"十二五"职业教育
国家规划教材
经全国职业教育教材
审定委员会审定

微积分应用基础

（第三版）

云连英 主编

高等教育出版社

"十二五"职业教育国家规划教材

经全国职业教育教材审定委员会审定

WEIJIFEN YINGYONG JICHU

微积分应用基础

（第三版）

云连英 主编

付艳茹 陶正娟 汪荣伟 曹勃 副主编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”职业教育国家规划教材。

本书根据高职教育培养目标，充分调研我国高职教育现状，认真总结吸收高职数学课程改革的经验，在第二版基础上再次修订。在保持第二版特色的前提下，本书进一步完善了数学知识体系，调整了知识结构，增强了其完整性，并且增加了适合各个不同专业需求的例题和更加贴近专业、符合实际的应用案例，既保证了对基本知识点的掌握，也使其与专业的结合更加紧密。软件 MATLAB教学集中在最后一章，并且充实了数学建模案例。

本书的主要内容包括：极限与连续、导数及应用、积分及应用、常微分方程、MATLAB在微积分中的应用。书后附有基本初等函数的图像及其主要性质与习题参考答案。

本书内容通俗易懂，直观精炼，突出实用性、应用性和现代性，适合高职高专院校各专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

微积分应用基础／云连英主编. --3 版. --北京：高等教育出版社,2014.8
ISBN 978-7-04-039005-6

Ⅰ.①微… Ⅱ.①云… Ⅲ.①微积分-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 303336 号

策划编辑 边晓娜 责任编辑 边晓娜 封面设计 于 涛 版式设计 于 婕
插图绘制 杜晓丹 责任校对 刘春萍 责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京市泽明印刷有限责任公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 13
字 数 310 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2006 年 6 月第 1 版
2014 年 8 月第 3 版
印 次 2014 年 8 月第 1 次印刷
定 价 25.60 元

物 料 号 39005-00

出版说明

教材是教学过程的重要载体，加强教材建设是深化职业教育教学改革的有效途径，推进人才培养模式改革的重要条件，也是推动中高职协调发展的基础性工程，对促进现代职业教育体系建设，切实提高职业教育人才培养质量具有十分重要的作用。

为了认真贯彻《教育部关于"十二五"职业教育教材建设的若干意见》（教职成〔2012〕9号），2012年12月，教育部职业教育与成人教育司启动了"十二五"职业教育国家规划教材（高等职业教育部分）的选题立项工作。作为全国最大的职业教育教材出版基地，我社按照"统筹规划，优化结构，锤炼精品，鼓励创新"的原则，完成了立项选题的论证遴选与申报工作。在教育部职业教育与成人教育司随后组织的选题评审中，由我社申报的1338种选题被确定为"十二五"职业教育国家规划教材立项选题。现在，这批选题相继完成了编写工作，并由全国职业教育教材审定委员会审定通过后，陆续出版。

这批规划教材中，部分为修订版，其前身多为普通高等教育"十一五"国家级规划教材（高职高专）或普通高等教育"十五"国家级规划教材（高职高专），在高等职业教育教学改革进程中不断吐故纳新，在长期的教学实践中接受检验并修改完善，是"锤炼精品"的基础与传承创新的硕果；部分为新编教材，反映了近年来高职院校教学内容与课程体系改革的成果，并对接新的职业标准和新的产业需求，反映新知识、新技术、新工艺和新方法，具有鲜明的时代特色和职教特色。无论是修订版，还是新编版，我社都将发挥自身在数字化教学资源建设方面的优势，为规划教材开发配备数字化教学资源，实现教材的一体化服务。

这批规划教材立项之时，也是国家职业教育专业教学资源库建设项目及国家精品资源共享课建设项目深入开展之际，而专业、课程、教材之间的紧密联系，无疑为融通教改项目、整合优质资源、打造精品力作奠定了基础。我社作为国家专业教学资源库平台建设和资源运营机构及国家精品开放课程项目组织实施单位，将建设成果以系列教材的形式成功申报立项，并在审定通过后陆续推出。这两个系列的规划教材，具有作者队伍强大、教改基础深厚、示范效应显著、配套资源丰富、纸质教材与在线资源一体化设计的鲜明特点，将是职业教育信息化条件下，扩展教学手段和范围，推动教学方式方法变革的重要媒介与典型代表。

