研究生核心学位课程融合型规划教材

矩阵论

JUZHENLUN

主编　陈铁生

郑州大学出版社

研究生核心学位课程融合型规划教材

矩阵论

JUZHENLUN

主编　陈铁生

郑州大学出版社

郑州

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论/陈铁生主编. —郑州:郑州大学出版社,2017.11
ISBN 978－7－5645－4646－5

Ⅰ.①矩…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①矩阵论－研究生－教材
Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 191786 号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052
出版人:张功员　　发行电话:0371－66966070
全国新华书店经销
河南文华印务有限公司印制
开本:787 mm×1 092 mm　1/16
印张:12.25
字数:256 千字
版次:2017 年 11 月第 1 版　　印次:2017 年 11 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978－7－5645－4646－5　　定价:39.00 元

作者名单

主　编　陈铁生

副主编　郭向前

编　委　（按姓氏笔画排序）

王长群　王锦玲　刘学文

吴剑锋　陈铁生　赵可琴

郭向前　薛　艳

前言

随着现代科学技术的飞速发展，矩阵理论已成为现代科学技术研究的重要工具，它在许多学科，如控制论、系统论、优化理论、信息工程、力学、电子学，甚至在经济学、金融、保险等诸多学科都有广泛的应用．矩阵论是高等学校理工科研究生的一门重要基础课．因此，学习和掌握矩阵的基本理论和研究问题的方法，对于理工科研究生来说是十分重要的．

考虑到理工科学生的实际情况，在编写本教材时对于烦琐的理论证明进行了适当的简化，同时增加了较多例题．第一章为基础知识，就是把线性代数基本内容进行总结，便于学生过渡到本课程的学习．第二章至第四章主要介绍了线性空间、线性变换、欧氏空间、酉空间，还讨论了多项式矩阵以及矩阵的若当标准型．第五章介绍了矩阵的常用分解．第六章介绍了广义逆矩阵．第七章介绍了矩阵分析理论．第八章给出了一些例题和近年的考试试题．

本书具体编写分工如下：第一章由吴剑锋编写，第二章由赵可琴编写，第三章由薛艳编写，第四章由王锦玲编写，第五章由郭向前编写，第六章由王长群编写，第七章由陈铁生编写，第八章矩由刘学文编写．本书可以作为大学理工科研究生学习矩阵理论的教材和参考书，也可以作为博士研究生矩阵论考试的参考书．

本书的出版得到了郑州大学研究生院学科建设经费的资助，在编写过程中得到了郑州大学研究生院、郑州大学数学与统计学院和郑州大学出版社的大力支持和帮助，在此表示感谢．

由于编者水平有限，书中难免有错误、疏漏和不妥之处，敬请广大读者批评指正．

陈铁生

2017 年 8 月于郑州大学

目 录

第一章　基础知识

第一节　矩阵

一、内容提要

(一) 矩阵

矩阵是一个数表$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$或$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
记为A、$A_{m\times n}$、(a_{ij})、$(a_{ij})_{m\times n}$.

当$m=n$时,$\boldsymbol{A}$为方阵. $|A|=|a_{ij}|$方阵的行列式,$1\times n$矩阵,称为n维行向量,$n\times 1$矩阵称为n维列向量.

(二) 几类特殊矩阵

几类特殊矩阵:①零矩阵;②单位矩阵;③数量矩阵;④对角形矩阵;⑤上(下)三角形矩阵;⑥对称矩阵;⑦反对称矩阵;⑧正交矩阵;⑨正定矩阵;⑩阶梯形矩阵.

(三) 矩阵的运算

(1)矩阵的线性运算　设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$都是$m\times n$矩阵,即同型的,k、l为数,则有$A+B=B+A$、$(A+B)+C=A+(B+C)$、$A+0=A$、$A+(-A)=0$、$(kl)A=k(lA)=l(kA)$、$1A=A$、$(k+l)A=kA+lA$、$k(A+B)=kA+kB$.

