21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

# 微积分（下册）

## （经管类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

世纪数学教育信息化精品教材

大 学 数 学 立 体 化 教 材

# 微积分（下册）

## （经管类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社
·北京·

**图书在版编目（CIP）数据**

微积分：经管类．下册/吴赣昌主编．—5版．—北京：中国人民大学出版社，2017．7
21世纪数学教育信息化精品教材　大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-24384-9

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①吴…　Ⅲ．①微积分-高等学校-教材　Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第109626号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
**微积分（经管类·第五版）下册**
吴赣昌　主编
Weijifen

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 中国人民大学出版社 | | |
| **社　　址** | 北京中关村大街31号 | **邮政编码** | 100080 |
| **电　　话** | 010－62511242（总编室） | | 010－62511770（质管部） |
| | 010－82501766（邮购部） | | 010－62514148（门市部） |
| | 010－62515195（发行公司） | | 010－62515275（盗版举报） |
| **网　　址** | http://www.crup.com.cn | | |
| | http://www.ttrnet.com（人大教研网） | | |
| **经　　销** | 新华书店 | | |
| **印　　刷** | 北京昌联印刷有限公司 | **版　　次** | 2006年4月第1版 |
| **规　　格** | 170 mm×228 mm　16开本 | | 2017年7月第5版 |
| **印　　张** | 12.75 插页1 | **印　　次** | 2017年7月第1次印刷 |
| **字　　数** | 259 000 | **定　　价** | 26.80元 |

# 内容简介

本书根据高等院校普通本科经管类专业微积分课程的最新教学大纲及考研大纲编写而成，并在第四版的基础上进行了重大修订和完善（详见本书前言）。本书包含多元函数微积分、无穷级数、微分方程等内容模块，并特别加强了数学建模与数学实验教学环节。

本“书”远非传统意义上的书，作为立体化教材，它包含线下的“书”和线上的“服务”两部分。其中线上的“服务”用以下两种形式提供：一是书中各处的二维码，用户通过手机或平板电脑等移动端扫码即可使用；二是在本书的封面上提供的网络账号，用户通过它即可登录与本书配套建设的网络学习空间。

网络学习空间中包含与本书配套的在线学习系统，该系统在内容结构上包含教材中每节的教学内容及相关知识扩展、教学例题及综合进阶典型题详解、数学实验及其详解、习题及其详解等，并为每章增加了综合训练，其中包含每章的总结、题型分析及其详解、历届考研真题及其详解等。该系统采用交互式多媒体化建设，并支持用户间在线求助与答疑，为用户自主式高效率地学习奠定基础。

本书可作为高等院校经济、管理等非数学本科专业的基础数学教材，并可作为上述各专业领域读者的教学参考书。

# 前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于大学非数学专业的学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已. 中外大量的教育实践事实充分显示了：优秀的数学教育，乃是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

随着我国高等教育自1999年开始迅速扩大招生规模，至2009年的短短十年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其他国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的道路. 教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战. 大学数学的教育问题首当其冲受到影响. 大学数学教育过去是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年甚至上百年一贯制，仍处于经典状态. 当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求. 传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与后续课程教学的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面. 二是在信息技术及其终端产品迅猛发展的今天，在大学数学教育领域，信息技术的应用远没有在其他领域活跃，其主要原因是：在教材和教学建设中没能把信息技术及其终端产品与大学数学教学的内容特点有效地整合起来.

作者主编的“大学数学立体化教材”，最初脱胎于作者在2000—2004年研发的“大学数学多媒体教学系统”. 2006年，作者与中国人民大学出版社达成合作，出版了该系列教材的第一版，合作期间，该系列教材经历多次改版，并于2011年出版了第四版，具体包括：面向普通本科理工类、经管类与纯文科类的完整版系列教材；面向普通本科部分专业和三本院校理工类与经管类的简明版系列教材；面向高职高专院校理工类与经管类的高职高专版系列教材. 在上述第四版及相关系列教材中，作者加强了对大学数学相关教学内容中重要概念的引入、重要数学方法的应用、典型数学模型的建立、著名数学家及其贡献等方面的介绍，丰富了教材内涵，初步形成了该系列教材的特色. 令人感到欣慰的是，自2006年以来，“大学数学立体化教材”已先后被国内数百所高等院校广泛采用，并对大学数学的教育改革起到了积极的推动作用.

