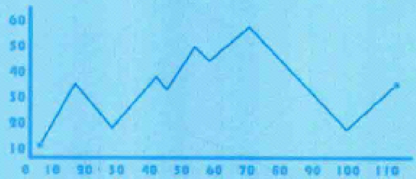
中学名校名师复习指导丛书



高中数学系统复习与训练 理科

Gaozhong Shuxue Xitong Fuxi yu Xunlian

主　编　黄玩波　孙名坚
副主编　黄文凤

知识归纳　习题巩固

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

中学名校名师复习指导丛书

高中数学系统复习与训练 理科

主　编　黄玩波　孙名坚
副主编　黄文凤

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS
·广州·

内容简介

本书以科学、直观、简明的框图网络结构形式介绍高中数学主要内容、主干知识点、各部分之间的内在联系，使知识系统化，便于学生感知知识体系，让学生明确新课程高考在本部分命题的特点，掌握更好的学习方法，把握复习要领，预测高考命题趋势，同时也为老师、学生提出复习备考的建议和策略.

图书在版编目（CIP）数据

高中数学系统复习与训练. 理科/黄玩波，孙名坚主编. —广州：华南理工大学出版社，2015. 8
ISBN 978-7-5623-4710-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①黄…②孙… Ⅲ. ①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 180665 号

高中数学系统复习与训练. 理科
黄玩波 孙名坚 主编

出 版 人：韩中伟
出版发行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
http：//www. scutpress. com. cn E-mail：scutc13@ scut. edu. cn
营销部电话：020-87113487 87111048（传真）
策划编辑：黄冰莹
责任编辑：黄冰莹
印 刷 者：佛山市浩文彩色印刷有限公司
开 本：890mm×1240mm 1/16 印张：15. 25 字数：528 千
版 次：2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷
定 价：39. 90 元

编 委 会

前　言

新课标下高考在不断地变革，近几年广东省高考数学科试题充分体现了新课标理念，具有“试题新颖，难度略降，紧扣考标，考查能力”的特点。2016 年高考回归全国卷考试，如何在新课标高考的备考中准确把握新课程理念，如何科学、高效地进行高考总复习，特别是如何摆脱广东卷结构的思维定势，准确把握全国卷的特点，科学、高效做好高考复习备考工作，让考生明确全国卷的特点，把握复习要领，预测高考命题趋势，提高复习效率，这是高中毕业班师生十分关注的问题。经过几年的实践，编者在给学生高考的复习过程中，在边试验边改进的基础上编写修订，广泛收集各位一线教师的实践意见，进行了精心的编撰。在成书过程中，编委们认真负责，题题推敲，层层把关，力求编写出一套符合新课标又有实效性的优秀教辅资料。

全书共有十章，每章分若干节。本书有如下特色：

一、每章开头都有两个栏目

“知识网络结构”以科学、直观、简明的框图网络结构形式介绍本章主要内容、主干知识点、各部分之间的内在联系，目的是引导学生整体掌握该部分的知识结构，把握知识发生的基本脉络，使知识系统化，便于学生感知知识体系。

“复习导航方略”让考生明确新课程高考在本部分命题的特点，掌握复习方法，把握复习要领，预测高考命题趋势，为老师、学生提出复习备考的建议和策略，提高复习效率。

二、每章各节内容层次分明

“知识要点梳理”对本部分内容的基本概念、基本方法、公式、定理、基本规律以及基本方法逐一梳理，并多以填空形式出现，由学生课前自主填写，进行回顾和总结，自主构建本节课的知识体系，达到让学生夯实基础的目的。

“典例互动探究”选用有代表性的典型例题和相应的拓展探究题，通过教师对例题解题思路分析、点拨、学生自主解答等环节达到知识的综合运用、形成技能技巧、领会思想方法、提升学习能力和思维品质。

“题型自主训练”是在每一部分内容讲授完后，安排一定量的自主训练题目，是为加深巩固每一节的内容而精心设计的。根据本节内容的需求配置适量的习题，可作为学生的课后练习和自测使用。所选题目注重目的性、基础性，主要目的是引导学生落实基础知识和基本方法，以解决问题的形式进行知识巩固。

“易错纠正实录”通过积累学生平时出现的常见错误进行分类讲解，除了再现学生的错误解答外，还给出了正确解答和教师点评，查错纠错，提高复习效率。

“思想方法提炼”对本节内容的重点知识、解题方法进行归纳、提炼，引导学生在思考中感悟，把知识技能、解题技巧与策略进行内化，进一步提升解题能力，掌握解题通法和规律，逐步形成数学思想。