(2)矩阵的乘法

定义 1 设 $A=(a_{ik})_{m\times t}$、$B=(b_{kj})_{t\times n}$,则称 $C=(c_{ij})_{m\times n}$ 为 A 与 B 的乘积,记为 $C=AB$,$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{it}b_{tj}$.

矩阵乘法的运算律 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 是适当阶数的矩阵,k 为数,则有 $(AB)C=A(BC)$、$k(AB)=(kA)B=A(kB)$、$(A+B)C=AC+BC$、$A(B+C)=AB+AC$.

特别地:对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,有 $E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$.

注意:①$AB=BA$ 一般不成立;②由 $AB=0$ 推不出 $A=0$ 或 $B=0$;③消去律不成立,即若 $A\neq0$ 且 $AB=AC$ 推不出 $B=C$.

(3)方阵的幂 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵,规定 $A^m=A\cdot A\cdot\cdots\cdot A$($m$ 个 A 相乘),规定 $A^0=E$.

运算律:$A^k\cdot A^l=A^{k+l}$,$(A^l)^k=A^{lk}$,k,l 为正整数.

(4)矩阵的转置

定义 2 把 $A_{m\times n}$ 矩阵的行与列互换,得到 $n\times m$ 矩阵称为 A 的转置,记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

运算律:设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是适当阶数的矩阵,k 为数,则 $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$,$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$,$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$,$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$,$(A^m)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^m$,$m$ 为非负整数.

(四)方阵的行列式

性质:①$|AB|=|A||B|$;　　②$|A^m|=|A|^m$　m 为正整数;

③$|kA|=k^n|A|$;　　④$|A^{\mathrm{T}}|=|A|$.

(五)伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\quad 令\ \boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$称为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

基本性质 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

(六)矩阵的逆矩阵

(1)**定义 3** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,使 $AB=BA=E$,称 A 可逆,且 B 为 A 的逆,记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 若 A 可逆,则逆是唯一的.

(2)判断一个矩阵可逆.

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,则 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow|A|\neq0$.

推论 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$,$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\boldsymbol{A}^*$.

(3)有关性质

1)$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,若 $AB=\boldsymbol{E}$,则 A、B 均可逆,且 $A^{-1}=B$、$B^{-1}=A$.

2）若 $k\neq 0$，A 可逆，则 kA 可逆，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

3）若 A、B 均可逆，则 AB 可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

4）若 A 可逆，则 A^m 可逆，且 $(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$，m 为整数.

5）若 A 可逆，则 A^{T} 可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$，$A^{-1}$ 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

6）若 A 可逆，由 $AB=0$ 可得 $B=0$，由 $AB=AC$ 可得 $B=C$.

（七）矩阵的分块与分块矩阵

（1）常用分块的方法，把 $\boldsymbol{A}$ 按列分块，$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，

把 $\boldsymbol{A}$ 按行分块，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$ 等.

（2）准对角形矩阵与准三角形矩阵.

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}\end{pmatrix}$，$A_i$ 为 n_i 阶子块，准对角形矩阵为方阵，

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss}\end{pmatrix}$，$A_i$ 为 n_i 阶子块，准三角形矩阵，

$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_s|$.

（八）矩阵的初等变换与初等矩阵

（1）初等行变换，初等列变换，初等变换.

定理 2　任何一个非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以通过初等变换 $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，该矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形.

（2）矩阵的等价. 如果矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等变换得到，称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，等价关系满足，自反性、对称性、传递性.

（3）初等矩阵. 由单位矩阵作一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵，初等矩阵都是方阵，且可逆.

$$P(i,j),P(i(c)),P(i,j(k)),$$

$$P(i,j)^{-1}=P(i,j),P(i(c))^{-1}=P(i(\frac{1}{c})),P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k)).$$

(4)初等变换与初等矩阵的关系.

定理 3 设 $A_{m\times n}$,对 A 作一次初等行变换相当于在 A 的左边乘上一个相应的 $m\times m$ 矩阵,对 A 作一次初等列变换相当于在 A 的右边乘上一个相应的 $n\times n$ 矩阵.

