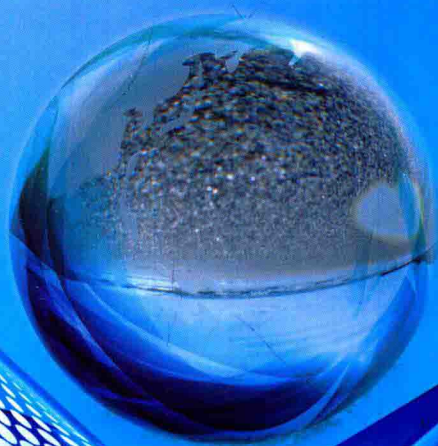


# ABAQUS

## 有限元分析与案例精通

### ——在海洋石油工程中的应用

王文明 编著



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



# ABAQUS 有限元分析与案例精通 ——在海洋石油工程中的应用

王文明 编著



机械工业出版社

本书重点介绍 ABAQUS 的基础操作和中高级应用案例。

本书共分为 2 篇 13 章。第 1 篇“基础篇”（第 1~5 章），主要为绪论、有限元法的理论基础、ABAQUS 有限元分析基础、ABAQUS 的 INP 文件用法与实例、海洋环境载荷理论基础；第 2 篇“工程案例篇”（第 6~13 章），精选了有限元法在海上平台压力容器中的应用、海洋导管架平台整体结构分析、海洋钻井隔水导管的响应分析、海洋平台桩腿与海底土相互作用模拟、海底管道的落物碰撞分析、海洋智能封堵器橡胶密封圈的非线性分析、海洋石油装备的结构优化设计、海底悬空管道的流体卡门涡街分析等实例进行了详解，且涵盖了线性静力学、接触、非线性、动力学、热力学、多体分析、流体力学、结构优化等多个方面。

本书可作为 ABAQUS 初学者的入门教材，也可为有一定基础的用户提供有益的参考与帮助。

## 图书在版编目(CIP)数据

ABAQUS 有限元分析与案例精通：在海洋石油工程中的应用/王文明编著. —北京：机械工业出版社，2017.7

ISBN 978-7-111-56532-1

I. ①A… II. ①王… III. ①有限元分析—应用软件 IV. ①O241.82-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 070679 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：沈红 责任编辑：沈红

责任校对：张征 封面设计：马精明

责任印制：李昂

北京宝昌彩色印刷有限公司

2017 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

169mm×239mm·22.25 印张·4 插页·421 千字

0001—2000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-56532-1

定价：98.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线：010-88361066

机工官网：[www.cmpbook.com](http://www.cmpbook.com)

读者购书热线：010-68326294

机工官博：[weibo.com/cmp1952](http://weibo.com/cmp1952)

010-88379203

金书网：[www.golden-book.com](http://www.golden-book.com)

封面无防伪标均为盗版

教育服务网：[www.cmpedu.com](http://www.cmpedu.com)

# 序 1

海洋资源种类丰富、储量巨大，已经成为发达国家优先开发领域。我国拥有18000多公里的海岸线，渤海、黄海、东海、南海四个海域蕴含丰富的海洋石油资源。《“十三五”国家科技创新规划》中明确提出，我国将重点发展海洋石油工程领域。海洋石油工程技术及配套装备的开发，将有助于打破遏制我国的能源紧缺，带动钢铁、机械、造船等行业的发展升级，在未来海洋空间和海底资源的争夺占据有利的位置。

目前，海洋石油工程领域中有限元理论及有限元软件的应用越来越广泛。尤其在海洋平台强度问题、水下生产系统的安全问题、输油管道的振动分析、桩柱的耦合稳定性分析等等，有着很好的应用。在众多的有限元分析软件中，ABAQUS有限元分析软件占据着市场的重要地位。其拥有强大的分析计算能力、良好的交互式环境以及监测评估能力，是一款有限元学习及分析方面的必备软件。但是涉及海洋石油工程的有限元分析专题书籍市面上较少，急需一本针对海洋石油工程领域有限元分析方面的书籍，作为从事该领域工程技术人员、大学生和研究生的参考书。

《ABAQUS有限元分析与案例精通——在海洋石油工程中的应用》一书，是一本既适合初学者上手，又不失二次开发等高级运用的书籍。其基础篇中有限元理论较为翔实，通过实例将有限元法的基础理论很好地体现出来。而在工程案例篇，8个极具代表性的案例，几乎涵盖了典型的海洋石油工程方面的有限元分析实例，使读者在遇到海洋石油工程的有限元分析中，可以找到相应的参考。

