sqrt{g_{(ii)}})}{\sqrt{g_{(jj)}}\partial x^j} \approx u^i|_j \left(\frac{\sqrt{g_{(ii)}}}{\sqrt{g_{(jj)}}}\right) \tag{0-24}$$

直接定义曲线坐标系下的工程应变张量[5]，绕开了抽象张量的理论问题，这是最为普遍的应变张量定义。其优点是与工程实践一致，但是也牺牲了一些数学上的精确性。

0.2　应力张量与应变张量如何协调

对于任何一种张量选择，由于工程上早已确立对理想弹性介质的应力-应变

关系为

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{ll})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{0-25}$$

因此,如果把应力-应变张量二阶协变张量化,那么对于抽象分量,其物理量纲化形式为

$$\sigma_{ij}\sqrt{g_{(ii)}}\sqrt{g_{(jj)}} = \lambda(\varepsilon_{ll}g_{(ll)})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}\sqrt{g_{(ii)}}\sqrt{g_{(jj)}} \tag{0-26}$$

对于 $i\neq j$,没有问题。但是,对于 $i=j$,若取 $i=j=1$,则有

$$\sigma_{11} = \lambda\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\frac{g_{22}}{g_{11}} + \varepsilon_{33}\frac{g_{33}}{g_{11}}\right) + 2\mu\varepsilon_{11} \tag{0-27}$$

这就在理论上出现了问题:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11} \\ &\quad + \lambda\left[\varepsilon_{22}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}} - 1\right) + \varepsilon_{33}\left(\frac{g_{33}}{g_{11}} - 1\right)\right]\end{aligned} \tag{0-28}$$

式中,$\delta\sigma_{11} = \lambda\left[\varepsilon_{22}\left(\frac{g_{22}}{g_{11}} - 1\right) + \varepsilon_{33}\left(\frac{g_{33}}{g_{11}} - 1\right)\right]$显然是由于微元体各方向尺度不同而引出的虚假应力。

单纯的逆变张量化也有类似的问题,问题出在正应力分量上。实质上,这也是工程力学并不接受一般数学张量理论(实质上为黎曼张量理论)的客观原因。

取混合张量理论(工程上用曲线系导出的应变张量),则有

$$\sigma_{ij}\frac{\sqrt{g_{(jj)}}}{\sqrt{g_{(ii)}}} = \lambda(\varepsilon_{ll})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}\frac{\sqrt{g_{(jj)}}}{\sqrt{g_{(ii)}}} \tag{0-29}$$

显然没有任何理论问题。工程力学[5]采用的是式(0-29)。

以上理论研究和工程实际使用的张量给出的结论是:应力张量为混合张量。然而,另一个理论问题又出现了,即如何定义应力张量。应力张量是以物理面积为逆变基(黎曼面基)的度规,以物理长度为协变基(基本矢量)的度规,因此,长度基本矢量的协变性与面积基本矢量的逆变性一起形成了客观不变性。这种约定在物理学中常用,但是对变形力学并不适用。

首先,不同于物理学的各个分量实际上是客观存在于点上的张量,变形力学的应力张量是定义在 3 个正交面上的,而应变是定义在 3 个面之间的法向长度上的。从而,对于参考面 $\boldsymbol{g}^1$ 上的项 $\sigma_1^i\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^1$,对固定体积的微元体$\sqrt{g}$,指定了面积也就指定了$\sqrt{g_{11}}$的尺度。而横向尺度的比例增大等价于法向长度的比例减小。这样,对于参考面 $\boldsymbol{g}^1$,以其法向长度$\sqrt{g_{11}}$为参考,横向尺度的比例增大等价于截面面积尺度的比例减小(面积倒数的比例增大)。故其单位物理量纲化的原则是 $\sigma_1^i\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}^1 = \sigma_1^i\frac{\sqrt{g_{(ii)}}}{\sqrt{g_{11}}}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^1$。对于其他几个面,其物理量纲化原则是相同的。