本书编写的宗旨在于强调在课堂教学中要贯彻“先练后讲，先反思后小结”的原则。让学生在自主学习中探究，在质疑中获取，在认知冲突中反思，在实践活动中提升。本书同时也关注学生的创新能力，使学生感受成功的喜悦。

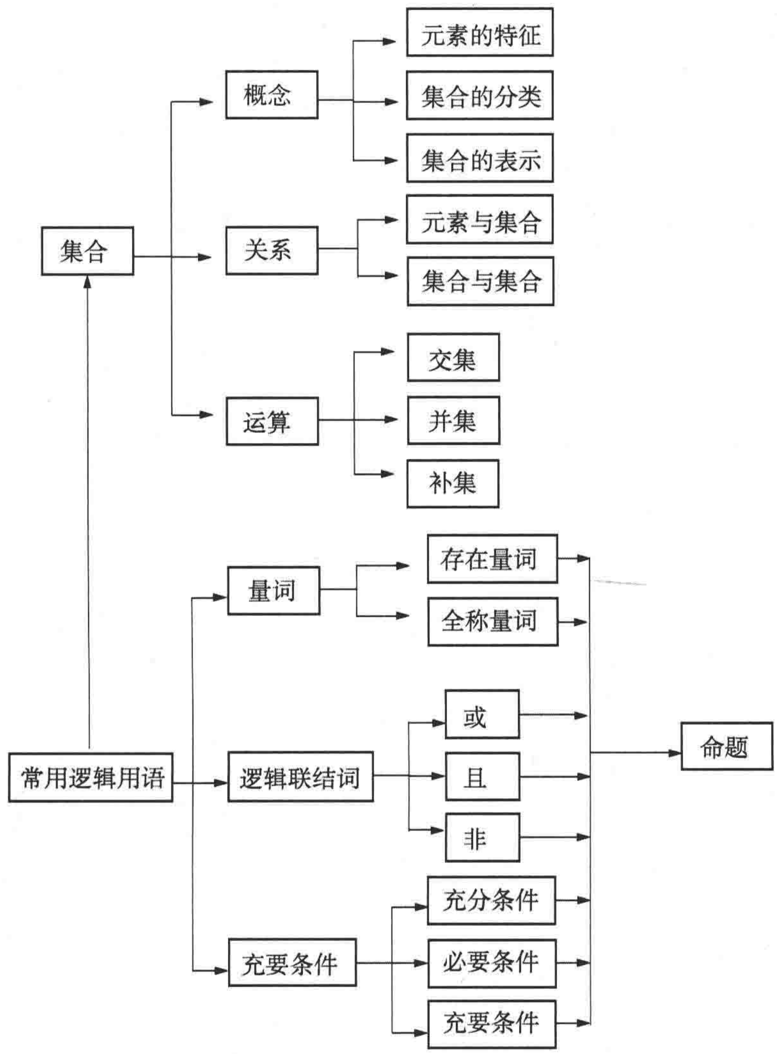
编　者

2015 年 5 月

目 录

第一章　集合、简易逻辑、有关方程与不等式的解

知识网络结构



复习导航方略

本部分内容是高中数学的基本内容之一．集合论是现代数学的基础，是传统的知识内容，而常用逻辑用语中全称量词与存在量词则是新课标新增的内容．

集合是高考热点之一，主要考查两个方面：一是对集合基本概念的认识和理解，如集合的表示法、元素与集合的关系、集合与集合的关系、集合的运算；二是以集合知识为载体考查其他知识，如用不等式和不等式组的解集语言对相关问题进行表述，在考查集合知识的同时突出考查准确使用数学语言的能力和用数形结合的思想解决问题的能力，尤其是利用文氏图和数轴表示集合的关系和进行集合的运算．

常用逻辑用语包含命题与量词，逻辑联结词以及充分条件、必要条件、充要条件与命题的四种形式，高考仍以基本概念为考查对象，一般是将其融入具体的数学问题之中，在知识的交汇处命题．复习时要抓住所学的几个知识点，通过解决一些简单的问题达到理解、掌握常用逻辑知识的目的．

在复习中，要注意下面几个问题：

（1）把握集合中元素的三个特征．在解题过程中互异性最容易被疏忽，对于集合中的元素含参数的集合问题对所得结果要加以检验；

（2）研究集合时，要注意集合中代表元素的性质，明确集合的意义；

（3）进行集合的交、并、补运算时不要忘记集合本身和空集的特殊情况，不要忘记借助数轴和文氏图

进行求解；

（4）注意否命题与命题的否定的区别；全称命题与特称命题的否定；

（5）区分数学中的逻辑联结词“或”与生活语言中的“或”的含义的不同（“A 或 B 发生”在数学中的含义有三种情形：只有 A 发生、只有 B 发生、A 与 B 同时发生）；

（6）重视数学思想方法的运用，体现的主要数学思想有数形结合思想、逻辑划分思想、等价转化思想. 理解反证法的理论依据.