作为作者的博士生导师，深知作者对待科学研究的严谨态度，本书的每一个知识点，都凝聚了作者的心血和高度责任感。我相信，本书的出版，必定为海洋石油工程领域有限元分析方面极具重要参考价值的书籍。

哈尔滨工程大学机电工程学院

王立权

2017-7-8

## 序 2

有限元分析是一种将力学、计算数学和计算机软件有机结合在一起的高效数值分析技术，是解决工程实际问题的有力工具。自从 20 世纪 50 年代首次提出“有限元”这一概念以来，有限元法得到了普遍关注。目前其分析功能已遍及结构、热学、流体、声学、电磁、多物理场耦合、宏-微观多尺度耦合等众多学科范畴，并已广泛应用于机械、土木、能源、石油化工、航空航天、交通运输、生物医学等重要工程领域，成为工程设计和科学研究中不可或缺的有效手段。

由 HKS (Hibbitt, Karlsson&Sorensen) 公司开发的 ABAQUS 通用软件是深受各领域工程师们青睐的有限元分析软件之一。对于初学者来说，它有直观、简洁的用户友好操作界面；对于高级用户来说，它有强大的非线性分析功能和灵活的编程开放性。采用 ABAQUS 软件已能有效地解决实际工程中常见的各类问题。

目前已经出版的有限元教材或 ABAQUS 软件的书籍大多是讲述有限元法的基础理论或典型的通用应用实例。本书的特点是将有限元分析技术和海洋石油工程应用有机地结合在一起。在基础理论部分，介绍了有限元法的理论知识，通过实例阐明了有限元法的一般分析步骤。在工程案例部分，将实际工程问题与有限元理论紧密结合，针对典型海洋石油工程案例讲述有限元分析的要点和详细的操作步骤。此外，第 4 章的 INP 文件用法与实例，也是本书的一大亮点。

作者总结了多年讲授有限元课程的教学经验和采用 ABAQUS 软件解决海洋石油工程实际问题的丰富实践，经过认真思考和提炼精华写成本书。力求在整体结构上系统完整，在具体细节上考虑周全，是一本将有限元理论和工程应用经验紧密结合的好书。本书可用作高等院校相关专业的有限元教材或教学参考资料，对从事海洋石油工程和机械工程的工程师们也具有重要的参考价值。

清华大学航天航空学院

陆明万

2017-7-8

# 前 言

有限元法是求解场问题的数值方法。它先把复杂区域划分成有限个简单区域的组合,在这些简单区域上用多项式近似,然后通过边界上的连续条件,把这些简单区域集成整体,就得到了原来问题的近似解。有限元在航天、机械、建筑、石油工程等领域,都得到了广泛的应用。海洋石油工程中的平台、立管、装备设计的很多问题,有限元法都能够得到比较精确的近似解,起到了重要的作用。

ABAQUS 是一款功能强大的有限元分析软件,它融合结构力学、传热学、流体力学、声学、电磁学等于一体,不但可以做单一零件的力学和多物理场分析,同时还可以做复杂系统的分析研究,在模拟高度非线性问题上具有其他仿真软件无可比拟的优势。自 ABAQUS 问世以来,广泛应用于机械、土木、能源、汽车、航天、材料成型等众多领域,为科学研究和工程应用做出了巨大的贡献。

对机械工程或海洋石油工程科研工作者而言,一本具有理论结合实际、重点突出的有限元法理论及 ABAQUS 软件应用教程是必不可少的。作者在讲授研究生课程“工程分析软件应用基础”(有限元原理建模及应用)的过程中,更是倍感这种教程的重要性。所以,本书从有限元的基本思想谈起,以平面问题有限元法为例从理论上说明了有限元法的一般步骤,阐述了海洋石油工程的环境载荷理论基础;再结合作者的科研经历,从典型海洋石油工程实际项目中精练出本书的实例,并通过 ABAQUS 软件进行详尽的模拟仿真。希望本书能为科研人员提供实用参考价值。

本书可作为 ABAQUS 初学者的入门教材,也可为有一定基础的用户提供有益的参考与帮助。本书重点介绍 ABAQUS 的基础操作和中高级应用案例,共分为两篇 13 章。“基础篇”(第 1~5 章),主要介绍有限元理论的发展、平面有限元理论、海洋环境载荷、ABAQUS 的基础操作与快速入门实例;“工程案例篇”(第 6~13 章),精选了海洋石油工程上的 8 个应用案例,对海上平台压力容器分析、海洋导管架平台整体结构分析、海洋钻井隔水导管的响应分析、平台桩腿与海底土相互作用实例、海底管道的落物碰撞分析、海洋智能球形双封封堵器橡胶密封圈的非线性分析、海洋石油装备的结构优化设计、海底悬空管道的流体卡门涡街分析等实例进行了详解,涵盖了线性静力学、接触、非线性、动态力学、热力学、多体分析、流体力学、结构优化等多个方面。本书特色:

