



同济大学 1907-2017
Tongji University



同济博士论丛
TONGJI Dissertation Series

总主编 伍江 副总主编 雷星晖

单海英 邵嘉裕 著

符号矩阵理论中的 若干问题

Some Topics in Signed
Matrix Theory



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS



同济博士论丛
TONGJI Dissertation Series

总主编 伍江 副总主编 雷星晖

单海英 邵嘉裕 著

符号矩阵理论中的 若干问题

Some Topics in Signed
Matrix Theory



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书内容主要分四个方面:一是全幂符号唯一矩阵的性质及其与 powerful 矩阵的等价性的研究;二是复符号模式矩阵与复 ray 模式矩阵的行列式值域方面的研究;三是将实 S^2NS 阵的研究推广到 ray S^2NS 阵;四是研究广义逆符号唯一阵的性质及 R. A. Brauldi 和 B. L. Shader 所提的公开问题.

本书适合数学专业人士阅读参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

符号矩阵理论中的若干问题/单海英,邵嘉裕著. —上海:同济大学出版社,2017. 8
(同济博士论丛 / 伍江总主编)
ISBN 978 - 7 - 5608 - 6885 - 1

I. ①符… II. ①单… ②邵… III. ①矩阵—研究
IV. ①O151. 21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 081331 号

符号矩阵理论中的若干问题

单海英 邵嘉裕 著

出 品 人 华春荣 责任编辑 郁 峰 熊磊丽

责任校对 谢卫奋 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
排版制作 南京展望文化发展有限公司
印 刷 浙江广育爱多印务有限公司
开 本 787 mm×1092 mm 1/16
印 张 6.25
字 数 125 000
版 次 2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5608 - 6885 - 1

定 价 38.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

“同济博士论丛”编写领导小组

组 长：杨贤金 钟志华

副 组 长：伍 江 江 波

成 员：方守恩 蔡达峰 马锦明 姜富明 吴志强
徐建平 吕培明 顾祥林 雷星晖

办公室成员：李 兰 华春荣 段存广 姚建中

“同济博士论丛”编辑委员会

总 主 编：伍 江

副 总 主 编：雷星晖

编委会委员：（按姓氏笔画顺序排列）

丁晓强	万 钢	马卫民	马在田	马秋武	马建新
王 磊	王占山	王华忠	王国建	王洪伟	王雪峰
尤建新	甘礼华	左曙光	石来德	卢永毅	田 阳
白云霞	冯 俊	吕西林	朱合华	朱经浩	任 杰
任 浩	刘 春	刘玉擎	刘滨谊	闫 冰	关侗红
江景波	孙立军	孙继涛	严国泰	严海东	苏 强
李 杰	李 斌	李风亭	李光耀	李宏强	李国正
李国强	李前裕	李振宇	李爱平	李理光	李新贵
李德华	杨 敏	杨东援	杨守业	杨晓光	肖汝诚
吴广明	吴长福	吴庆生	吴志强	吴承照	何品晶
何敏娟	何清华	汪世龙	汪光焘	沈明荣	宋小冬
张 旭	张亚雷	张庆贺	陈 鸿	陈小鸿	陈义汉
陈飞翔	陈以一	陈世鸣	陈艾荣	陈伟忠	陈志华
邵嘉裕	苗夺谦	林建平	周 苏	周 琪	郑军华
郑时龄	赵 民	赵由才	荆志成	钟再敏	施 骞
施卫星	施建刚	施惠生	祝 建	姚 熹	姚连璧

袁万城	莫天伟	夏四清	顾 明	顾祥林	钱梦騄
徐 政	徐 鉴	徐立鸿	徐亚伟	凌建明	高乃云
郭忠印	唐子来	閻耀保	黄一如	黄宏伟	黄茂松
戚正武	彭正龙	葛耀君	董德存	蒋昌俊	韩传峰
童小华	曾国荪	楼梦麟	路秉杰	蔡永洁	蔡克峰
薛 雷	霍佳震				