第一节　集　合

【知识要点梳理】

一、集合及相关的概念

1. 集合概念

（1）含义：某些指定的对象集在一起成为集合.

（2）集合中的元素：集合中的对象称集合的元素，若 a 是集合 A 的元素，记作______；若 b 不是集合 A 的元素，记作________.

2. 集合元素的特征：________________、________________、________________.

（1）确定性：设 A 是一个给定的集合，x 是某一个具体对象，则或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况必有一种且只有一种成立.

（2）互异性：一个给定集合中的元素，指属于这个集合的互不相同的个体（对象），因此，同一集合中不应重复出现同一元素.

（3）无序性：集合中不同的元素之间没有地位差异，集合不同，与元素的排列顺序无关.

3. 集合的常用表示法

（1）表示一个集合可用列举法、描述法或图示法（文氏图）.

列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内；描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号 $\{\}$ 内.

具体方法为：在大括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值（或变化）范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

（**注意**：列举法与描述法各有优点，应该根据具体问题确定采用哪种表示法，一般集合中元素较多或有无限个元素时，不宜采用列举法.）

（2）常用数集及其记法.

非负整数集（或自然数集）记作__________；正整数集记作__________；整数集记作________；有理数集记作________；无理数集记作________；实数集记作________；复数集记作________.

二、集合与集合的关系

1. 包含关系（子集）

集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的________（或 B 包含 A），记作__________.（若 $A\subseteq B$，则 A 成立是 B 成立的充分条件）

2. 相等关系

两个集合相等：构成两个集合的元素完全一样. 若_______且_______，则称 A 等于 B，记作 $A=B$；（若 $A=B$，则 A 成立是 B 成立_________的条件），若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作_________.（若 $A\subsetneqq B$，则 A 成立是 B 成立的__________条件）

3. 全集与补集

（1）包含了我们所要研究的各个集合的全部元素的集合称为全集，记作 U；

（2）若 S 是一个集合，$A\subseteq S$，则 $\complement_S A=$________________称 S 中子集 A 的补集.

4. 交集与并集

（1）一般地，由属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的______. 交集 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

（2）一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，称为集合 A 与 B 的________. 并集 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

（**注意**：求集合的并、交、补是集合间的基本运算，运算结果仍然还是集合，区分交集与并集的关键是“且”与“或”，在处理有关交集与并集的问题时，常常从这两个字眼出发去揭示、挖掘题设条件，结合 Venn 图或数轴进而用集合语言表达，增强数形结合的思想方法.）

三、集合的简单性质

①$A\subseteq A$；②$\varnothing\subseteq A$；③若$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$；④若集合A是n个元素的集合，则集合A有______个子集（其中有______个真子集，有______个非空真子集）；⑤$\complement_S(\complement_S A)$ = ______；⑥$\complement_S S$ = ________，$\complement_S\varnothing$ = ________；⑦$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$；⑧$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$；⑨ $(A\cap B)\subseteq(A\cup B)$；⑩$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$；$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$；⑪$\complement_S(A\cap B)=(\complement_S A)\cup(\complement_S B)$，$\complement_S(A\cup B)=(\complement_S A)\cap(C_S B)$；⑫用 card (A) 表示有限集A的元素个数，则对任意两个有限集A、B，有 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$.

四、集合中的数学思想

1. 补集思想

当解决一个问题，正面考虑很困难时，我们可根据补集的思想，先考虑问题的对立面，只要把对立面找到了，那么正面问题也就解决了.

2. 等价转化思想

在解集合问题时，当一种集合的表达式不好入手时，可将其先转化为另一种形式，比如，将$A\cap B=B$或$A\cup B=A$转化为$B\subseteq A$，将$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$转化为$\complement_U(A\cap B)$，将$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$转化为$\complement_U(A\cup B)$等，将$A=B$转化为$A\subseteq B$且$B\supseteq A$.