等价的另一定义:若存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使 $P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t=B$,称 A 与 B 等价.

(5)可逆矩阵的等价标准形,求逆的另一种方法.

若 A 可逆,则 A 的等价标准形为 E.

1)求逆 $(A,E)\to(E,A^{-1})$ 只作初等行变换.

2)求 $A^{-1}B$,用初等行变换 $(A,B)\to(E,A^{-1}B)$.

3)求 BA^{-1},用初等列变换 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}E\\BA^{-1}\end{pmatrix}$.

定理 4 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价$\Leftrightarrow$存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(九)矩阵的秩

(1)若 A 中不为 0 的子式的最高阶数 r,称 A 得秩为 r,记为 $r(A)$.

(2)如何求矩阵的秩.

定理 5 初等变换不改变矩阵的秩.

求秩的方法,用初等变换化简矩阵,化到读出.

定理 6 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价$\Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

性质:$r(kA)=r(A),k\neq0,r(A^{\mathrm{T}})=r(A)$.

定理 7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,则 $r(A)=n\Leftrightarrow|A|\neq0$.

定理 8 若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆,则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$.

(十)矩阵的分解

(1)乘法分解 将一个已知矩阵分解成若干个矩阵之积,这些矩阵需要满足一些条件.

(2)加法分解 将一个已知矩阵分解成若干个矩阵之和,这些矩阵需要满足一些条件.

二、常用习题

1. $r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B),r(A,B)\leqslant r(A)+r(B)$.

2. $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$.

3. 设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times s}$, 若 $AB=0$, 则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

4. 若 $AB=kE$, $k\neq 0$, 则 A、B 都可逆, 且 $A^{-1}=\frac{1}{k}B$, $B^{-1}=\frac{1}{k}A$.

5. $AA^*=A^*A=|A|E$, $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$, $(A)^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$, $|A^*|=|A|^{n-1}$.

6. $r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$

7. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$　　$(A^{-1})^{-1}=A$　　$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$　　$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$　　$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$　　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　　$(AB)^*=B^*A^*$

8. $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$　　$(A^{\mathrm{T}})^*=(A^*)^{\mathrm{T}}$　　$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$

9. $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

11. 若 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆, 则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$.

12. 设多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, 则规定方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式 $f(A)=\sum_{i=0}^{n}a_iA^i$, 其中 $A^0=E$.

13. $r\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{pmatrix}=r(A_{11})+\cdots+r(A_{ss})$.

特别 $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$, $r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\geqslant r(A)+r(B)$.

14. 矩阵的迹

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, 称 $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的迹.

性质:设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵, 则 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$, 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$.

15. 有关 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}},\alpha^{\mathrm{T}}\alpha,\alpha\beta^{\mathrm{T}},\alpha^{\mathrm{T}}\beta$ 的问题

设 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$

则 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$

$$\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix},\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&a_n^2\end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}(\alpha\beta^{\mathrm{T}})=\alpha^{\mathrm{T}}\beta,\mathrm{tr}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha.$

16. $\begin{vmatrix}A&0\\0&B\end{vmatrix}=|A||B|,\begin{vmatrix}A&C\\0&B\end{vmatrix}=|A||B|,\begin{vmatrix}A&0\\C&B\end{vmatrix}=|A||B|.$

17. $\begin{vmatrix}0&A_{k\times k}\\B_{r\times r}&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&A_{k\times k}\\B_{r\times r}&C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C&A_{k\times k}\\B_{r\times r}&0\end{vmatrix}=(-1)^{k\times r}|A||B|.$

18. $\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$

第二节　向量与线性方程组

一、内容提要

（一）向量

(1)**定义 1**　数域 P 上的 n 个数组成的有序数组

行向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，列向量 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$.

(2)设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

相等 $\alpha=\beta\Leftrightarrow a_i=b_i$.

向量的和 $\gamma=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n),\gamma=\alpha+\beta$.