教学改革无止境，精品教材永追求。我社将在今后一到两年内，集中优势力量，全力以赴，出版好、推广好这批规划教材，力促优质教材进校园、精品资源进课堂，从而更好地服务于高等职业教育教学改革，更好地服务于现代职教体系建设，更好地服务于青年成才。

高等教育出版社

2014年7月

第三版前言

本书第三版在第二版基础上，遵循高等职业教育发展方向，更加注重与专业实际融合，强化应用与建模思想，结合浙江省中学课程改革实际，促进中高职、专本科衔接，进一步体现如下几个特点：

1. 内容体系新颖

在函数一章中优选相关内容，适应中学学习向高职的学习转变。将导数与微分以及导数应用融为一章，略讲中学已经见过的简单的导数公式，进一步突出其应用。在积分一章，削弱复杂的不定积分计算，适度增加定积分的应用，将多元函数的微积分内容融入到一元函数对应内容的章节里，用较少的学时尽量扩大知识面，以满足专业学习和继续深造的需求。在微分方程一章里，首先讲清楚微分方程的类型和如何建立简单的微分方程，再介绍简单的一、二阶线性方程，而将复杂的求解留给数学软件解决。

2. 描述方式直观

在原来的基础上，增加对极限、导数、积分等重要概念的数据描述，使数据、图形、计算、分析四位一体。在对重要极限、微分中值定理、微积分学基本公式等重要理论除配以图形外，还有精炼、准确、通俗的说明。

3. 适用范围广泛

在实际应用方面，补充和完善了各个知识点的引例以及各个不同专业的应用案例，以供不同专业不同层次学生有选择地学习。

本次修订第 1 章、第 3 章、第 5 章分别由台州职业技术学院的陶正娟老师、云连英老师、汪荣伟老师完成，第 2 章由浙江警官职业学院的付艳茹老师完成，第 4 章由宁波职业技术学院的曹勃老师完成。

在第三版出版之际，编者向关心爱护本书的师生致以谢意。由于编者水平有限，不妥之处仍难以避免，敬请读者和同行继续批评指正。

编　者

2014 年 3 月

第二版前言

本书是银领工程——高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材之一《微积分应用基础》的修订版，是“十一五”浙江省重点教材建设项目教材。

自2006年本书第一版出版以来，一些高职高专院校都将其作为工科类、财经类等专业的教材，还有部分两年制学校以及成人教育也将其作为少学时高等数学的必修教材。

此次修订版在第一版的基础上，根据五年来的使用情况，扬长避短，既保留了原有的特色，又根据高职教育的培养目标，进一步完善了数学体系，增强了其完整性，去掉第一版中比较牵强的实例，增加了简单的公式及理论推导，比如在导数的应用一章里，用通俗的语言描述了微分中值定理及其简单应用；在积分学一章补充了变上限函数的积分以及函数在无穷区间上的广义积分；在常微分方程一章补充了可分离变量的微分方程以及二阶常系数线性微分方程的概念及解法。全书调整并且增加了适当的例题、习题，以保证对基本知识点的学习和掌握；将原本分散在各章最后一部分的MATLAB学习，集中成新的一章，放在最后，以便根据各学校不同的教学环境进行教学。

