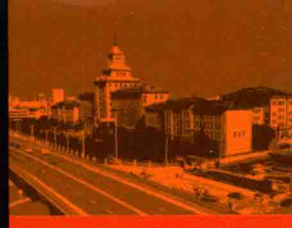


俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

Smirnov Advanced Mathematics (Volume I)

斯米尔诺夫高等数学

（第一卷）

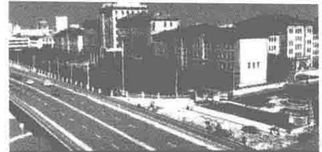
[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著　斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Smirnov Advanced Mathematics (Volume I)

斯米尔诺夫高等数学

（第一卷）



俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

斯米尔诺夫高等数学

Smirnov Advanced Mathematics (Volume I)

（第一卷）

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著

斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2016－040 号

内 容 简 介

本书共分六章，分别为变量与函数关系，极限论，微商概念及其应用，定积分与不定积分概念，级数及其在函数的近似计算中的应用，多元函数，复数，高等代数初步，函数的积分法．本书语言简洁，内容丰富，讲解细致．

本书适合大学师生及数学爱好者参考使用．

图书在版编目(CIP)数据

斯米尔诺夫高等数学．第一卷/(俄罗斯)斯米尔诺夫著．斯米尔诺夫高等数学编译组译．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.3

ISBN 978－7－5603－6521－3

Ⅰ．①斯…　Ⅱ．①斯…②斯…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 050763 号

书名：Курс высшей математики

作者：В. И. Смирнов

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　穆　青
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 31.75　字数 603 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6521－3
定　　价　88.00 元

◎原书第八版序

这一版与以前有很大的区别，主要是删去了关于解析几何的材料，连带着也把其余的材料重新组织了一下。特别是这一卷第二章§6，讲微分学在几何方面的应用一节，全部更动了。再有，以前第二卷第一章，讲复数，多项式的基本性质，以及函数的系统的积分法，现在放在第一卷末一章。

原有的补充材料，又略有补充与更动。见于以下几卷内，要遇到近代分析中相当精密而复杂的问题，在第二章§1之末，讲极限理论之后，增加了无理数的理论，并用以证明了极限存在的判别法以及连续函数的性质。同时也引入了初等函数的严格定义，并讨论了初等函数的性质。在第五章中，讲多元函数时，介绍了隐函数存在定理的证明。

在内容方面，费赫金戈教授给我很多宝贵的意见，作最后一次校订时，这些意见给我很大的帮助。为此，我向他致深深的谢意。

В. И. 斯米尔诺夫

◎原书第十一版序

这一版，主要是在第二章与第五章的有关材料中，与以前不同.

B. И. 斯米尔诺夫

◎ 目录

变量与函数关系

第一章

1. 量与测量

在自然科学中，数学分析具有基本的重要性. 每一种其他的科学，只是着重于研究环绕我们的宇宙中的某些特殊方面，相反的，数学是在探讨适用于一切科学所研究的现象的共通性质.

量与测量是一个基本概念. 量的特性就在于它可以被测量，就是取某一个定量作为测量单位时，可以比较出大小来. 比较的方法依赖于讨论的量的本质，比较的步骤叫作测量. 测量的结果得到抽象的数，它表达所考虑的量与用作测量单位的量之比.

任一自然律给我们量与量之间的关系，也可以说是表达这些量的数之间的关系. 数学研究的对象，就是数以及它们之间的关系，而不问产生这些数与关系的量或定律所独有的特性.

固然，由比较的方法来测量，每一个量都有它抽象的数. 但是这个数依赖于测量时用的单位或标准. 测量一个给定的量，用较大的单位得到较小的数；反之，用较小的单位就得到较大的数.

标准的选择要看所讨论的量的特性以及作测量的场合. 为了测量同类的量，标准量可以在相当大的限度内更换 —— 以测量长度为例，在精确的光学研究中，用一埃之长(1 mm 的千万分之一，10^{-10} m) 作单位，而在天文学中一般用的长度单位叫作光年，就是一年内光所经过的距离(一秒钟光大约走 300 000 km).

2. 数

由测量的结果得到的数，可以是整数(若考虑的量是单位量的整数倍)，分数(若存在另一新单位，被测量的量与原来用的单位量都是新单位量的整数倍 —— 简单来说，就是被测量的量与测量单位可以通约)，以及无理数(上述的公共单位不存在时，就是被测量的量与测量单位不可以通约).