3. 分类讨论思想

解答集合问题时常常遇到这样的情况：解题过程中，解到某一步时，不能再以统一的方法、统一的形式继续进行，因为这时被研究的数学对象已包含了多种可能的情形，必须选定一个标准，根据这个标准划分成几个能用不同形式去解决的小问题，将这些小问题一一加以解决，从而使问题得到解决，这就是分类讨论的思想方法.

4. 开放思想

开放型问题是相对于中学课本中有明确条件和结论的封闭型问题而言的. 这类问题的知识覆盖面大，综合性较强，灵活选择方法的要求较高，再加上题意新颖、构思精巧，具有相当的深度和难度. 集合中的开放型问题大多是结论不定性开放型问题.

【典例互动探究】

题型一：集合的概念及表示

例 1　用列举法表示下列集合：

(1) $\{x\mid x=|x|,\ x\in\mathbf{N},\ x<5\}$

(2) $\{x\mid(2x-1)(x+2)(x^2+1)=0,\ x\in\mathbf{Z}\}$

(3) $\{(x,\ y)\mid x+y=6,\ x\in\mathbf{N}^*,\ y\in\mathbf{N}^*\}$

(4) $\left\{x\mid x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b},\ a,\ b\neq0\right\}$

(5) $\left\{x\mid\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{Z},\ x\in\mathbf{N}^*\right\}$

思路分析与点评

题目用描述法表示集合，对其元素的属性要准确理解. 把握好数学语言、集合符号的内涵. 如第 (4) 小题，关键是根据绝对值的意义化简该表达式，再用列举法准确写出该集合，而第 (5) 小题，关键是应用元素x满足的条件$\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{Z}$，且$x\in\mathbf{N}^*$，得到$x$的值.

列举法一般用于有限集，元素之间有明显规律的无限集亦可用列举法（如自然数集），具有直观的优点，但不足之处就是当元素个数较多时，表示就比较繁琐. 描述法，一般用于只知元素的性质的集合，便于看出集合中元素所具有的共同性质.

题型二：集合的运算及应用

例 2　已知集合$A=\{-4,\ 2a-1,\ a^2\}$，$B=\{a-5,\ 1-a,\ 9\}$，若$9\in(A\cap B)$，则实数a的值为________.

思路分析与点评

本题考查含字母参数的集合中公共元素的理解与应用，要准确理解："$9\in(A\cap B)$"与"$A\cap B=\{9\}$"的区别，前者只表示两个集合都含有元素9，后者表示两集合的公共元素就是9. 题设条件虽然不同，但解题思路完全一样，都是先把公共元素9代入，求出可能值，再检验. 求值问题就是列方程（组），利用集合的关系列等式时要注意集合的无序性，不能按位置对应相等，还要注意对集合互异性的检验. "$A\cap B=\{9\}$"表示两个集合只有一个公共元素9. 解题时注意这个区别，就能在检验字母参数的可能取值时体现它们的不同.

题型三：集合的综合应用

例3　已知集合 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x>0,\ x\in\mathbf{R}\}$，$A\cap B=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

思路分析与点评

正确理解题目的条件 $A\cap B=\varnothing$ 是解题的关键，包含两层意思：①A 可能是空集；②A 中元素不是正数. 而集合 A 是由方程的根组成的，则求解时分为方程无实根、有非正数根两种情况，利用韦达定理确定参数的取值范围.

【题型自主训练】

1. 已知集合 $P=\{y=x^2+1\}$，$Q=\{y\mid y=x^2+1\}$，$E=\{x\mid y=x^2+1\}$，$F=\{(x,\ y)\mid y=x^2+1\}$，$G=\{x\mid x\geqslant 1\}$，则（　　）.

A. $P=F$　　B. $Q=E$　　C. $E=F$　　D. $Q=G$

2. 数集 $\{1,\ 2,\ x^2-3\}$ 中的 x 不能取的数值的集合是（　　）.

A. $\{2,\ \sqrt{5}\}$　　B. $\{-2,\ -\sqrt{5}\}$　　C. $\{\pm 2,\ \pm\sqrt{5}\}$　　D. $\{2,\ -\sqrt{5}\}$

3. 集合 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant 0,\ x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid 2x^2-x-6>0,\ x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B$ 的非空真子集的个数为（　　）.

A. 16　　B. 14　　C. 15　　D. 32

4. 已知 $M=\{x\mid x=3k,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=3k+1,\ k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x\mid x=3k-1,\ k\in\mathbf{Z}\}$，若 $a\in M$，$b\in P$，$c\in Q$，则 $a+b-c\in$（　　）.