负向量 $-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$

零向量 $0=(0,0,\cdots,0)$

数乘向量 $\delta=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)=k\alpha$.

向量 α、β 的差，$\alpha-\beta$.

(3)运算律　设 α、β 都是 n 维向量，k、l 为数，

则有 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$、$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$、$\alpha+0=\alpha$、$\alpha+(-\alpha)=0$、$(kl)\alpha=k(l\alpha)=l(k\alpha)$、$1\alpha=\alpha$、$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$、$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

(4)内积　设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，

记 $(\alpha,\beta)=\alpha\beta^{\mathrm{T}}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 为 α 与 β 的内积.

向量的长度，$\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 为 α 的长度，记为 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$，

$|\alpha|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$，若 $|\alpha|=1$，称 α 为单位向量.

(二)线性组合

(1)**定义 2**　给出向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$，若存在 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，称 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，又称 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出(表示).

(2)判断方法　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 是列向量，则 β 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合$\Leftrightarrow$方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$ 有解，解就是组合系数.

(3)特殊情况

1)零向量是任意向量组的线性组合.

2)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一向量都是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合.

3)任意 n 维向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，都是单位向量组 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$的线性组合.

(三)线性相关

(1)**定义 3**　给出向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$，若其中有一个向量能由其余 $s-1$ 个向量线性表出，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

等价定义：给出向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，若存在不全为零的 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

(2)判断方法　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$是列向量，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关$\Leftrightarrow$方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有非零解.

(3)特殊情况

1)含有零向量的向量组一定线性相关.

2)两个向量 α、β 线性相关$\Leftrightarrow$对应分量成比例.

3)一个向量组，若其中一部分线性相关，则整体线性相关.

4)一个向量 α 线性相关$\Leftrightarrow\alpha=0$.

(四)线性无关

(1)**定义 4** 给出向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant2)$,若其中任一个向量都不能由其余 $s-1$ 个向量线性表出,称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

等价定义:给出向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 必推出 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

(2)判断方法 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant2)$ 是列向量,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关$\Leftrightarrow$方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 只有零解.

(3)特殊情况

1)线性无关向量组一定不含零向量.

2)两个向量 α、β 线性无关$\Leftrightarrow$对应分量不成比例.

3)一个向量组,若整体线性无关,则任意其中一部分线性无关.

4)一个向量组成的向量组$\{\alpha\}$线性无关$\Leftrightarrow\alpha\neq0$.

5)基本单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

(五)一个重要定理

定理 1 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 线性相关,则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出,且表出系数唯一.

(六)两个向量组之间的关系

(1)**定义 5** 给出两个向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,(Ⅱ)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$,若(Ⅰ)中每个向量都可由(Ⅱ)中向量线性表出,则称(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出,若(Ⅰ)与(Ⅱ)可以相互表出,则称(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

(2)**定理 2** 给出两个向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,(Ⅱ)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$,如果(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出,若 $s>t$,则(Ⅰ)线性相关.

推论 $n+1$ 个 n 维向量组线性相关.

定理 3 (上定理的逆否命题)给出两个向量组(Ⅰ)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$,(Ⅱ)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$,如果(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出,若(Ⅰ)线性无关,则 $s\leqslant t$.

(七)极大线性无关组

(1)**定义 6** 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个部分组$(1\leqslant r\leqslant s)$,若满足 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 本身线性无关,从向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任添一个向量到 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 上,新部分组线性相关,称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组.

性质:极大线性无关组与原向量组等价.

(2)**定理 4** 一个向量组的极大无关组不一定唯一,但每个极大无关组所含向量的个

数都相等,这个数称为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩,记为 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,显然 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$,即满秩,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$,即不满秩.

注意:向量组等价要求维数相等,但不要求所含向量的个数相等,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价,则 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ),反之不成立;矩阵等价要求同型,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$.

(八)如何求向量组的秩,极大无关组及其他向量用极大无关组表出

(1)矩阵的行向量组成的向量组的秩称为矩阵的行秩,矩阵的列向量组成的向量组的秩称为矩阵的列秩.