- 1) 本书针对不同程度的读者,大致分为基础篇、工程案例篇两部分。
- 2) 本书特别适合有一定有限元经验的研究生或工程师阅读,理论讲解清晰,实例一目了然。
- 3) 除了典型实例的分析,还增加了相关海洋石油工程的研究背景,有利于提高读者的应用水平。

可以扫描以下二维码,下载书中案例的源代码及相关视频。



编 者

# 目 录

序 1  
序 2  
前言

## 第 1 篇 基础篇

第 1 章 绪论	1
本章导读与知识要点	1
1.1 有限元的基本思想与发展	1
1.1.1 有限元法的基本思想	1
1.1.2 有限元法的发展	6
1.2 ABAQUS 软件	7
1.3 海洋石油工程的发展	8
1.4 海洋石油工程中的典型有限元问题	9
1.4.1 结构静力分析	9
1.4.2 结构模态分析	10
1.4.3 瞬态动力学分析	10
1.4.4 热力学分析	10
1.4.5 结构优化分析	10
1.4.6 流体分析	11
1.5 本章小结	11
第 2 章 有限元法的理论基础	12
本章导读与知识要点	12
2.1 弹性力学基础	12
2.1.1 弹性力学的物理量	12
2.1.2 弹性力学基本方程	15
2.1.3 平面问题定义	18
2.2 平面问题有限元法	20
2.2.1 结构离散	21
2.2.2 单元位移函数	21

2.2.3 单元应变和应力	25
2.2.4 单元刚度矩阵	26
2.2.5 载荷等效移置	28
2.2.6 整体刚度矩阵	30
2.2.7 位移约束	32
2.2.8 有限元的解	34
2.2.9 结果显示和分析	34
2.3 平面应力有限元法算例	34
2.3.1 基于 3 节点三角形单元的矩形薄板分析	35
2.3.2 矩形薄板 MATLAB 算例分析	38
2.4 本章小结	43
第 3 章 ABAQUS 有限元分析基础	45
本章导读与知识要点	45
3.1 ABAQUS 的分析模块	45
3.2 ABAQUS/CAE 简介	48
3.2.1 ABAQUS/CAE 的启动	48
3.2.2 ABAQUS/CAE 主窗口的组成	49
3.2.3 有限元分析步骤	51
3.2.4 ABAQUS 主要功能模块	52
3.2.5 帮助指南	54
3.3 快速入门——矩形薄板的 ABAQUS 分析实例	55
3.3.1 问题描述	55
3.3.2 启动 ABAQUS/CAE	56
3.3.3 创建平面矩形薄板几何模型	57

3.3.4 创建材料和截面属性 .....	59	4.4.4 提交作业 .....	90
3.3.5 定义装配件 .....	61	4.4.5 查看结果 .....	91
3.3.6 设置分析步 .....	61	4.5 本章小结 .....	93
3.3.7 定义耦合关系 .....	61	<b>第5章 海洋环境载荷理论基础</b> ..	94
3.3.8 定义载荷和边界条件 .....	62	本章导读与知识要点 .....	94
3.3.9 划分网格 .....	63	5.1 风载 .....	95
3.3.10 提交分析作业 .....	65	5.1.1 设计风速 .....	95
3.3.11 后处理 .....	66	5.1.2 风力表达式 .....	96
3.3.12 退出 ABAQUS/CAE .....	70	5.2 波浪载荷 .....	97
<b>3.4 矩形薄板的 2 单元分析</b>		5.2.1 波浪力分类 .....	97
<b>实例</b> .....	70	5.2.2 波浪力计算方法 .....	98
3.4.1 创建平面矩形薄板几何		5.2.3 不同尺度结构物的波浪力	
模型 .....	70	计算 .....	98
3.4.2 创建材料和截面属性 .....	71	5.3 海流载荷 .....	100
3.4.3 定义装配件 .....	71	5.3.1 海流分类 .....	100
3.4.4 设置分析步 .....	71	5.3.2 海流力计算 .....	101
3.4.5 定义载荷和边界条件 .....	71	5.4 海冰载荷 .....	102
3.4.6 划分网格 .....	72	5.4.1 海冰与海上结构物的相互	
3.4.7 提交作业及后处理 .....	72	作用 .....	102
3.4.8 结果对比 .....	75	5.4.2 海冰静冰力计算 .....	103
<b>3.5 本章小结</b> .....	75	5.4.3 海冰动冰力计算 .....	105
<b>第4章 ABAQUS 的 INP 文件用法</b>		5.5 地震载荷 .....	106
<b>与实例</b> .....	76	5.5.1 地震力的计算 .....	106
本章导读与知识要点 .....	76	5.5.2 地震的动力响应分析 .....	107
4.1 ABAQUS 常用文件 .....	76	5.6 载荷的组合 .....	108
4.2 INP 文件用法 .....	78	5.7 本章小结 .....	108
4.2.1 INP 文件组成 .....	78		
4.2.2 生成 INP 文件 .....	81	<b>第2篇 工程案例篇</b>	
4.2.3 修改 INP 文件 .....	81	<b>第6章 有限元法在海上平台压力</b>	
4.2.4 导入 INP 文件 .....	81	<b>容器中的应用</b> .....	109
4.3 INP 文件常用关键字 .....	83	本章导读与知识要点 .....	109
4.4 悬臂梁 INP 应用实例 .....	86	6.1 技术背景 .....	109
4.4.1 问题描述 .....	86	6.1.1 海洋平台 .....	109
4.4.2 撰写 INP 文件 .....	87	6.1.2 压力容器 .....	112
4.4.3 导入 INP 文件 .....	89	6.2 压力容器静力学分析 .....	113