2017年，距2011年的改版又过去了6年. 而在这6年时间里，随着移动无线通信技术（如3G、4G等）、宽带无线接入技术（如Wi-Fi等）和移动终端设备（如智能手机、平板电脑等）的飞速发展，那些以往必须在电脑上安装运行的计算软件，如今在

普通的智能手机和平板电脑上通过移动互联网接入即可流畅运行，这为各类教育信息化产品的服务向前延伸奠定了基础.

作者本次启动的“大学数学立体化教材”(第五版)的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境. 顺利实现这一宗旨，还得益于作者主持的数苑团队的另一项工作成果：公式图形可视化在线编辑计算软件. 该软件于 2010 年研发成功时，仅支持在 Win 系统电脑中通过 IE 类浏览器运行. 2014 年10月底，万维网联盟(W3C)组织正式发布并推荐了跨系统与跨浏览器的HTML5.0 标准. 为此，数苑团队通过最近几年的努力，也实现了相关技术突破. 如今，数苑团队研发的公式图形可视化在线编辑计算软件已支持在各类操作系统的电脑和移动终端(包括智能手机、平板电脑等)上运行于不同的浏览器中，这为我们接下来的教材改版工作奠定了基础.

作者本次“大学数学立体化教材”(第五版)的改版具体包括：面向普通本科院校的“理工类 • 第五版”“经管类 • 第五版”与“纯文科类 • 第四版”；面向普通本科少学时或三本院校的“理工类 • 简明版 • 第五版”“经管类 • 简明版 • 第五版”与“综合类 • 应用型本科版”合订本；面向高职高专院校的“理工类 • 高职高专版 • 第四版”“经管类 • 高职高专版 • 第四版”与“综合类 • 高职高专版 • 第三版”.

本次改版的指导思想是：为帮助教材用户更好地理解教材中的重要概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验. 实验内容包括：数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D 函数图形实验、3D 函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等. 相比教材正文所举示例，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大. 本系列教材于 2017 年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验，其中的大部分都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码，即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中.

大学数学按课程模块分为高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计三大模块，各课程的改版情况简介如下：

**高等数学课程**：函数是高等数学的主要研究对象，函数的表示法包括解析法、图像法与表格法. 以往受计算分析工具的限制，人们对函数的解析表示、图像表示与数表表示之间的关系往往难以把握，大大影响了学习者对函数概念的理解. 为了弥补这方面的缺失，欧美发达国家的大学数学教材一般都补充了大量流程分析式的图像说明，因而其教材的厚度与内涵也远较国内的厚重. 有鉴于此，在高等数学课程的数学实验中，我们首先就函数计算与函数图形计算方面设计了一系列的数学实验，包括函数值计算实验、不同坐标系下2D函数的图形计算实验和3D 函数的图形计算实验等，实验中的函数模型较教材正文中的示例更复杂，但借助微信扫码功能可即时实现重复实验与修改实验. 其次，针对定积分、重积分与级数的教学内容设计了一系列求

和、多重求和、级数展开与逼近的数学实验. 此外，还根据相应教学内容的需求，设计了一系列数值计算实验、符号计算实验与数学建模实验. 这些数学实验有助于用户加深对高等数学中基本概念、定理与思想方法的理解，让他们通过对量变到质变过程的观察，更深刻地理解数学中近似与精确、量变与质变之间的辩证关系.