例如，在初等几何学中证明了正方形的对角线与它的边长不可以通约，所以若我们用边长作单位，测量正方形的对角线，则得到的量数$\sqrt{2}$ 是无理数. 用直径长作单位，测量圆周，得到的量数 π 也是无理数.

为要弄清楚无理数的概念，可以应用十进制小数. 由算术知道，任一有理数可以表示成有限小数或循环无穷小数(纯循环或混循环) 的形式. 例如，由十进制除法法则，用分母除分子，我们得到

$$\frac{5}{33}=0.151\,515\cdots=0.\dot{1}\dot{5}$$

$$\frac{5}{18}=0.277\cdots=0.2\dot{7}$$

反之，由算术我们也知道任一十进制循环小数表示一个有理数.

测量与所用单位量不可以通约的量时，我们可以先计算被测量的量包含若干单位量，再看剩余的量包含若干十分之一的单位量，再看新的剩余量包含若干百分之一的单位量，如此继续作下去. 用这方法测量与单位量不可以通约的量时，就作成一个不循环无穷小数. 任一无理数对应一个这样的无穷小数；反之，任一不循环无穷小数对应一个无理数. 若只取一个无穷小数的前几位，则得到对应于这个小数的无理数的一个较小的近似值. 例如，用普通法则开平方到三位小数，得到

$$\sqrt{2}=1.414\cdots$$

1.414 与 1.415 分别是$\sqrt{2}$ 的准确到千分之一的较小的与较大的近似值.

利用十进制小数，可以比较无理数彼此之间的大小，以及无理数与有理数之间的大小.

在许多问题中，考虑的量带有不同的符号，正号或负号(温度高于或低于零度，直线运动中正的或负的速度等). 这样的量分别用正数或负数来表达. 若 a 及 b 是正数，而 $a>b$，则 $-a<-b$，任一正数或零必大于任一负数. 如此全部有理数与无穷数排列成一定的顺序，所有这些数组成实数集合.

注意，在用十进制小数表示实数的情形下，我们可以把任一有限小数用循

环节是 9 的无穷小数来代替. 例如,3.16＝3.159 9…. 若不用有限小数,则得到实数与无穷小数恰好一一对应,就是任一实数对应一个确定的无穷小数,而任一无穷小数对应一个确定的实数. 负数对应冠有负号的无穷小数.

在实数范围内,除去用零除以外,四种演算都可以实行. 任一实数的奇次根永远有一个确定的值. 正实数的偶次根有两个值,只是符号相反. 负实数的偶次根,在实数范围内无解. 至于实数以及它们的演算的严格理论,在后面再讲.

将表达一个已知量的数,取"+"号,叫作这个量的绝对值. 一个数 a 所表达的量的绝对值,也可以说是这个数 a 的绝对值,记作 $|a|$. 如此,我们就有:

若 a 是正数

$$|a|=a$$

若 a 是负数

$$|a|=-a$$

不难证明,和的绝对值 $|a+b|$,仅当 a 与 b 同号时,与各项绝对值的和 $|a|+|b|$ 相等;否则 $|a+b|$ 较小. 所以

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

例如,3 与 -7 的和的绝对值等于 4,而各项绝对值的和是 10.

同样可证,当 $|a|\geqslant|b|$ 时

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|$$

积的绝对值等于各因数绝对值的积,商的绝对值等于除数的绝对值除被除数的绝对值之商

$$|abc|=|a|\cdot|b|\cdot|c|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

3. 常量与变量

数学中所讨论的量分为两类:常量与变量.

在给定的问题中,不变的,保持一个值的量叫作常数;在给定的问题中,由于某种缘故,取不同的值的量叫作变量.

由这个定义显见,常量与变量的概念要依赖于研究这个现象所在的场合. 同一个量,在某种情况下可以认为是常量;而在其他的情况下,就可能是变量.

例如,测量物体的重量时,要认清,称量是在地球表面上同一地方举行,还是在不同的地方举行. 若在同一地方称量,则确定重量的重力加速度是常量,于是不同物体的重量只依赖于它们的质量;若在不同的地方称量,则因为重力加

速度依赖于地球转动的离心力，就不能把它算作常量. 据此，设称量时不用杠杆做的秤，而用弹簧秤，则同一物体在赤道上比在两极轻.