6.2.1	问题分析	115	第7章	海洋导管架平台整体结构	
6.2.2	创建部件	116		分析	151
6.2.3	定义材料和截面属性	117		本章导读与知识要点	151
6.2.4	定义装配件	118	7.1	导管架平台概述	151
6.2.5	设置分析步	119	7.2	导管架平台整体结构的静力	
6.2.6	定义接触	119		分析	153
6.2.7	定义载荷和边界条件	119	7.2.1	问题分析	154
6.2.8	划分网格	122	7.2.2	创建部件	157
6.2.9	提交分析作业	123	7.2.3	创建材料和截面属性	158
6.2.10	后处理	123	7.2.4	定义装配件	163
6.3	基于振动理论的压力容器		7.2.5	设置静态分析步	165
	模态分析	125	7.2.6	定义接触	166
6.3.1	线性动力学分析简介	125	7.2.7	定义载荷和边界条件	167
6.3.2	模态分析	125	7.2.8	划分网格	170
6.3.3	瞬态动力学分析	126	7.2.9	提交作业及查看结果	171
6.3.4	问题描述	127	7.3	导管架平台的模态分析	172
6.3.5	设置分析步	128	7.3.1	设置分析步	174
6.3.6	定义载荷和边界条件	131	7.3.2	提交作业及查看结果	174
6.3.7	划分网格	132	7.4	本章小结	178
6.3.8	提交分析作业及后处理	133		附:本章实例 INP 文件及	
6.4	压力容器热力学分析	136		注释	178
6.4.1	热力学分析概述	136	第8章	海洋钻井隔水导管的	
6.4.2	问题描述	137		响应分析	181
6.4.3	创建部件	139		本章导读与知识要点	181
6.4.4	定义材料和截面属性	140	8.1	海洋立管概述	181
6.4.5	定义装配件	140	8.1.1	钻井隔水管	182
6.4.6	设置分析步	140	8.1.2	顶张力立管	182
6.4.7	定义接触	141	8.1.3	钢悬链线立管	183
6.4.8	定义载荷和边界条件	142	8.1.4	柔性立管	183
6.4.9	划分网格	143	8.1.5	塔式立管	183
6.4.10	提交分析作业	143	8.2	海洋钻井隔水导管响应	
6.4.11	后处理	144		分析	183
6.5	本章小结	145	8.2.1	问题描述	183
	附:本章实例 INP 文件及		8.2.2	创建模型	186
	注释	145	8.2.3	设置材料属性	186