**线性代数课程**: 矩阵实质上就是一张长方形数表，它是研究线性变换、向量组线性相关性、线性方程组的解、二次型以及线性空间的不可替代的工具. 因此，在线性代数课程的数学实验设计中，首先就矩阵基于行 (列) 向量组的初等变换运算设计了一系列数学实验，其中矩阵的规模大多为6~10阶的，有助于帮助用户更好地理解矩阵与其行阶梯形、行最简形和标准形矩阵间的关系. 进而为矩阵的秩、向量组线性相关性、线性方程组及其应用、矩阵的特征值及其应用、二次型等教学内容分别设计了一系列相应的数学实验. 此外，还根据教学的需要设计了部分数值计算实验和符号计算实验，加强用户对线性代数核心内容的理解，拓展用户解决相关实际应用问题的能力.

**概率论与数理统计课程**：本课程是从数量化的角度来研究现实世界中的随机现象及其统计规律性的一门学科. 因此，在概率论与数理统计课程的数学实验中，我们首先设计了一系列服从均匀分布、正态分布、0–1 分布与二项分布的随机试验，让用户通过软件的仿真模拟试验更好地理解随机现象及其统计规律性. 其次，基于计算软件设计了常用统计分布表查表实验，包括泊松分布查表、标准正态分布函数查表、标准正态分布查表、$t$ 分布查表、$F$ 分布查表与卡方分布查表等. 再次，还设计了针对数组的排序、分组、直方图与经验分布图的一系列数学实验. 最后，针对经验数据的散点图与线性回归设计了一系列数学实验. 这些数学实验将会在帮助用户加深对概率论与数理统计课程核心内容的理解、拓展解决相关实际应用问题的能力上起到积极作用.

## 致用户

作者主编的“大学数学立体化教材”(第五版) 及 2017 年改版的每本教材，均包含了与相应教材配套的网络学习空间服务. 用户通过教材封面下方提供的网络学习空间的网址、账号和密码，即可登录相应的网络学习空间. 网络学习空间提供了远较纸质教材更为丰富的教学内容、教学动画以及教学内容间的交互链接，提供了教材中所有习题的解答过程. 在所有内容与习题页面的下方，均提供了用户间的在线交互讨论功能，作者主持的数苑团队也将在该网络学习空间中为你服务. 使用微信扫码功能扫描教材封面提供的二维码，绑定微信号，你即可通过扫描教材内容页面提供的二维码进行相关的数学实验.

在你进入高校后即将学习的所有大学课程中，就提高你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力的课程. 事实上，像微积分、线性代数、概率论与数理统计这些大学数学基础课程，

你无论怎样评价其重要性都不为过，而学好这些大学数学基础课程，你将终生受益.

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，这一点在大学数学的学习中尤为重要，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间去主动学习、训练与实验，才能真正掌握所学知识.

## 致教师

使用本系列教材的教师，请登录数苑网“大学数学立体化教材”栏目：

http://www.math168.com/dxsx

作者主持的数苑团队在那里为你免费提供与本系列教材配套的教学课件系统及相关的备课资源，它们是作者团队十余年积累与提升的成果. 与本系列教材配套建设的信息化系统平台包括在线学习平台、试题库系统、在线考试及其预约管理系统等，感兴趣和有需要的用户可进一步通过数苑网的在线客服联系咨询.

正如美国《托马斯微积分》的作者G.B.Thomas教授指出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源. 教材是死的，课程是活的. 课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程. 而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方在教、学、考各方面提供充分的支持，帮助教师在教学过程中发挥其才华，帮助学生富有成效地学习.

作 者<br>2017 年 3 月28日

# 目 录

**第 6 章 多元函数微积分**

§6.1 空间解析几何简介 …… 1
§6.2 多元函数的基本概念 …… 9
§6.3 偏导数 …… 16
§6.4 全微分 …… 23
§6.5 复合函数微分法与隐函数微分法 …… 28
§6.6 多元函数的极值及其求法 …… 36
§6.7 二重积分的概念与性质 …… 50
§6.8 在直角坐标系下二重积分的计算 …… 55
§6.9 在极坐标系下二重积分的计算 …… 65
总习题六 …… 70
数学家简介 [6] …… 73