秘书组成员：谢永生 赵泽毓 熊磊丽 胡晗欣 卢元姗 蒋卓文

总序

在同济大学 110 周年华诞之际，喜闻“同济博士论丛”将正式出版发行，倍感欣慰。记得在 100 周年校庆时，我曾以《百年同济，大学对社会的承诺》为题作了演讲，如今看到付梓的“同济博士论丛”，我想这就是大学对社会承诺的一种体现。这 110 部学术著作不仅包含了同济大学近 10 年 100 多位优秀博士研究生的学术科研成果，也展现了同济大学围绕国家战略开展学科建设、发展自我特色，向建设世界一流大学的目标迈出的坚实步伐。

坐落于东海之滨的同济大学，历经 110 年历史风云，承古续今、汇聚东西，秉持“与祖国同行、以科教济世”的理念，发扬自强不息、追求卓越的精神，在复兴中华的征程中同舟共济、砥砺前行，谱写了一幅幅辉煌壮美的篇章。创校至今，同济大学培养了数十万工作在祖国各条战线上的人才，包括人们常提到的贝时璋、李国豪、裘法祖、吴孟超等一批著名教授。正是这些专家学者培养了一代又一代的博士研究生，薪火相传，将同济大学的科学研究和学科建设一步步推向高峰。

大学有其社会责任，她的社会责任就是融入国家的创新体系之中，成为国家创新战略的实践者。党的十八大以来，以习近平同志为核心的党中央高度重视科技创新，对实施创新驱动发展战略作出系列重大决策部署。党的十八届五中全会把创新发展作为五大发展理念之首，强调创新是引领发展的第一动力，要求充分发挥科技创新在全面创新中的引领作用。要把创新驱动发展作为国家的优先战略，以科技创新为核心带动全面创新，以体制机制改

革激发创新活力,以高效率的创新体系支撑高水平的创新型国家建设。作为人才培养和科技创新的重要平台,大学是国家创新体系的重要组成部分。同济大学理当围绕国家战略目标的实现,作出更大的贡献。

大学的根本任务是培养人才,同济大学走出了一条特色鲜明的道路。无论是本科教育、研究生教育,还是这些年摸索总结出的导师制、人才培养特区,“卓越人才培养”的做法取得了很好的成绩。聚焦创新驱动转型发展战略,同济大学推进科研管理体系改革和重大科研基地平台建设。以贯穿人才培养全过程的一流创新创业教育助力创新驱动发展战略,实现创新创业教育的全覆盖,培养具有一流创新力、组织力和行动力的卓越人才。“同济博士论丛”的出版不仅是对同济大学人才培养成果的集中展示,更将进一步推动同济大学围绕国家战略开展学科建设、发展自我特色、明确大学定位、培养创新人才。

面对新形势、新任务、新挑战,我们必须增强忧患意识,扎根中国大地,朝着建设世界一流大学的目标,深化改革,勠力前行!

万 钢

2017年5月

论丛前言

承古续今,汇聚东西,百年同济秉持“与祖国同行、以科教济世”的理念,注重人才培养、科学研究、社会服务、文化传承创新和国际合作交流,自强不息,追求卓越。特别是近20年来,同济大学坚持把论文写在祖国的大地上,各学科都培养了一大批博士优秀人才,发表了数以千计的学术研究论文。这些论文不但反映了同济大学培养人才能力和学术研究的水平,而且也促进了学科的发展和国家的建设。多年来,我一直希望能有机会将我们同济大学的优秀博士论文集中整理,分类出版,让更多的读者获得分享。值此同济大学110周年校庆之际,在学校的支持下,“同济博士论丛”得以顺利出版。

“同济博士论丛”的出版组织工作启动于2016年9月,计划在同济大学110周年校庆之际出版110部同济大学的优秀博士论文。我们在数千篇博士论文中,聚焦于2005—2016年十多年间的优秀博士学位论文430余篇,经各院系征询,导师和博士积极响应并同意,遴选出近170篇,涵盖了同济的大部分学科:土木工程、城乡规划学(含建筑、风景园林)、海洋科学、交通运输工程、车辆工程、环境科学与工程、数学、材料工程、测绘科学与工程、机械工程、计算机科学与技术、医学、工程管理、哲学等。作为“同济博士论丛”出版工程的开端,在校庆之际首批集中出版110余部,其余也将陆续出版。