8.2.4 定义装配件 .....	187	方法 .....	220
8.2.5 设置分析步 .....	187	10.2 非线性动力学分析	
8.2.6 定义载荷和边界条件 .....	189	概述 .....	222
8.2.7 划分网格 .....	193	10.3 管道落物碰撞分析	
8.2.8 INP 关键字编辑 .....	193	实例 .....	223
8.2.9 后处理与查看结果 .....	195	10.3.1 问题描述 .....	223
8.3 本章小结 .....	199	10.3.2 创建部件 .....	224
附: 本章实例部分 INP 文件及		10.3.3 定义材料和截面属性 .....	226
注释 .....	199	10.3.4 定义装配件 .....	227
<b>第 9 章 海洋平台桩腿与海底土相互</b>		10.3.5 设置分析步 .....	228
<b>作用模拟</b> .....	203	10.3.6 定义接触 .....	229
本章导读与知识要点 .....	203	10.3.7 定义边界条件和载荷 .....	231
9.1 桩土相互作用概述 .....	203	10.3.8 划分网格 .....	232
9.2 $P-y$ 曲线理论 .....	204	10.3.9 提交分析作业 .....	233
9.2.1 软黏土中的 $P-y$ 曲线 .....	204	10.3.10 后处理 .....	234
9.2.2 硬黏土中的 $P-y$ 曲线 .....	205	10.4 本章小结 .....	236
9.2.3 砂土中的 $P-y$ 曲线 .....	205	附: 本章实例 INP 文件及	
9.3 平台桩土相互作用分析 .....	206	注释 .....	237
9.3.1 创建模型 .....	208	<b>第 11 章 海洋智能球形双封堵器</b>	
9.3.2 设置材料属性 .....	208	<b>橡胶密封圈的非线性</b>	
9.3.3 定义装配件 .....	210	<b>分析</b> .....	239
9.3.4 设置分析步 .....	210	本章导读与知识要点 .....	239
9.3.5 相互作用 .....	210	11.1 非线性理论 .....	239
9.3.6 定义载荷和边界条件 .....	211	11.1.1 边界非线性 .....	240
9.3.7 划分网格 .....	213	11.1.2 几何非线性 .....	240
9.3.8 INP 关键字编辑 .....	213	11.1.3 材料非线性 .....	241
9.3.9 后处理与查看结果 .....	213	11.2 材料非线性理论及计算	
9.4 本章小结 .....	215	方法 .....	242
附 A: 本章实例 INP 文件及		11.2.1 实验数据定义橡胶	
注释 .....	216	材料 .....	242
附 B: $P-y$ 曲线数据表 .....	218	11.2.2 Mooney-Rivlin 模型定义橡胶	
<b>第 10 章 海底管道的落物碰撞</b>		材料 .....	242
<b>分析</b> .....	220	11.3 海洋智能球形双封堵器	
本章导读与知识要点 .....	220	<b>橡胶密封圈的</b>	
10.1 海洋落物理论及计算		<b>分析</b>	
		(试验数据) .....	244

11.3.1 海洋智能封堵技术 概述 .....	244	12.2.6 定义载荷及边界条件 ...	275
11.3.2 案例及问题分析 .....	245	12.2.7 划分网格 .....	276
11.3.3 创建部件 .....	247	12.2.8 拓扑优化分析 .....	276
11.3.4 创建材料和截面属性 ...	248	12.2.9 提交分析作业 .....	280
11.3.5 定义装配件 .....	251	12.2.10 后处理 .....	281
11.3.6 设置分析步 .....	251	12.2.11 结果对比分析 .....	283
11.3.7 定义接触 .....	252	12.3 L形连接件的形状优化设计 实例 .....	286
11.3.8 定义载荷和边界条件 ...	252	12.3.1 问题描述 .....	286
11.3.9 划分网格 .....	253	12.3.2 形状优化分析 .....	286
11.3.10 提交分析作业 .....	255	12.3.3 结果分析 .....	288
11.3.11 后处理 .....	255	12.4 换档控制臂的尺寸优化设计 实例 .....	289
11.4 海洋智能球形双封封堵器 橡胶密封圈的分析 (Mooney - Rivlin 模型) .....	259	12.4.1 问题描述 .....	289
11.4.1 问题描述 .....	259	12.4.2 尺寸优化分析 .....	290
11.4.2 创建材料和截面属性 ...	260	12.4.3 创建优化任务 .....	293
11.4.3 结果分析 .....	260	12.4.4 优化结果 .....	293
11.5 本章小结 .....	262	12.4.5 聚类优化结果 .....	294
附: 本章实例 INP 文件 .....	262	12.5 本章小结 .....	295
<b>第 12 章 海洋石油装备的结构优化 设计</b> .....	268	附: 本章实例 INP 文件及 注释 .....	296
本章导读与知识要点 .....	268	<b>第 13 章 海底悬空管道的流体卡门 涡街分析</b> .....	301
12.1 优化设计基础 .....	268	本章导读与知识要点 .....	301
12.1.1 拓扑优化 .....	269	13.1 流体理论概述 .....	301
12.1.2 形状优化 .....	270	13.2 海底单管悬空管道的流体 卡门涡街分析 .....	302
12.1.3 尺寸优化 .....	271	13.2.1 卡门涡街概述 .....	302
12.1.4 优化术语 .....	271	13.2.2 问题描述 .....	304
12.1.5 求解优化问题的步骤 ...	272	13.2.3 创建海底管跨模型 .....	305
12.2 L形连接件的拓扑优化设计 实例 .....	273	13.2.4 定义材料属性和创建 截面 .....	305
12.2.1 问题描述 .....	273	13.2.5 定义装配件及分析步 ...	307
12.2.2 创建部件 .....	274	13.2.6 定义载荷和边界条件 ...	307
12.2.3 定义材料和截面属性 ...	275	13.2.7 划分网格 .....	309
12.2.4 定义装配件 .....	275	13.2.8 提交作业与后处理 .....	309
12.2.5 设置分析步 .....	275		