**第 7 章 无穷级数**

§7.1 常数项级数的概念和性质 …… 77
§7.2 正项级数的判别法 …… 84
§7.3 一般常数项级数 …… 93
§7.4 幂级数 …… 97
§7.5 函数展开成幂级数 …… 106
总习题七 …… 114
数学家简介 [7] …… 116

**第 8 章 微分方程与差分方程**

§8.1 微分方程的基本概念 …… 119
§8.2 可分离变量的微分方程 …… 125
§8.3 一阶线性微分方程 …… 133
*§8.4 可降阶的二阶微分方程 …… 140
§8.5 二阶线性微分方程解的结构 …… 143
§8.6 二阶常系数齐次线性微分方程 …… 147
§8.7 二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 151
§8.8 数学建模 —— 微分方程的应用举例 …… 158
§8.9 差分方程 …… 167
总习题八 …… 178
数学家简介 [8] …… 180

## 习题答案

第 6 章 答案 ······ 183
第 7 章 答案 ······ 188
第 8 章 答案 ······ 190

# 第 6 章　多元函数微积分

在前面几章中，我们讨论的函数都只有一个自变量，这种函数称为一元函数. 但在许多实际问题中，我们往往要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，就是要考虑一个变量 (因变量) 与另外多个变量 (自变量) 的相互依赖关系，由此引入了多元函数以及多元函数的微积分问题. 本章将在一元函数微积分学的基础上，进一步讨论多元函数的微积分学. 讨论中将以二元函数为主要对象，这不仅因为与二元函数有关的概念和方法大多有比较直观的解释，便于理解，而且因为这些概念和方法大多能自然推广到二元以上的多元函数.

## §6.1　空间解析几何简介

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就. 它通过点和坐标的对应关系，把数学研究的两个基本对象"数"和"形"统一起来，使得人们既可以用代数方法解决几何问题 (这是解析几何的基本内容)，也可以用几何方法解决代数问题.

本节我们仅简单介绍空间解析几何的一些基本概念，它们包括空间直角坐标系、空间两点间的距离、空间曲面及其方程等概念. 这些内容对我们学习多元函数的微分学和积分学将起到重要的作用.

### 一、空间直角坐标系

在平面解析几何中，我们建立了平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系，把平面上的点与有序数组 (即点的坐标 $(x, y)$) 对应起来. 同样，为了把空间的任一点与有序数组对应起来，我们建立了**空间直角坐标系**.

过空间一定点 $O$，作三条相互垂直的数轴，依次记为 ***x* 轴** (**横轴**)、***y* 轴** (**纵轴**)、***z* 轴** (**竖轴**)，统称为**坐标轴**. 它们构成了一个空间直角坐标系 $Oxyz$ (见图 6-1-1).

空间直角坐标系有右手系和左手系两种. 我们通常采用右手系 (见图 6-1-2)，其坐标轴的正向按如下方式规定：以右手握住 $z$ 轴，当右手的 4 个手指从 $x$ 轴正向以 $\pi/2$ 角度转向 $y$ 轴正向时，大拇指的指向就是 $z$ 轴的正向.

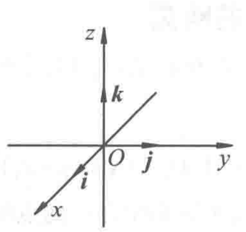


**图 6-1-1**

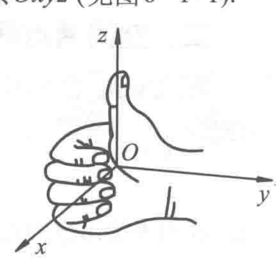


**图 6-1-2**

三条坐标轴中每两条坐标轴所在的平面 $xOy$、$yOz$、$zOx$ 称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分称为一个**卦限**，共八个卦限. 其中，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 部分为第Ⅰ卦限，第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限在 $xOy$ 面的上方，按逆时针方向确定. 第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 卦限在 $xOy$ 面的下方，由第Ⅰ卦限正下方的第Ⅴ卦限按逆时针方向确定(见图6–1–3).