博士学位论文是反映博士研究生培养质量的重要方面。同济大学一直将立德树人作为根本任务,把培养高素质人才摆在首位,认真探索全面提高博士研究生质量的有效途径和机制。因此,“同济博士论丛”的出版集中展示同济大

学博士研究生培养与科研成果,体现对同济大学学术文化的传承。

“同济博士论丛”作为重要的科研文献资源,系统、全面、具体地反映了同济大学各学科专业前沿领域的科研成果和发展状况。它的出版是扩大传播同济科研成果和学术影响力的重要途径。博士论文的研究对象中不少是“国家自然科学基金”等科研基金资助的项目,具有明确的创新性和学术性,具有极高的学术价值,对我国的经济、文化、社会发展具有一定的理论和实践指导意义。

“同济博士论丛”的出版,将会调动同济广大科研人员的积极性,促进多学科学术交流、加速人才的发掘和人才的成长,有助于提高同济在国内外的竞争力,为实现同济大学扎根中国大地,建设世界一流大学的目标愿景做好基础性工作。

虽然同济已经发展成为一所特色鲜明、具有国际影响力的综合性、研究型大学,但与世界一流大学之间仍然存在着一定差距。“同济博士论丛”所反映的学术水平需要不断提高,同时在很短的时间内编辑出版 110 余部著作,必然存在一些不足之处,恳请广大学者,特别是有关专家提出批评,为提高同济人才培养质量和同济的学科建设提供宝贵意见。

最后感谢研究生院、出版社以及各院系的协作与支持。希望“同济博士论丛”能持续出版,并借助新媒体以电子书、知识库等多种方式呈现,以期成为展现同济学术成果、服务社会的一个可持续的出版品牌。为继续扎根中国大地,培育卓越英才,建设世界一流大学服务。

伍 江

2017 年 5 月

前言

由于符号矩阵理论在经济学中有着重要的应用背景,从而引起了经济学家、数学家及计算机理论专家的广泛关注. 1995 年, R. A. Brualdi 与 B. L. Shader 的关于符号矩阵论的专著 *Matrices of Sign-solvable Linear Systems*^[14] 的问世极大地推动了符号矩阵理论的发展, 它全面系统地总结了在符号矩阵理论方面的研究成果, 同时给出了许多新的结论, 从而使符号矩阵理论成为组合数学的一个新兴的研究热点.

本书的研究主要分四个方面: 一是全幂符号唯一矩阵的性质及其与 powerful 矩阵的等价性的研究; 二是复符号模式矩阵与复 ray 模式矩阵的行列式值域方面的研究; 三是将实 S^2NS 阵的研究推广到 ray S^2NS 阵; 四是研究广义逆符号唯一阵的性质及 R. A. Brualdi 和 B. L. Shader 所提的公开问题.

目 录

总序

论丛前言

前言

第 1 章 绪论	1
研究背景及问题	1
第 2 章 全幂符号唯一阵	6
2.1 引言	6
2.2 全幂符号唯一阵与 powerful 矩阵的等价性	9
第 3 章 复符号模式矩阵与复 ray 模式矩阵	18
3.1 引言	18
3.2 记号与预备知识	20
3.3 问题 1 的解决	22
3.4 非异复方阵的行列式值域	31
3.5 一般情形下的行列式的值域 C_A	34

3.6	行列式值域 R_A 的一些性质	37
第 4 章	$\text{ray } S^2NS$ 阵	41
4.1	预备知识	41
4.2	$\text{ray } S^2NS$ 阵与其图论特征刻画	43
4.3	SNS 阵、 S^2NS 阵与 DRU 阵、 $\text{ray } S^2NS$ 阵的关系	47
第 5 章	广义逆符号唯一矩阵	52
5.1	引言	52
5.2	预备知识	56
5.3	$k = 2$ 的情形	64
5.4	$k = n$ 的情形	71
参考文献		76
索引		80
后记		83