13.3 海洋管束的流体分析 .....	311	附录 .....	319
13.3.1 海洋管束技术背景 .....	311	附录 A 中文索引 .....	319
13.3.2 问题描述 .....	311	附录 B 英文索引 .....	325
13.3.3 创建串列双管束模型 ...	312	附录 C 主要符号表 .....	331
13.3.4 定义载荷和边界条件 ...	312	附录 D ABAQUS 单元的 命名 .....	335
13.3.5 结果与后处理 .....	312	附录 E 常用物理量 .....	336
13.4 本章小结 .....	315	参考文献 .....	340
附：本章实例 INP 文件及 注释 .....	315	致谢 .....	341

# 第1篇 基础篇

## 第1章 绪论

### 本章导读与知识要点

有限元法 (Finite Element Method, FEM) 是求解场问题的数值方法。它先把复杂区域划分成有限个简单区域 (比如三角形、四边形、四面体等) 的组合, 在这些简单区域上用多项式近似, 然后通过边界上的连续条件, 把这些简单区域集成整体, 就得到了原来问题的近似解。有限元在航天、机械、建筑、石油工程等领域, 都得到了广泛的应用。特别是在海洋石油工程中, 对于海洋平台、立管、海洋作业装备等设计过程中的很多问题, 有限元法都能够得到比较精确的近似解, 越来越受到科技工作者的青睐。本章对有限元法、有限元分析软件、海洋石油工程进行了综述, 主要的内容为: ①有限元的发展; ②海洋石油工程的发展; ③典型有限元问题。

### 1.1 有限元的基本思想与发展

#### 1.1.1 有限元法的基本思想

许多实际工程问题都可用微分方程和相应的边界条件来描述<sup>[1]</sup>。如图 1-1 中的等截面悬臂梁, 当自由端受集中力  $F$  作用时, 其变形后的挠度  $y$  满足微分方程为

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = F(l-x) \quad (1-1)$$

和边界条件

$$\begin{cases} y|_{x=0} = 0 \\ \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

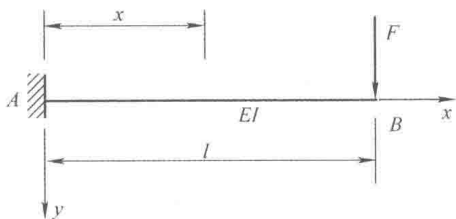


图 1-1 受集中载荷的悬臂梁

式中： $E$  为悬臂梁材料的弹性模量； $I$  为梁截面对中性轴  $z$  的惯性矩； $l$  为悬臂梁长度。

式 (1-1) 是对物理问题的数学描述，称为数学模型。求解物理问题的数学模型，通过所得到的解便可获知物理规律。例如求解式 (1-1)，可求得悬臂梁的弯曲变形挠度为

$$y = \frac{F}{EI} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad (1-3)$$

从式 (1-3) 可知，悬臂梁变形后其质心轴为一条三次曲线。在梁的自由端 ( $x=l$  处)，梁的变形挠度最大，为  $Fl^3/3EI$ 。

求解以上数学模型主要有解析法和数值法两种。解析法通过严格的数学推导出问题的精确解，或称解析解；数值法通过一定的算法和程序，利用计算机计算出问题的近似解，又称数值解。在实际工程问题中，能用解析方法求出精确解的只是少数方程性质比较简单，且几何形状相当规则的问题。对于大多数问题，由于方程的某些特征的非线性性质，或由于求解区域的几何形状比较复杂，不能得到解析解，一般都只能通过数值法求其近似解。

随着计算机技术的飞速发展，数值法已成为求解科学技术问题的主要工具之一<sup>[2]</sup>。常见的数值方法主要有以下三种。

### 1. 差分法

差分法是微分方程的一种近似数值解法。具体地讲，差分法就是把微分用有限差分代替，把导数用有限差商代替，从而把微分方程和边界条件近似地改用差分方程（代数方程）来表示，把求解微分方程的问题转换为求解代数方程的问题。下面通过【例 1-1】来说明差分法的原理。