定义了空间直角坐标系后，就可以用一组有序实数组来确定空间点的位置. 设 $M$ 为空间中任意一点(见图6–1–4)，过点 $M$ 分别作垂直于 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的平面，它们与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴分别交于 $P$、$Q$、$R$ 三点，这三个点在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的坐标分别为 $x$, $y$, $z$. 这样空间的一点 $M$ 就唯一地确定了一个有序数组 $x, y, z$. 反之，若给定一有序数组 $x, y, z$，就可以分别在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴找到坐标分别为 $x$, $y$, $z$ 的三点 $P$、$Q$、$R$，过这三点分别作垂直于 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的平面，这三个平面的交点就是由有序数组 $x, y, z$ 所确定的唯一的点 $M$. 这样就建立了空间的点 $M$ 和有序数组 $x, y, z$ 之间的一一对应关系. 这组数 $x$, $y$, $z$ 称为**点 $M$ 的坐标**，并依次称 $x$, $y$ 和 $z$ 为点 $M$ 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**，坐标为 $x$, $y$, $z$ 的点 $M$ 通常记为 $M(x, y, z)$.

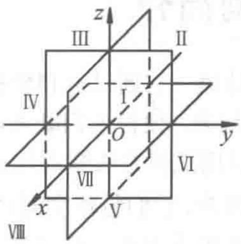


**图 6–1–3**

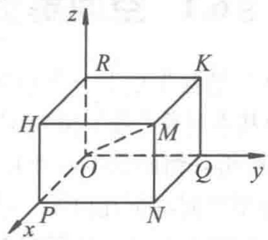


**图 6–1–4**

**空间图形演示**

坐标面和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，$x$ 轴上的点，其纵坐标 $y=0$，竖坐标 $z=0$，于是，其坐标为 $(x, 0, 0)$. 同理，$y$ 轴上的点的坐标为 $(0, y, 0)$；$z$ 轴上的点的坐标为 $(0, 0, z)$. $xOy$ 面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$；$yOz$ 面上的点的坐标为 $(0, y, z)$；$zOx$ 面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$.

设点 $M(x, y, z)$ 为空间一点，则点 $M$ 关于坐标面 $xOy$ 的对称点为 $A(x, y, -z)$；关于 $x$ 轴的对称点为 $B(x, -y, -z)$；关于原点的对称点为 $C(-x, -y, -z)$.

## 二、空间两点间的距离

我们知道，在平面直角坐标系中，任意两点 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

现在我们来给出空间直角坐标系中任意两点间的距离公式.

设空间直角坐标系中有两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$，过这两点各作

三个分别垂直于坐标轴的平面，这 6 个平面围成一个以 $M_1M_2$ 为对角线的长方体(见图6-1-5).

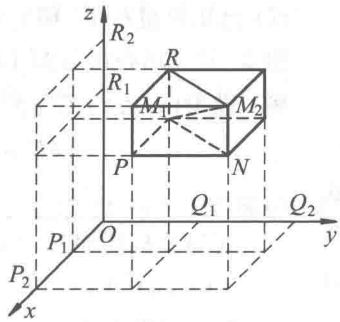


图 6-1-5

由于$\triangle M_1NM_2$、$\triangle M_1PN$ 为直角三角形，所以

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2 =|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

因为

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以，便得到空间两点间的距离公式：

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1}$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 到坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.2}$$

**例 1** 设$P$在$x$轴上，它到$P_1(0,\sqrt{2},3)$的距离为到点$P_2(0,1,-1)$的距离的两倍，求点$P$的坐标.

**解** 因为$P$在$x$轴上，故可设$P$点坐标为$(x, 0, 0)$，由于

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11},\ |PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2},$$
$$|PP_1|=2|PP_2|,$$

即

$$\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2},$$

从而解得 $x=\pm1$，所求点为$(1, 0, 0)$，$(-1, 0, 0)$. ■

## 三、曲面及其方程

### 1. 曲面方程的概念

在日常生活中，我们常常会看到各种曲面，例如，反光镜面、一些建筑物的表面、球面等. 与在平面解析几何中把平面曲线看作是动点的轨迹类似，在空间解析几何中，曲面也可被看作是具有某种性质的动点的轨迹.