同样，在较粗略的实用计算中，一个枢轴的长度可以算作是不变的量；若比较精确些，把温度变化的作用计入，枢轴的长度就成了变量，而全部计算也就复杂了.

4. 区间

测量变量时，有很多不同情况. 有的变量可以取任一实数值，没有任何限制（例如，由一定时刻开始计算，时间 t 可以取任一实数值，可正可负）；有的只取限于某一不等式的值（例如，绝对温度 T，需大于 -273 ℃）；还有的变量只能取某些值，而不能任意取值（如只取整数 —— 某城居民数，定积气体内分子数 —— 或有理数等）.

我们讲几种在理论研究与实际应用中，测量变量时常见的情况.

a,b 为两个已知实数，若变量 x 可以取适合条件 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全部实数值，就是说 x 在区间 $[a,b]$ 上变化. 这种包含两端的区间，常叫作闭区间. 若变量 x 能取区间 (a,b) 中，除两端外，全部的数值，即 $a < x < b$，就是说 x 在区间 (a,b) 内变化. 这种不含两端的区间叫作开区间. 此外，x 变化的范围也可能是一端闭一端开的区间：$a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$.

若 x 被测的范围由不等式 $a \leqslant x$ 确定，就是说 x 在一个左端闭右端开的区间 $[a,+\infty)$ 上变化. 同样的，对不等式 $x \leqslant b$，我们有左端开右端闭的区间 $(-\infty,b]$. 若 x 可以取任一实数值，就是说 x 在一个两端开的区间 $(-\infty,+\infty)$ 上变化.

5. 函数概念

在实际问题中，常常不仅有一个变量，而是同时有几个变量.

例如，就 1 kg 的空气来讲，确定它的变量，就有它所受的压力 p kg/m^2，所占的容积 v m^3，以及它的温度 t ℃. 现在假设空气的温度保持在 0 ℃，t 就是个常量，等于 0，只剩下 p 与 v 两个变量. 若改变压力 p，则容积 v 也被改变，例如，若空气被压缩，则容积减小. 在这里，我们可以任意改变压力 p（在实际许可限度内），所以，我们把 p 叫作自变量. 显然，对每一个压力的值，气体应占有一个完全确定的容积，于是应该有一个定律，用这定律，对每一个 p 的值，可以找到对应于它的 v 的值. 这就是著名的波义耳－马瑞特定律，即气体当温度不变时，容积与压力成反比.

应用这个定律到 1 kg 的空气上，就得到 v 与 p 之间的关系，如方程

$$v=\frac{273\times 29.27}{p}$$

在这种情形下，变量 v 叫作自变量 p 的函数.

由这个例子推广，理论上讲，我们可以说，自变量的特性就是：它有一个可能取的值的集合，在这个集合中，我们可以任意写它选择任一个值. 例如，自变量 x 的值的集合，可能是任何区间$[a,b]$或是这个区间的内部，就是自变量 x 能取满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 或 $a<x<b$ 的任意一个值，有时 x 也可以取任一整数值. 上述例子中，p 起着自变量的作用，v 就是 p 的函数. 现在给函数一个理论的定义.

定义　若对于自变量 x 的任何一个确定的值(在可能取的值的集合内)，对应的量 y 有确定的值，y 就叫作自变量 x 的函数.

若 y 是 x 的函数，确定于区间(a,b)上，则对于 x 在这区间上的任何一个值，对应的 y 有确定的值.

两个量中，x 或 y 哪个算作自变量，常是看怎样方便. 上例中，我们也可以任意改变容积 v，于是每次确定压力 p，把 v 算作自变量而压力 p 看作 v 的函数. 由上面的方程解 p，就得到由自变量 v 表达函数 p 的公式

$$p=\frac{273\times 29.27}{v}$$

上面关于两个变量的叙述，不难推广到任意几个变量的情形，并且我们可以分别给出自变量与因变量或函数.