本书的修订由台州职业技术学院的云连英、陶正娟、汪荣伟、宁波职业技术学院的曹勃、浙江警官职业学院的付艳茹等老师完成。

在第二版出版之际，编者向关心本书的师生致以谢意。由于编者水平有限，不妥之处仍难以避免，敬请读者和同行继续批评指正。

编　者

2011年1月

第一版前言

本教材是根据高职院校的人才培养目标编写的，并辅之以适合工科、经管类学生使用的后续教材《工程应用数学》和《经济应用数学》，是适合高职院校学生使用的基础教材。

在我国，高等职业技术教育是一类新型的高等教育类型，它培养的是初步掌握高新技术、面向生产和管理第一线的应用性人才。这类人才对基础理论的要求是以应用为导向，以必需、够用为度。高职院校的数学教学要为人才培养目标服务，基于此，该教材的编写具有以下特色：

1. 突出培养学生的贯通能力　全书采用"案例驱动式"编写模式，无论是引例还是案例均以学生的专业知识或日常生活知识为背景，强调培养学生将数学知识专业化和将专业知识数学化的相互贯通能力，既注重了数学方法的训练，又明确指出了知识点的应用。

2. 突出教学内容对高职学生认知基础的适应性　教学内容和难度均考虑到高职学生数学基础薄弱，逻辑思维能力不强的状况，更多地利用直观的图形、通俗的生活化语言降低学生学习难度，提高内容的可读性，以适应高职教育的要求。

3. 突出教学内容与高职教学需要的相适应性　教学内容及其难度均以高职各专业的需要为基础，以学生的专业学习和工作需要为准绳；我们把多元函数的微积分内容融入到一元函数对应内容的章节里，通过对偶、比较，既化解了多元微积分内容的难度，又减少了教材的篇幅，为学生后继课程的学习奠定了基础。

4. 突出与高职整体培养目标体系相适应　高等数学在高职整体教学体系中是一种文化基础课，更是一种基础"工具"课，鉴于此，教材的编写体系、课时安排等与不同专业的培养需要相适应，体现数学为专业服务的功能。

5. 突出与现代教育技术的整合及应用　在全书中融入了 MATLAB 软件的应用，有利于学生多维度理解、掌握数学知识点，和主教材同步设计了配套的网络课程、试题库、电子教案和学生自测学习系统，满足教学过程中的各种需要，以体现高职教学实践性的特点。

6. 突出数学教学中的人文性　每章都辅之以阅读材料，通过阅读材料渗透数学思想，让学生了解一些数学发展史，从而对学生进行人文素质教育。

7. 突出与区域经济社会的适应性　适应高职教育为区域经济社会发展培养应用型人才之需，本教材在选编教学"案例"时，充分注意到所选"案例"与区域经济社会发展的相关度，提高了学生的定向解决问题的能力。

8. 突出数学建模思想的融入　将数学建模融入了主干教学，每章不仅渗透了建模思想，而且均有建模应用案例。这样不仅教会了学生学习数学，而且训练了学生用数学方法解决现实问题的能力，从而通过基础课的教学培养学生的实践能力。

9. 突出"必需够用"的特点　根据对专业课程的深入调查，编写了适合高职学生的《微积分应用基础》，并将《工程应用数学》和《经济应用数学》两本教材作为不同专业的选修教材，满足了高职院校专业对数学内容的特殊需求。

10. 突出教学资源的完整性　整个教学资源系统的设计为教师按系统教、学生按系统学提

供完整、周到的教学资源服务。

教材的编写得到了台州职业技术学院、宁波职业技术学院、浙江警官职业学院以及浙江东方职业技术学院四所院校有关领导和部门的支持，院内外同行专家提出了许多指导性意见，在此一并表示感谢。

限于水平，教材中不足之处，恳请批评指正。

编　者

2006年3月1日

目 录

第 1 章　极限与连续

在自然界中，存在着各种各样变化着的量，这些量之间往往不是孤立地存在着，一些变量之间相互联系、相互制约. 函数是对变量的变化关系最基本的数学描述，它是高等数学研究的主要对象，而极限揭示了变量在一定的变化过程中的终极状态，极限的思想和方法不仅是高等数学的基础，而且对其他学科的学习以及生产实践也有着广泛的应用. 本章将在复习和加深有关函数知识的基础上，讨论函数的极限与连续性等问题.