**定义1** 在空间直角坐标系中，如果曲面$S$上任一点坐标都满足方程$F(x,y,z)=0$，而不在曲面$S$上的任何点的坐标都不满足该方程，则方程$F(x, y, z)=0$ 称为**曲面 $S$ 的方程**，而曲面$S$就称为方程$F(x, y, z)=0$ 的图形(见图6-1-6).

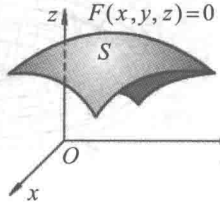


图 6-1-6

建立了空间曲面与其方程的联系后，我们就可以通过研究方程的解析性质来研究曲面的几何性质.

空间曲面研究的两个基本问题是：

(1) 已知曲面上的点所满足的几何条件，建立曲面的方程；

(2) 已知曲面方程，研究曲面的几何形状.

**例 2**　建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$、半径为 $R$ 的球面的方程.

**解**　设 $M(x, y, z)$ 是球面上任一点 (见图 6–1–7). 根据题意有

$$|MM_0| = R,$$

由于

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R,$$

所以　$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2.$$

特别地，球心在原点时，球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2.$$

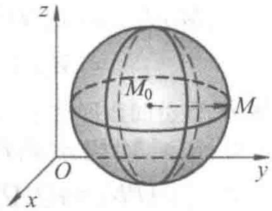


**图 6–1–7**

■

**例 3**　方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$ 表示怎样的曲面？

**解**　对原方程配方，得

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 5,$$

所以，原方程表示球心在点 $M_0(1, -2, 0)$, 半径为 $R=\sqrt{5}$ 的球面方程. ■

***数学实验**

**实验 6.1**　试用计算软件绘制下列方程所表示的曲面:

(1) $z(1+x^2+y^2)=4$;

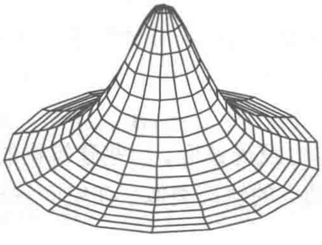
(2) $xy(x^2-y^2)-z(x^2+y^2)=0$;

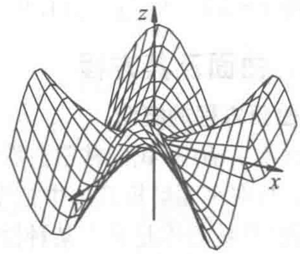
(3) $z=\sin\sqrt{x^2+y^2+2\pi}$;

(4) $xyz\ln(1+x^2+y^2+z^2)-1=0$.

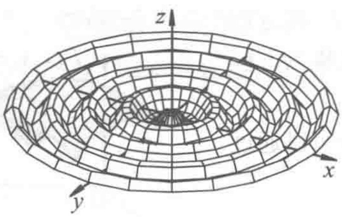
详见教材配套的网络学习空间.

**空间曲面图形**

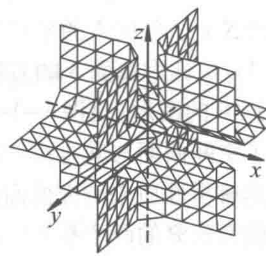

**(1) 参考图**



**(2) 参考图**



**(3) 参考图**



**(4) 参考图**

■

下面我们再介绍一些常见的曲面及其方程，它们包括平面、柱面和二次曲面等.

**2. 平面**

平面是空间中最简单而且最重要的曲面. 可以证明空间中任一平面都可以用三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1.3}$$

来表示，反之亦然. 其中 $A$, $B$, $C$ 是不全为零的常数. 方程 (1.3) 称为**平面的一般方程**.