注意:对矩阵做一次初等变换,不改变矩阵的行秩,也不改变矩阵的列秩.

(2)**定理 5**　矩阵的行秩与矩阵的列秩相等,称为矩阵的秩,记为 $r(A)$.

(3)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是列向量,做矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$,对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换,$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$,找出 $\boldsymbol{B}$ 的列向量的极大无关组,则 $\boldsymbol{A}$ 中相应于 $\boldsymbol{B}$ 的那些列向量,就是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的极大线性无关组.

(九)克莱姆法则

(1)线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_{2n}=b_2\\ \qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$,系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$.

若 $|A|\neq0$,则方程组有解且仅有唯一解,且 $x_i=\dfrac{|A_i|}{|A|}$.

(2)上方程组的矩阵形式 $AX=b$,克莱姆法则还可叙述为,A 可逆时,方程组有唯一解.

(3)齐次线性方程组 $AX=0$,若 $|A|\neq0$,则方程组仅有零解.

(十)线性方程组解的性质

(1)设 ξ_1,ξ_2 为 $AX=0$ 的解,则 $x=\xi_1\pm\xi_2$,也是 $AX=0$ 的解.

(2)设 ξ 为 $AX=0$ 的解,则 $x=k\xi$,也是 $AX=0$ 的解.

由(1)(2),若 ξ_1,ξ_2 为 $AX=0$ 的解,则 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$,也是 $AX=0$ 的解.

(3)设 η_1,η_2 都是 $AX=b$ 的解,则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是其导出组 $AX=0$ 的解.

(4)设 ξ 为 $AX=0$ 的解,η 为 $AX=b$ 的解,则 $x=\xi+\eta$ 为 $AX=b$ 的解.

(十一)齐次线性方程组解的结构定理

(1)齐次线性方程组的基础解系设 $AX=0$,$r(A)=r$.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的解,满足:①$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关;②$AX=0$ 的任意解

均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表出，我们称 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的基础解系.

(2) $AX=0$ 的通解.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系，$r(A)=r$，

那么 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的通解.

注意：①解向量组的极大线性无关组即是一个基础解系，它所含向量的个数唯一，这个数是全体解向量组的秩 $=n-r(A)$，而极大线性无关组(基础解系)不一定唯一；②任意 $n-r$ 个线性无关解的向量都是全体解向量的极大线性无关组，即基础解系.

(十二)线性方程组有解的判定定理

(1) 齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(A)<n$.

注意：$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，n 为未知数的个数.

(2) 线性方程组 $AX=b$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})$，$\bar{\boldsymbol{A}}$ 为增广矩阵.

注意：$AX=b$ 有解判定可以更具体，①当 $r(A)\neq(\bar{A})$ 时，$AX=b$ 无解. ②当 $r(A)=(\bar{A})=n$ 时，$AX=b$ 有唯一解. ③当 $r(A)=(\bar{A})<n$ 时，方程组有无穷多个解.

特别地：当 $\boldsymbol{A}$ 为方阵时，$|A|\neq 0\Leftrightarrow AX=b$ 有唯一解.

(3) 非齐次线性方程组的通解.

设 $AX=b$，若 $r(A)=r$，设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系，η 为 $AX=b$ 的一个特解，则 $x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 为 $AX=b$ 的通解.

二、常用习题

1. 向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，则 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)，反之不成立.

2. (Ⅰ) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ (Ⅱ) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$，若 r(Ⅰ)$=r$(Ⅱ)，则(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

3. 给出两个向量组(Ⅰ) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，(Ⅱ) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，如果(Ⅰ)可由(Ⅱ)线性表出，则 r(Ⅰ)$\leqslant r$(Ⅱ).

4. 已知 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意 $r+1$ 个向量线性相关.

5. 已知 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意 r 个无关向量组必是极大无关组.

6. n 个 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|\neq 0$.

7. n 个 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0$.

8. 设 α_i 为列向量，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则 $(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$.

9. $\beta=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$.