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

引例 1【汽车租赁】

一汽车租赁公司出租某种汽车的收费标准为每天的基本租金 200 元加每千米收费 15 元. 租用一辆该种汽车一天，行车 x km 时的租车费(元)为

$$y=200+15x. \tag{1.1}$$

在(1.1)式中，x 的取值范围是数集 $D=\{x\mid x\geqslant 0\}$，对每一个 $x\in D$，按(1.1)式所示规则，都有唯一确定的 y 与之对应.

引例 2【电压波】

考察脉冲发生器所产生的一个单三角脉冲电压波(图 1-1)，其电压 U(伏)与时间 t(微秒)之间的关系为

当 $0\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2}$ 时 $U=\frac{2E}{\tau}t$；

当 $\frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau$ 时 $U=-\frac{2E}{\tau}(t-\tau)$；

当 $t>\tau$ 时，$U=0$.

这一波形的数学表达式可统一写为

$$U=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2},\\ -\frac{2E}{\tau}(t-\tau), & \frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau,\\ 0, & t>\tau.\end{cases} \tag{1.2}$$

在(1.2)式中，t 的取值范围是数集 $D=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$，对于每一个 $t\in D$，按(1.2)式所示规则，都有唯一确定的 U 与之对应.

引例 3【气温与时间】

(1) 某气象站用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化(图 1-2)，由图可知，对于一昼夜内每

一时刻 t,都有唯一确定的温度 T 与之对应.

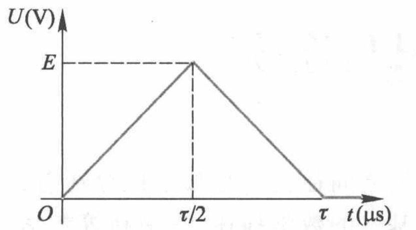

图 1-1

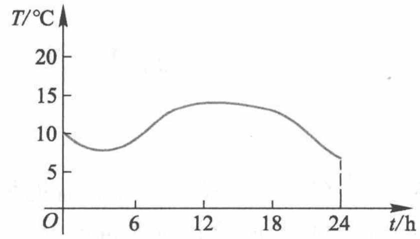

图 1-2

(2) 小王在游上海世博会前查询了 2010 年 7 月 13 日至 7 月 17 日上海每天的最高气温,如表 1-1 所示.

表 1-1　上海 5 日最高气温

日期 t(日)	13	14	15	16	17
最高气温 T(℃)	31	34	35	36	36

由上表可知,对每一个 $t\in D=\{13,14,15,16,17\}$,都有唯一确定的 T 与之对应.

以上各引例,都是一个变量在一个非空集合内每取一个值,按一定的规则,另一变量都有唯一确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系,在数学上就是函数关系.

定义 1　设 D 是一个实数集,如果对于 D 中的每一个数 x,按照某种对应规则 f,都有唯一确定的数值 y 与之对应,那么 y 就称为定义在数集 D 上的 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,$x\in D$,x 称为**自变量**,数集 D 称为函数的**定义域**.

当 x 取某一定值 x_0 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的**函数值**,记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$,当 x 取遍 D 中的一切实数时,对应的函数值的集合称为**函数的值域**.

从函数的定义可知,函数的**定义域**和**对应法则**是确定**函数的两个基本要素**. 一旦确定了对应法则和定义域,变量关系就确定了,至于变量用什么字母无关紧要.

函数常用**解析法**(如引例 1、引例 2)、**图像法**(如引例 3 中(1))、**表格法**(如引例 3 中(2))来表示.

注意　(1) 引例 2 是用解析法表示的一个函数,但在其定义域的不同区间内,所对应的 U 值是用不同的解析式来表示的,这种在其定义域的不同区间上用不同的解析式来表示的函数称为**分段函数**. 在实际生活与工程实践中,这是一类常见的函数.

(2) 在函数的定义中,并没有要求自变量变化时,其函数值一定要变化,因此 $y=C$(C 为常数)也符合函数的定义,称 $y=C$(C 为常数)为**常数函数**.