具有特殊位置的平面方程：

(1) 平面通过坐标原点：$Ax+By+Cz=0$.

(2) 平面平行于 $z$ 轴：$Ax+By+D=0$;

平面平行于 $y$ 轴：$Ax+Cz+D=0$;

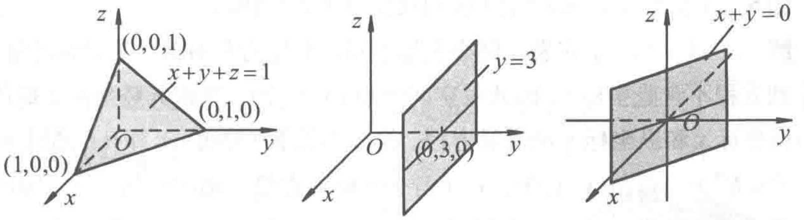
平面平行于 $x$ 轴：$By+Cz+D=0$.

(3) 平面平行于 $xOy$ 面：$Cz+D=0$，特别地，$xOy$ 面：$z=0$;

平面平行于 $yOz$ 面：$Cx+D=0$，特别地，$yOz$ 面：$x=0$;

平面平行于 $zOx$ 面：$Cy+D=0$，特别地，$zOx$ 面：$y=0$.

例如，$x+y+z=1$, $y=3$, $x+y=0$ 等均表示空间中的平面(见图6–1–8(a)、(b)、(c)).




(a) (b) (c)

**图 6–1–8**

**注**：在平面解析几何中，一次方程表示一条直线；在空间解析几何中，一次方程表示一个平面. 例如，$x+y=0$ 在平面解析几何中表示一条直线，而在空间解析几何中则表示一个平面 (见图6–1–8(c)).

**例 4** 求通过 $x$ 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程.

**解** 依题意，这个平面通过 $x$ 轴，即平面平行于 $x$ 轴且通过坐标原点，从而可设该平面方程为

$$By+Cz=0,$$

又因平面过点 $(4,-3,-1)$，因此有

$$-3B-C=0, \text{ 即 } C=-3B.$$

空间平面图形

以此代入所设方程，再除以 $B\,(B\neq 0)$，便得到所求方程为

$$y-3z=0.$$

下面我们再引入一种平面方程.

设一平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

若此平面与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴分别交于 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点 (见图 6–1–9), 其中 $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, 则这三点均满足平面方程, 即有

$$aA+D=0,\quad bB+D=0,\quad cC+D=0,$$

解得

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c}.$$

代入所设平面方程中, 得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

这个方程称为**平面的截距式方程**, 其中 $a$, $b$, $c$ 分别称为平面在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的**截距**.

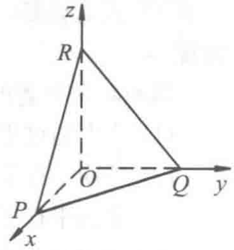


图 6–1–9

**3. 柱面**

**定义 2**　平行于某定直线并沿定曲线 $C$ 移动的直线 $L$ 所形成的轨迹称为**柱面**. 这条定曲线 $C$ 称为柱面的**准线**, 直线 $L$ 称为柱面的**母线**.

**例 5**　方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间中表示怎样的曲面?

**解**　在 $xOy$ 面上, 它表示圆心在原点 $O$, 半径为 $R$ 的圆; 在空间直角坐标系中, 注意到方程不含竖坐标 $z$, 因此对空间一点 $(x,y,z)$, 不论其竖坐标 $z$ 是什么, 只要它的横坐标 $x$ 和纵坐标 $y$ 能满足方程, 这一点就落在曲面上, 即凡是通过 $xOy$ 面内圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x,y,0)$, 且平行于 $z$ 轴的直线 $L$ 都在此曲面上. 因此, 此曲面可以看作是平行于 $z$ 轴的直线 $L$ (母线) 沿着 $xOy$ 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ (准线) 移动而形成的, 称此曲面为**圆柱面** (见图 6–1–10). ■

一般地, 在空间解析几何中, 不含 $z$ 而仅含 $x$、$y$ 的方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 $z$ 轴的一个柱面, $xOy$ 面上的曲线 $F(x,y)=0$ 是这个柱面的一条准线 (见图 6–1–11).