第 1 章

绪 论

研究背景及问题

符号矩阵理论是组合矩阵论的一个新兴研究分支,是近年来在组合数学中较为活跃的一个研究方向.该理论研究主要是矩阵的仅与其符号模式有关的定性性质.符号矩阵理论最早起源于经济学中对某些问题的定性性质的研究.其开创性工作是由诺贝尔奖获得者、经济学家 P. Samuelson 作出的^[33].事实上,经济学家们长期确信并希望^[23]:经济学中有许多理论及(感性)命题可以用定性的方式来表达.即采用某种形式使得其中的某些参数的变化率方向可以仅通过该系统中其他相关参数的变化率方向预测出来.这些问题可以用如下的数学模型来表示:

设有 $n+1$ 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha$ 满足如下 n 个关系式:

$$f_i(x_1, \dots, x_n, \alpha) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(其中,诸函数 f_i 的具体表达式可能不知道).若我们知道函数 f_i 相对于诸变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 及 α 的变化率的方向,问能否由此确定诸 x_i 相对于 α 的变化率的方向?

在考虑该问题的解法之前,我们先介绍一些基本的概念.

一个实数 a 的符号 $\operatorname{sgn}(a)$ 定义为

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & a > 0; \\ -1 & a < 0; \\ 0 & a = 0. \end{cases}$$

若 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 为实矩阵,则称符号矩阵 $(\operatorname{sgn}(a_{ij}))_{m \times n}$ 为 A 的符号模式,记为 $\operatorname{sgn}(A)$. 我们将所有与 A 具有相同符号模式的实矩阵所构成的集合称为 A 的定性矩阵类,记为 $Q(A)$,即 $Q(A) = \{B \mid \operatorname{sgn}(B) = \operatorname{sgn}(A)\}$.

定义 1.1.1^[14] 称一个线性方程组 $Ax = b$ 为符号可解,若它满足以下两个条件:

(1) 对任意 $A_1 \in Q(A)$ 及 $b_1 \in Q(b)$,方程组 $A_1x = b_1$ 均可解;

(2) 对任意 $A_1, A_2 \in Q(A)$ 及 $b_1, b_2 \in Q(b)$,若 x_1, x_2 满足 $A_1x = b_1$, $A_2x = b_2$,则必有 $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} x_2$.

则方程组 $Ax = b$ 的有解性以及解的符号模式均由 A 和 b 的符号模式所唯一确定.

现在,我们考虑前面数学模型中所提问题的解法. 首先对上述 n 个关系式取偏导数后可得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \alpha} \end{pmatrix},$$

简记上式为 $Ax = b$. 注意到“相对变化率的方向”即为相应的偏导数的符号,故原问题可转化为下面的问题: 能否用 A 和 b 的符号模式唯一确定解

x 的符号模式? 也即方程组是否是符号可解?

由于此问题的已知条件和所求者都是一些量之间的相对变化率的方向而不是大小,因此,经济学家们称此类问题为定性问题. 由于此类问题在经济学领域的普遍性和重要性^[17],对此类问题的研究一直为经济学家所关注,但进展缓慢. 后来,随着数学家和计算机学家的介入,情况出现转机. K. Lancaster, W. M. Gorman 等学者对经济学中的定性问题进行了较为深入的研究^[19,23-25,30]. 1968 年, L. Bassett, J. Maybee 及 J. Quick 在文献[6]中首次引入了符号非异矩阵(SNS 阵)的概念,并将其应用到线性方程组的符号可解问题的研究中. SNS 阵还与符号矩阵理论中的另一个研究内容——S 阵有着密切的关系. 现在对 SNS 阵的研究已相当透彻,已有大量的关于这方面的结果^[13,22,35,39,40,47,48]. 人们还深入研究了一类特殊的 SNS 阵—— S^2NS 阵^[7,9,12,15,21,29,35,39,40,47,48]. 1995 年, B. L. Shader 在文献[34]中研究最小二乘符号可解方程组时,引入了广义逆符号唯一阵的概念. 它与 S^2NS 阵、最小二乘符号可解方程组有着密切的关系,是 S^2NS 阵概念的推广. 关于广义逆符号唯一阵的研究也已有较多的结果^[42,34,37,5,41,38].