例 1　求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x-1}$;　(2) $y=\ln(x^2-16)$.

分析　函数的定义域的求法一般有如下两种:

(1) 实际问题中的函数的定义域由所讨论问题的实际意义来确定;

(2) 解析式表示的函数的定义域就是使该式子有意义的自变量的全体.

解　(1) 要使函数 $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x-1}$ 有意义,必须有

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x-1\neq 0, \end{cases}$$

解得 $x\geqslant -2$ 且 $x\neq 1$，于是定义域为 $[-2,1)\cup(1,+\infty)$.

（2）要使函数 $y=\ln(x^2-16)$ 有意义，必须有

$$x^2-16>0,$$

解得 $x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant -4$，于是定义域为 $(-\infty,4]\cup[4,+\infty)$.

案例 1【年维修费用】

某房地产企业的一台挖土机每年维修费用 y（元）与月平均使用时间 x（天）的函数关系为

$$y=2\ 400-1\ 500\mathrm{e}^{-0.1x},$$

若每月平均使用时间为 20 天，那么年维修费用是多少？

解　将 $x=20$ 代入，易得年维修费用为

$$y\Big|_{x=20}=2\ 400-1\ 500\mathrm{e}^{-0.1\times 20}\approx 2\ 197（元）.$$

引例 4【圆柱体积】

圆柱体的体积 V 和它的底面半径 r 及高 h 之间的关系为

$$V=\pi r^2 h \tag{1.3}$$

这里，V 随着 r,h 的变化而变化. 当 r,h 在一定范围内（$r>0,h>0$）取定一对数值 (r,h) 时，按（1.3）式所示规则，V 都有唯一确定的值与之对应.

引例 5【导线的电流】

在远距离输送交流电的过程中，通过导线某点的电流 i 不仅与该点离导线的始端的距离 x 有关，而且还随时间 t 而变化. 对某种理想的输电线有

$$i=i_0\cos\alpha x\cdot\sin\omega t（i_0,\alpha,\omega 为常数）, \tag{1.4}$$

对于 x,t 的每一对值 $(x,t)\in\{(x,t)\mid 0<x<+\infty,0<t<+\infty\}$，按（1.4）式所示规则，$i$ 都有唯一确定的值与之对应.

引例 6【广告费用】

某公司通过电台和报刊两种方式做某种商品的推销广告宣传，根据统计资料销售收益 R（万元）与电台广告费 x（万元）和报刊广告费 y（万元）之间有如下的经验公式：

$$R=15+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2, \tag{1.5}$$

对于 x,y 的每一对值 $(x,y)\in\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$，按（1.5）式所示规则，$R$ 都有唯一确定的值与之对应.

以上各引例，从数量关系来说，都是根据某种对应规则，一个变量随着两个变量的变化而变化，仿照一元函数（一个自变量的函数）的定义引入二元函数的定义.

定义 2　设有变量 x,y,z，如果当变量 x,y 在一定范围内任意取定一对数值时，变量 z 按照一定的对应法则，总有唯一确定的数值与之对应，则称 z 为 x,y 的**二元函数**，记作 $z=f(x,y)$，其中 x,y 叫做**自变量**，x,y 的变化范围叫做二元函数的**定义域**.

例 2　求函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域.

解　要使函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1)$ 有意义，必须有

$$\begin{cases}4-x^2-y^2\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1>0,\end{cases}$$

解得 $1<x^2+y^2\leqslant 4$，于是定义域为 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$.

1.1.2 函数的几种特性

一、函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，$f(x)=x^3$ 是奇函数，而 $f(x)=x^2-2x+1$ 是非奇非偶函数.

二、函数的单调性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内随着 x 的增大而增大（或减少），即对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是**单调增加（或单调减少）**的，区间 (a,b) 叫做函数 $y=f(x)$ 的**单调增加区间（或单调减少区间）**.