**【例 1-1】：**求解定义在区间  $[a, b]$  上的函数  $y(x)$  (图 1-2)， $y(x)$  且满足

$$\left. \begin{aligned} y''(x) - y'(x) + y(x) &= f(x), \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= s_1, \quad y(b) = s_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中： $f(x)$  为已知函数； $s_1$ 、 $s_2$  为函数  $y(x)$  在边界  $a$ 、 $b$  处的值，即边界条件。

**解：**将求解域  $[a, b]$  划分为  $n$  等分，离散形成  $(n+1)$  个节点，设为  $x_i$

( $i=0, 1, \dots, n$ )。相邻两节点之间的距离  $h$  称为步长， $h = (b-a)/n = \Delta x$ 。

根据导数的数学定义，若用节点处的差分近似代替微分，有

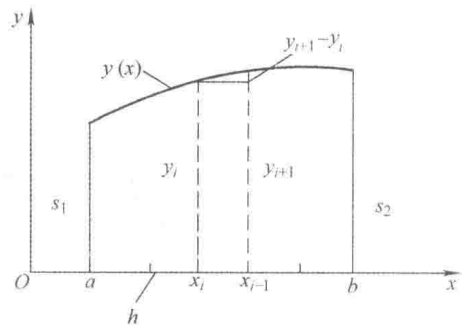


图 1-2 一维问题差分法

$$y'(x_i) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (1-5)$$

$y(x_{i+1})$ 、 $y(x_i)$ 、 $y'(x_i)$ 简记为  $y_{i+1}$ 、 $y_i$ 、 $y'_i$  (以下类似), 则式 (1-5) 可以简化为

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (1-6)$$

同理, 对于  $x_i$  处的二阶微分, 其差分形式为

$$y''(x_i) \approx \frac{\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (1-7)$$

将式 (1-6)、式 (1-7) 代入式 (1-4), 整理后, 得

$$(1+h)y_{i+1} - (2-h-h^2)y_i + y_{i-1} = f(x_i) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n-1) \quad (1-8)$$

再由式 (1-4) 中的边界条件有

$$y(0) = y(a) = s_1, \quad y(n) = y(b) = s_2 \quad (1-9)$$

式 (1-8) 和式 (1-9) 组成一个封闭的关于  $y_0$ 、 $y_1$ 、 $\dots$ 、 $y_n$  的线性方程组, 共有  $(n+1)$  个方程, 因此可求出  $y_0$ 、 $y_1$ 、 $\dots$ 、 $y_n$  共  $(n+1)$  个未知量。这些量便是差分法求得的未知函数  $y(x)$  在节点  $x_i$  上的数值解。

从图 1-2 可以看出, 网格划分越密, 即  $h$  越小, 式 (1-5) 的近似误差越小。对于相邻节点  $x_i$ 、 $x_{i+1}$  之间其他各点的  $y$  值, 可通过  $y_i$ 、 $y_{i+1}$  插值求得, 这样便可求出区间  $[a, b]$  内任一点的  $y$  值。

## 2. 变分法

变分法是研究求解泛函极值 (即求解泛函极大或极小值) 的方法。它是求解定解问题常用的近似方法, 其基本思想是把微分方程边值问题的解等价于相应泛函极值问题的解 (由微分方程和相应边界条件构成的数学问题称为微分方程边值问题)。利用这一原理, 就可将边值问题的求解转换为泛函极值的求解。其中最常用的是里兹 (Ritz) 法。

**Ritz** 法是求解泛函极值的一种直接解法。其基本思想是选择一组满足求解域位移边界条件的试探函数作为实际问题的近似解。然后将试探函数代入泛函表达式中, 并利用泛函有极值的条件——泛函对各待定系数的偏微分为零, 建立起关于待定系数的代数方程; 联立求解这些方程计算出各个待定系数, 就确定了使泛函达到极值的试探函数, 该函数就是原边值问题的近似解<sup>[1]</sup>。显然, 近似解的精度与试函数的选择有关, 如果精确解包含在试函数族中, 将得到精确解。下面通过【例 1-2】来说明 **Ritz** 法的基本原理。

**【例 1-2】:** 设有边值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + y + 1 = 0, & 1 < x < 2 \\ y(1) = s_1, & y(2) = s_2 \end{cases} \quad (1-10)$$

求出其近似解。

解：已知  $y(x)$  的泛函为

$$I[y(x)] = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} y^T \cdot L(y) + y^T f \right] d\Omega + b. t. (y, g)$$