回到我们的例子，假设温度不总是 0 ℃，而是可以变的. 波义耳－马瑞特定律就应当换成克拉贝龙关系式

$$pv=29.27(273+T)$$

这里指出，研究气体的情况时，p，v 与 T 中只有两个可以任意改变，若是两个给定的值，第三个就完全定了. 例如，我们取 p 与 T 作自变量，v 就是它们的函数

$$v=\frac{29.27(273+T)}{p}$$

或者把 v 与 T 算作自变量，p 就是它们的函数.

看另一个例子，由三角形的边长 a，b，c 表达面积 S，有公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

其中 p 是三角形的半周长

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

三边 a,b,c 可以任意改变，只需每边大于其余两边之差而小于其余两边之和. 如此变量 a,b,c 是限于不等式的自变量，S 是它们的函数.

我们也可以任意取三角形的两个边，如 a,b 与面积 S，应用公式

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

求 a,b 两边的夹角 $\angle C$，这里 a,b,S 是自变量，$\angle C$ 是函数. 而 a,b,S 应该限于不等式

$$\sin C=\frac{2S}{ab}\leqslant 1$$

注意，在这个例子中，我们得到 $\angle C$ 的两个值. 因为 $\angle C$ 可以取作一个锐角或是一个钝角，都可能使

$$\sin C=\frac{2S}{ab}$$

这里我们遇到多值函数，它的详细情形以后再讲.

6. 表示函数关系的分析法

任一自然律，给出一个现象与另一个现象的关系，于是建立一个量与量之间的函数关系.

函数关系的表示法很多，最重要的有三种：

① 分析法；

② 列表法；

③ 图示法或几何法.

如果一个量与量之间的函数关系，用一个含有这些量与各种数学演算（如加、减、乘、除、对数等）的方程来表示，我们说这是用分析法表示函数. 作理论的研究时，总是用分析法表示函数，于是就可能用数学分析找出结果来，得到的结果是个数学公式. 以天体力学为例，在各种运动中，它们的位置与相互的作用都是由一个基本定律 —— 万有引力定律 —— 得来的.

若某函数（即因变量）可以由自变量通过数学演算来直接表达，则叫作显函数. 显函数的例子，如定温下，用压力 p 作自变量，气体容积 v 的表达式（一元显函数）

$$v=\frac{273\times 29.27}{p}$$

或用边长作自变量，三角形的面积 S 的表达式（三元显函数）

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

再如

$$y=2x^2-3x+7 \tag{1}$$

是一个自变量 x 的显函数.

有时用自变量表达一个函数的公式,不是很容易或者说不可能写出来,我们就写作

$$y=f(x)$$

这个写法标记出 y 是自变量 x 的函数,f 用作记 y 对 x 的关系的符号.其他的字母也可以用来代替 f.若要考虑 x 的几个不同的函数,则需用不同的字母来记对 x 的关系

$$f(x),F(x),\varphi(x)$$

等.这里写的符号,不仅用于分析法表示的函数,而且也用于[5]① 中所定义的一般的函数关系.

与这类似,多元函数写成

$$v=F(x,y,z)$$

这表示 v 是变量 x,y,z 的函数.

给自变量以特殊值,作出 $f,F,\cdots$ 中的演算,就得到函数的特殊值.例如 $x=\frac{1}{2}$ 时,函数(1) 的值是

$$y=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\times\frac{1}{2}+7=6$$

一般来讲,当 $x=x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的值记作 $f(x_0)$,多元函数可以类推.

不要把[5] 中所给的函数的一般定义与 y 通过 x 的分析表达式相混.函数的一般定义中,只说是有一个法则,当变量 x 在它的可取值的集合中任取一值时,对应的 y 有确定的值.并没有假设 y 要有通过 x 的分析表达式.例如,我们在区间$[0,3]$上作一个函数 y 如下:当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=x+5$;而当 $2<x\leqslant 3$ 时,$y=11-2x$,于是当 x 取区间$[0,3]$上任一值时,对应的 y 有确定的值,所以 y 是一个函数.

7.隐函数

若一个函数没有通过自变量的分析表达式,而只有一个方程表示函数的值与自变量的值的关系,就叫隐函数.例如,若变量 y 与变量 x 适合方程

---

① 书中凡引证本册已证的结果时,都用简写符号.例如,[5] 表示本册第 5 小节.

$$y^3 - x^2 = 0$$

则 y 是自变量 x 的隐函数. 从另一方面看,也可以算作 x 是自变量 y 的隐函数.