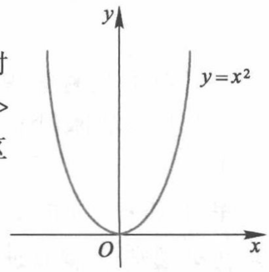

图 1-3

单调增加区间与单调减少区间统称为**单调区间**.

单调增加函数的图像沿 x 轴正向上升；

单调减少函数的图像沿 x 轴正向下降.

例如，由图 1-3 可知，函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，而在 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数.

案例 2【需求函数】

在经济学中，某一商品的需求量是指在一定的价格水平下，消费者愿意而且有支付能力购买的商品量. 影响商品需求的因素很多，商品的价格是影响需求的一个主要因素，还有其他因素，如消费者收入的增减、季节的变换以及消费者的偏好等都会影响需求. 如果把价格以外的其他因素都看成是常量，则需求量 D 可视为该商品的价格 P 的函数，即 $D=f(P)\,(P\geqslant 0)$，这个函数称为**需求函数**.

一般情况下，商品的价格越低，需求量越大；商品的价格越高，需求量越小. 因此，需求函数 $D=f(P)$ 是单调减少函数. 商场可通过采取降低价格、增加商品的销售量（需求量）等营销策略，增加销售收入.

案例 3【成本函数】

某产品的总成本是指生产一定数量的产品所耗费的生产要素（如劳动力、原料、设备等）的费用总额. 总成本可分为如下两类：第一类成本是厂房、设备、运输工具等固定资产的折旧以及管理者的固定工资等，这一类成本的特点是短期内不发生变化，即不随产品量的变化而变化，称为固定成本，固定成本也是产量为零时的成本；第二类成本是能源费用、原材料费用、劳动者的计件工资等，这一类成本的特点是随产品量的变化而变化，称为可变成本. 设 Q 表示产量，C 表示总成本，则 C 与 Q 之间的函数关系称为成本函数，记作

$$C=C(Q)=C_0+V(Q),\ Q\geqslant 0,$$

其中 $C_0(C_0 \geqslant 0)$ 是固定成本，$V(Q)$ 是可变成本.

由于当产量增加时，成本必然增加，所以成本函数是单调增加函数.

三、 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a,b) 内的一切 x 值，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**有界**，否则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**无界**.

例如，对于一切 $x \in \mathbf{R}$，$|\sin x| \leqslant 1$ 都成立，所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界. 又如，对于一切 $x \in \mathbf{R}$，$|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ 都成立，所以 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

直观上，有界函数的图形位于两条平行于 x 轴的直线之间，如图 1-4 所示.

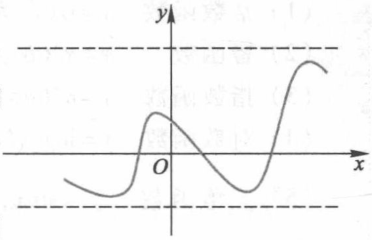

图 1-4

四、 函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个常数 $T \neq 0$，使得对于定义域内的一切 x 都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为 $f(x)$ 的一个**周期**，通常周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如 $y=\sin x, y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，而 $y=\tan x, y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

1.1.3 基本初等函数

红、黄、蓝是三原色，五彩缤纷的大千世界的所有颜色都可以由红、黄、蓝组合而成. 常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数便相当于函数领域的“三原色”，由它们可衍生出我们所要研究的函数.

在中学我们学习了常数函数、幂函数、指数函数、对数函数和三角函数的正弦、余弦以及正切函数，下面我们给出三角函数的余切、正割、余割的定义，然后给出反三角函数的定义.

设 α 是一个任意角，$P(x,y)$ 是角 α 终边上不与原点重合的任意一点，这一点与原点的距离为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$：

称比值 $\frac{x}{y}$ 为 α 的余切，记作 $\cot\alpha$，即 $\cot\alpha=\frac{x}{y}$；

称比值 $\frac{r}{x}$ 为 α 的正割，记作 $\sec\alpha$，即 $\sec\alpha=\frac{r}{x}$；

称比值 $\frac{r}{y}$ 为 α 的余割，记作 $\csc\alpha$，即 $\csc\alpha=\frac{r}{y}$.