例如, 方程 $y^2=2x$ 表示母线平行于 $z$ 轴、准线为 $xOy$ 面上的抛物线 $y^2=2x$ 的柱面, 这个柱面称为**抛物柱面** (见图 6–1–12).

方程 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 $z$ 轴、准线为 $xOy$ 面上的双曲线 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的柱面, 这个柱面称为**双曲柱面** (见图 6–1–13).

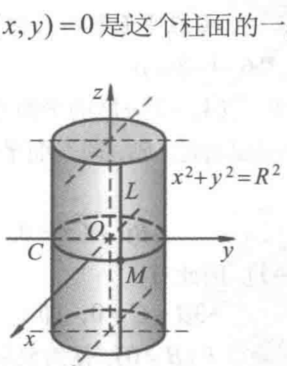


图 6–1–10

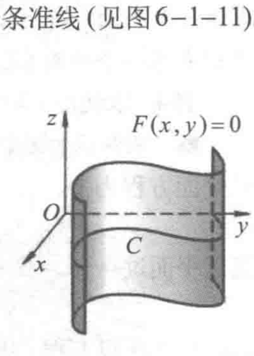


图 6–1–11

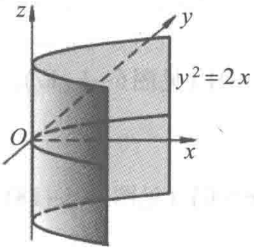



图 6-1-12

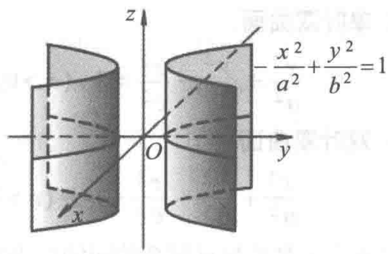



图 6-1-13

***数学实验**

**实验 6.2** 试用计算软件绘制下列方程所表示的柱面：

(1) $y^2-2ax=0$；

(2) $ax^3+bx^2+cx-z=0$；

(3) $a\cos y\sin z+byz=0$.

详见教材配套的网络学习空间.

空间柱面图形

**4. 二次曲面**

关于二次曲面，我们不做深入的讨论，仅介绍几种常见的二次曲面及其方程.

(1) **椭球面**.

由方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0) \tag{1.4}$$

确定的曲面称为**椭球面**(见图6-1-14).

特别地，当 $a=b=c$ 时，方程(1.4)变成

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

此即为我们熟知的以原点为圆心、$a$ 为半径的球面方程(图形动画演示参见教材配套的网络学习空间).

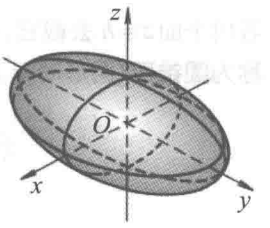



图 6-1-14

(2) **椭圆抛物面**.

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} \ (p与q 同号).$$

以 $p>0,\ q>0$ 的情形为例，椭圆抛物面的典型图形如图6-1-15所示.

(3) **双曲抛物面(马鞍面)**.

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \ (p与q同号).$$

以 $p>0,\ q>0$ 的情形为例，双曲抛物面的典型图形如图6-1-16所示(图形动画演示参见教材配套的网络学习空间).

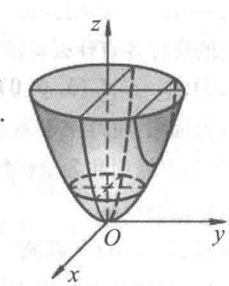



图 6-1-15

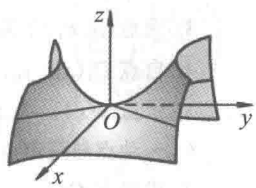



图 6-1-16