矩阵的幂序列一直是组合矩阵论中的一个重要研究内容^[1-4,11,20], 1994 年, Z. Li 和 C. Eschenbach 在文献[27]中首次将对矩阵的幂序列的研究引入到符号矩阵理论之中. 他们引入 powerful 矩阵的概念,研究了 powerful 矩阵的周期与基指数,还给出了一个不可约符号矩阵为 powerful 矩阵的特征刻画. 2001 年, Z. Li 和 F. Hall 等在文献[28]中进一步将 powerful 矩阵推广到 ray powerful 矩阵. 另外, J. Stuart 等在文献[43,44,45,46]中研究了另一个与矩阵幂序列相关的问题: 即 k -幂等矩阵. 在本书第 2 章中,我们研究了全幂符号唯一阵,其与 powerful 阵有着密切的关系. 我们知道,一个 powerful 阵一定为全幂符号唯一阵,而我们也找到这样的矩阵: 它是 d -幂符号唯一阵,但不是 d -powerful 矩阵. 那么,人们就可自然地提出下面的问题:

问题 1 一个全幂符号唯一阵是否也是 powerful 阵呢?

Z. Li 和 C. Eschenbach 在他们的论文中并没有提及这个相当基本而又重要的问题. 此问题的解决可使我们对 powerful 矩阵及全幂符号唯一阵取得更本质的认识. 我们通过引入违规圈对的概念, 研究了极小非 powerful 带号有向图(MNPG)的性质, 使用组合、代数、图论、数论相结合的方法证明了一个实方阵是全幂符号唯一阵当且仅当它是 powerful 矩阵.

近年来, 符号矩阵理论的研究有着从实数域向复数域推广的趋势. 1997 年, J. J. McDonald 等人在文献[31]中将符号模式矩阵的概念推广到 ray 模式矩阵, 并研究了 ray 模式矩阵的 ray 非奇异性及 ray 模式矩阵类的行列式值域的问题. 1998 年, Eschenbach 等在文献[16]从另一个方面对符号模式矩阵的概念做了推广, 即所谓的“复符号模式矩阵”. 他们研究了复符号模式矩阵的非奇异性及复符号模式矩阵的行列式值域的问题并提出了下面两个公开问题:

问题 2 若 A 是复符号非异阵, 则它的复符号模式矩阵类的行列式值域 C_A 的边界是否总在复平面中的轴上?

问题 3 确定出全体 n 阶复方阵的所有可能的行列式值域 C_A .

在本书第 3 章中, 我们研究了 ray 模式矩阵与复符号模式矩阵的行列式值域的性质, 证明了问题 2 不但在 A 是复符号非异阵时其答案是肯定的而且当 A 是任意的复矩阵时其答案也是肯定的. 此外, 我们还证明了除了 C_A 被包含于一条过原点的直线中的情况外, C_A 的所有非零边界点均不在 C_A 中, 从而 $C_A \setminus \{0\}$ 是一个开集. 对于问题 3, 我们证明了复符号非异的方阵 A 的所有可能的行列式值域 C_A 恰有 21 个, 并且将这全部 21 个区域都具体地列了出来. 同时, 我们还给出了 ray-非异复方阵 A 的所有可能的行列式值域 R_A . 对于一般的复方阵 A , 我们证明了至少有 29 个可能的行列式值域 C_A . 我们列出了所有这 29 个可能的行列式值域 C_A , 并猜想对于一般的复方阵 A , 这 29 个可能的行列式值域就是所有可能的 C_A .