函数 $y=\sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数叫做反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$，其定义域是 $[-1,1]$，值域是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

函数 $y=\cos x, x \in [0,\pi]$ 的反函数叫做反余弦函数，记作 $y=\arccos x$，其定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$.

函数 $y=\tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数叫做反正切函数，记作 $y=\arctan x$，其定义域是 $(-\infty,$

$+\infty$),值域是$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

函数 $y=\cot x, x\in(0,\pi)$ 的反函数叫做反余切函数,记作 $y=\operatorname{arccot}x$. 其定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,\pi)$.

我们把常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**:

(1) 常数函数 $y=C$(C 为常数);

(2) 幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为常数);

(3) 指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq1,a$ 为常数);

(4) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq1,a$ 为常数);

(5) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}, y=\cot x=\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}, y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}, y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$;

(6) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot}x$.

有关基本初等函数的图像及主要性质见附录1.

案例4【测设数据】

测设工作是根据工程设计图纸上待建的建筑物、构筑物的轴线位置、尺寸及其高程,算出待建的建筑物、构筑物的轴线交点与控制点(或原有建筑物的特征点)之间的距离、角度、高差等测设数据,然后以控制点为根据,将待建的建筑物、构筑物的特征点(或轴线交点)在实地标定出来,以便施工. 如图1-5所示,已知

$$x_P=370.000\text{m}, y_P=458.000\text{m},$$
$$x_A=348.758\text{m}, y_A=433.570\text{m},$$
$$\alpha_{AB}=103°48'48'',$$

试计算测设数据 β(直线 AB 与 AP 的夹角)和 D_{AP}(点 A 与点 P 之间的距离).

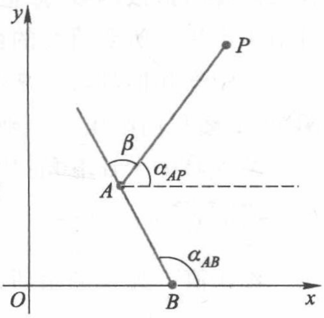

图1-5

解 $$\alpha_{AP}=\arctan\frac{\Delta y_{AP}}{\Delta x_{AP}}=\arctan\frac{458.000-433.570}{370.000-348.758}=48°59'34'',$$

$$\beta=\alpha_{AB}-\alpha_{AP}=103°48'48''-48°59'34''=54°49'14'',$$

$$D_{AP}=\sqrt{(370.000-348.758)^2+(458.000-433.570)^2}\approx32.374\text{ m}$$

1.1.4 复合函数

某商场经营一种允许价格浮动的商品,那么营业额是价格的函数,而价格又是需求量的函数. 对于这种在一个变化过程中有着确定对应关系的三个变量,我们有如下的定义.

定义3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,且 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,那么 y(通过 u 的关系)也是 x 的函数,这个函数叫做 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称**复合函数**,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为**中间变量**.

例如,常见的简谐振动

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)$$

就是时间 t 的函数,它是由函数 $y=\sin u$ 与函数 $u=\omega t+\varphi$ 复合而成的复合函数.

正确分析复合函数的构成,是今后熟练运用求导法则的基础.

注意 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.例如,$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数.因为 u 的值域为 $[2,+\infty)$,不包含在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 内,因而不能复合.

例 3 已知 $y=\mathrm{e}^u$,$u=\sqrt{x}$,试把 y 表示成 x 的复合函数.

解 $y=\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

例 4 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{1+x^2}$; (2) $y=\sin x^2$; (3) $y=\sin^2 x$; (4) $y=\arcsin(\ln 2x)$; (5) $y=x^x$.

解 (1) 函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1+x^2$ 复合而成的.

(2) 函数 $y=\sin x^2$ 是由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的.