式中： $\Omega$  为求解域； $b. t. (y, g)$  与边界条件有关。

通过数学推导，求得其泛函为

$$I[y(x)] = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} y'^2 - \frac{1}{2} y^2 - y \right) dx \quad (1-11)$$

现用一个试探函数近似原边值问题的解，试探函数设为以下多项式形式

$$\varphi(x) = a_1(x - x^2) + a_2(x - x^3) + \cdots + a_n(x - x^{n+1}) = \sum_{i=1}^n a_i(x - x^{i+1}) \quad (1-12)$$

式中： $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$  为待定系数。

因此有  $y(x) \approx \varphi(x)$ 。将试探函数代入式 (1-10)，可以得到关于  $n$  个待定系数的泛函表达式，简记为

$$I[y(x)] \approx I(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$$

根据多元函数有极值的必要条件，有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a_1} I(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2} I(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_n} I(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = 0 \end{cases} \quad (1-13)$$

泛函表达式是关于待定系数  $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$  的  $n$  元线性方程组，求解该方程组便可求出这  $n$  个待定系数。再将这些系数代回到式 (1-12)，就可得到试探函数  $\varphi(x)$ ，即可求出原边值问题的近似解。

### 3. 有限元法

有限元法吸取了差分法离散求解域的优点，又继承了 **Ritz** 法选择试探函数的合理方法，是在差分法和变分法的基础上发展起来的，具有非常广泛的实用价值。其基本思想一是离散，二是分片插值。

(1) 离散 离散是将连续的求解域划分为有限个小的单元，单元之间的连



接点称为节点,如图 1-3 所示。有限元法的离散思想借鉴于差分法,但做了适当改进。首先,差分法是对计算对象的微分方程和边界条件进行离散,而有限元法是对计算对象的物理模型本身进行离散;其次,有限元法的单元可以变形状和变密度。变形状是指单元不一定要是规则的(如平面单元可以是任意四边形),变密度是指不同区域的单元可以大小不同。

齿轮轮齿离散过程如图 1-3 所示。采用差分法,离散后的形状图 a 有明显锯齿,部分区域与齿形相差较大;采用有限元法离散,则能较好地逼近轮廓曲线,适应性更强,离散精度更高。

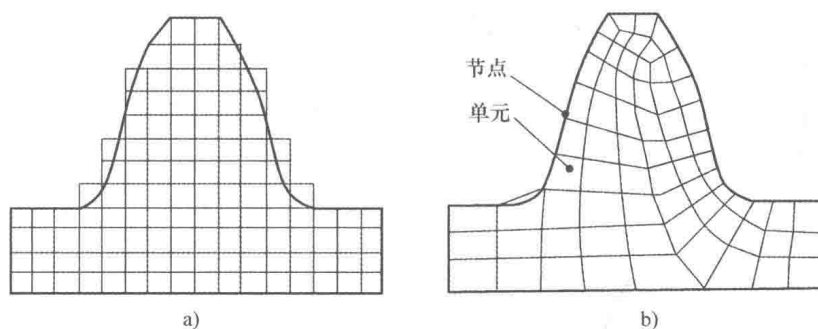


图 1-3 齿轮轮齿的差分法和有限元法离散

a) 差分法网格划分 b) 有限元法网格划分

(2) 分片插值 分片插值是有限元法与 Ritz 法的一个重要区别。有限元法针对每一个单元选择试探函数(也称插值函数),只要试探函数满足一定条件,当单元尺寸逐渐缩小时,有限元解就能收敛到实际的精确解。而变分法是在整个求解域中用一个统一的试探函数逼近真实函数,如果真实函数比较复杂,将难以得到较高的逼近精度(图 1-4)。

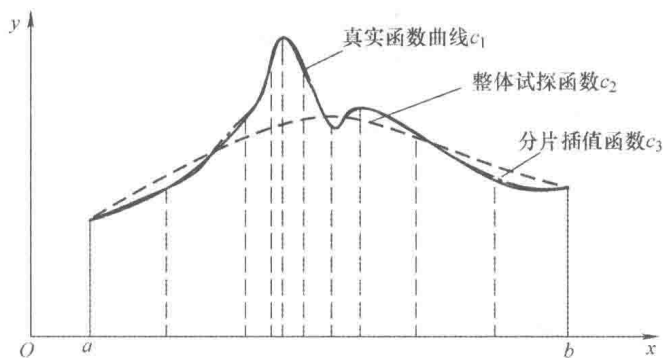


图 1-4 一维函数的整体插值和分片插值

由图 1-4 可见,  $[a, b]$  是求解域,  $c_1$  为真实函数曲线,  $c_2$  为采用变分法逼