几个自变量 $x,y,z\cdots$ 的隐函数 v 由方程

$$F(x,y,z,\cdots,v)=0$$

确定.

只有当这个方程对 v 可解,而 v 能表现成 $x,y,z\cdots$ 的显函数

$$v=\varphi(x,y,z,\cdots)$$

时,才能求这个函数值.

上例中,y 可以通过 x 表达成

$$y=\sqrt[3]{x^2}$$

但是,要得到函数 v 的各种性质,不一定要解这方程,常是由确定它的方程来考察隐函数即可.

例如,气体的容积 v 是压力 p 与温度 T 的隐函数,由方程

$$pv=R(273+T)$$

确定.

在三角形中,a,b 两边的夹角 $\angle C$ 是 a,b 与面积 S 的隐函数,由方程

$$ab\sin C=2S$$

确定.

8. 列表法

函数的分析表示法主要是在作理论研究时使用,就是研究一般定律时使用. 但是为要求出函数的某些个别的值,分析表示法常常很不方便,因为需要每次作所有的必要的计算.

为方便起见,在实际应用中,常将若干自变量的值与对应的函数的值列成表.

例如,在实用中常见的有下列诸函数的表

$$y=x^2,\frac{1}{x},\sqrt{x},\pi x,\frac{1}{4}\pi x^2,\lg x,\lg\sin x,\lg\cos x$$

等,此外,还有很有用的较复杂的函数表:贝塞尔函数表、椭圆函数表等,也有多元函数的表,最简单的如乘法表,就是 x 与 y 取整数值时,函数 $z=xy$ 的值的表.

有时,要求的函数值对应的自变量的值,表上没有,而表上只有与它临近的值. 为要在这种情形下用表,有各种的插补法,在中学中用的对数表,就是其中一种(逐差法).

列表法的重要性在于它可以帮助表示不知道分析表达式的函数,在试验工作中是常用的.任何一个试验工作,有找出未知函数关系的目的,而任何试验的结果总是列成一个表,表示这试验中所研究的量的各个值的关系.

9.数的图示法

讲到函数关系的图示法,我们先由一个变量的图示法开始.

任何一个数 x 可以用一条线段来表示.只要选定了单位长,作一条线段,使它的长度等于给定的数 x 即可,如此,如果一个量,不仅可以用数来表达,也可以用线段给一个几何的表示法.

为要用这个方法表示负数,我们在一条标明方向的直线上取线段(图1.1).于是任一线段记作 $\overline{AB}$,A 叫作线段的起点,B 叫作终点.

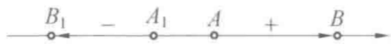


图 1.1

若由 A 到 B 的方向与直线的方向一致,则这条线段表示一个正数.若由 A 到 B 的方向与直线的方向相反,则这条线段表示一个负数(图 1.1 中 $\overline{A_1B_1}$).至于考虑的数的绝对值,则由表示这个数的线段的长度表达,与方向无关.

线段 $\overline{AB}$ 的长度记作 $|\overline{AB}|$,若线段 $\overline{AB}$ 表示数 x,则可以简写作

$$x=\overline{AB},\ |x|=|\overline{AB}|$$

更确定些,可以先在直线上选定一点 O,而把一切线段的起点总放在点 O.于是,任意一点 A,有一个以它为终点的线段 $\overline{OA}$,表示一个数 x(图 1.2).反之,给定一个数 x,就可确定一个线段 $\overline{OA}$ 的大小与方向,于是确定它的终点 A.

图 1.2

如此,若在一个有定向的直线 $X'X$(轴)上,取定一个定点 O(原点),则每一个数 x 对应于这条直线上一个确定的点 A,线段 $\overline{OA}$ 表示这个数 x;反之,轴上任一点 A 确定一个数 x,由线段 $\overline{OA}$ 表示,这个数 x 叫作点 A 的坐标,若需要标明 A 的坐标是 x,则写作 $A(x)$.

若数 x 改变,则表示它的点 A 就在轴上移动.前面讲过的区间的概念,有了数 x 的图示法,可以更清楚些.若 x 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上,则 $X'X$ 轴上的对应点在一条线段上,这条线段的两个端点的坐标是 a 与 b.

若只限于有理数,则当线段 $\overline{OA}$ 与单位长不可以通约时,点 A 就没有对应