(3) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的.

(4) 函数 $y=\arcsin(\ln 2x)$ 是由 $y=\arcsin u$,$u=\ln v$,$v=2x$ 复合而成的.

(5) $y=x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}$,故函数 $y=x^x$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=x\ln x$ 复合而成的.

1.1.5 初等函数

引例 7【生产利润】

某一玩具公司生产 x 件玩具将花费 $400+5\sqrt{x(x-4)}$ 元,如果每件玩具卖 48 元,那么公司生产 x 件玩具获得的净利润 $y=48x-[400+5\sqrt{x(x-4)}]$ 元.

引例 8【双曲函数】

工程技术上常用的双曲函数:

(1) 双曲正弦函数,$y=\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$,其图像如图 1-6 所示.

(2) 双曲余弦函数,$y=\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$,其图像如图 1-7 所示.

(3) 双曲正切函数,$y=\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$,其图像如图 1-8 所示.

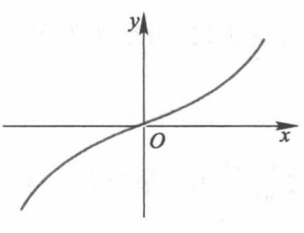

图 1-6

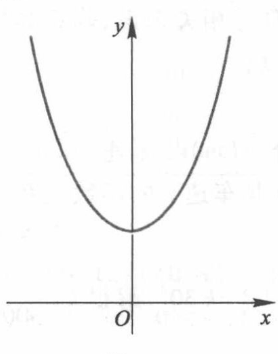

图 1-7

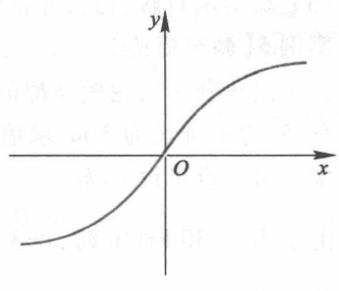

图 1-8

容易验证，双曲函数有类似三角函数的一些恒等式：

$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$，特别地，$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$；

$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$，特别地，$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$；

$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$；等等.

设计大跨度建筑物（如体育馆、大桥）有时用悬索结构，悬索线方程为 $y=a\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$，如图 1-9 所示.

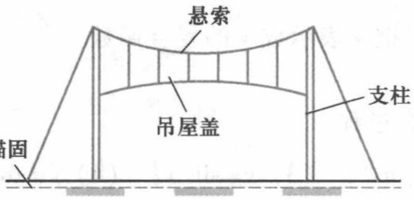

图 1-9

定义 4　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的，且可用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\arcsin\dfrac{x}{2}$，$y=\ln(x+\sin x)$，$y=\mathrm{e}^{x^2}\tan x$ 等都是初等函数.

分段函数若可以表示成一个式子，则为初等函数，否则不是.

例如，单位阶跃函数：

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

它不能用一个式子表示，所以不是初等函数. 单位阶跃函数是电学中的一个常用函数.

1.1.6　建立函数关系举例

运用数学知识解决实际问题，往往需要先建立该问题中各变量之间的函数关系，然后再进行进一步的研究.

一般地，建立函数关系（这里指的是能用解析式表示的函数）的步骤为：

（1）分析问题中的常量与变量，并用字母表示；

（2）根据所给条件，运用数学、物理等相关知识，确定等量关系；

（3）写出函数解析式，并指明定义域.

案例 5【刹车痕迹】

已知汽车刹车后轮胎摩擦的痕迹长 s(m) 与车速 v(km/h) 的平方成正比，当车速为 30 km/h 时刹车，测得痕迹长为 3 m，求痕迹长 s 与车速 v 的函数关系.

解　由题意可设 $s=kv^2$.

由于当 $v=30$ km/h 时，$s=3$ m，所以 $3=k\,30^2$，解得 $k=\dfrac{1}{300}$，故 $s=\dfrac{1}{300}v^2$，因此痕迹长 s 与车速 v 的函数关系为