A. M　　B. P　　C. Q　　D. $M\cup P$

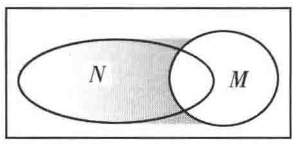
5. 已知集合 $A=\{x\mid x<a\}$，$B=\{x\mid 1\leqslant x<2\}$，且 $A\cup(\complement_R B)=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $a\leqslant 1$　　B. $a<1$　　C. $a\geqslant 2$　　D. $a>2$

6. 设全集 R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x\mid f(x)\neq 0\}$，$N=\{x\mid g(x)\neq 0\}$，那么集合 $\{x\mid f(x)g(x)=0\}$ 等于（　　）.

A. $\complement_R M\cap\complement_R N$　　B. $\complement_R M\cup N$　　B. $\complement_R N\cup M$　　B. $\complement_R(M\cap N)$

7. 设全集 I 是实数集 $\mathbf{R}$，$M=\{x\mid x^2>4\}$ 与 $N=\{x\mid \frac{2}{x-1}\geqslant 1\}$ 都是 I 的子集（如右图所示），则阴影部分所表示的集合为（　　）.



A. $\{x\mid x<2\}$　　B. $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$

C. $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$

8. 若集合 A_1、A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$，则称（A_1，A_2）为集合 A 的一个拆分，并规定：仅当 $A_1=A_2$ 时，（A_1，A_2）与（A_2，A_1）为集合 A 的同一种拆分，则集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ 的不同拆分的种数为（　　）.

A. 8　　B. 9　　C. 26　　D. 27

9. 设 S 是整数集 $\mathbf{Z}$ 的非空子集，如果 $\forall a,\ b\in S$，有 $ab\in S$，则称 S 关于数的乘法是封闭的. 若 T，V 是 $\mathbf{Z}$ 的两个不相交的非空子集，$T\cup V=\mathbf{Z}$，且 $\forall a,\ b,\ c\in T$，有 $abc\in T$；$\forall x,\ y,\ z\in V$，有 $xyz\in V$，则下列结论恒成立的是（　　）.

A. T，V 中至少有一个关于乘法是封闭的　　B. T，V 中至多有一个关于乘法是封闭的

C. T，V 中有且只有一个关于乘法是封闭的　　D. T，V 中每一个关于乘法都是封闭的

10. 设 S 是至少含有两个元素的集合，在 S 上定义了一个二元运算"$*$"（即对任意的 a，$b\in S$，对于有序

元素对（a，b），在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应），若对任意的 a，$b\in S$，有 $a*(b*a)=b$，则对任意的 a，$b\in S$，下列等式中不恒成立的是（　　）.

A. $(a*b)*a=a$　　B. $[a*(b*a)]*(a*b)=a$

C. $b*(b*b)=b$　　D. $(a*b)*[b*(a*b)]=b$

11. 设整数 $n\geqslant4$，集合 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$，令集合 $S=\{(x,y,z)|x,y,z\in X$，且三个条件 $x<y<z$，$y<z<x$，$z<x<y$ 恰有一个成立$\}$，若 (x,y,z) 和 (z,w,x) 都在 S 中，则下列选项正确的是（　　）.

A. $(y,z,w)\in S$，$(x,y,w)\notin S$　　B. $(y,z,w)\in S$，$(x,y,w)\in S$

C. $(y,z,w)\notin S$，$(x,y,w)\in S$　　D. $(y,z,w)\notin S$，$(x,y,w)\in S$

12. 下列集合中，

①$\{(x,y)|x\neq1,y\neq1,x\neq2,y\neq-3\}$；②$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x\neq1\\y\neq1\end{cases}且\begin{cases}x\neq2\\x\neq-3\end{cases}\right.\right\}$

③$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x\neq1\\y\neq1\end{cases}或\begin{cases}x\neq2\\x\neq-3\end{cases}\right.\right\}$；④$\{(x,y)|[(x-1)^2+(y-1)^2]\cdot[(x-2)^2+(y+3)^2]\neq0\}$.

其中不能表示"在直角坐标系 xOy 平面内，除去点（1，1），（2，－3）之外的所有点的集合"的序号有________________.

13. 设集合 $A=\{x|(x-4)(x-a)=0,a\in R\}$，$B=\{x|(x-1)(x-4)=0\}$，

（1）求 $A\cup B$，$A\cap B$；

（2）若 $A\subseteq B$，求实数 a 的值；

（3）若 $a=5$，则 $A\cup B$ 的真子集共有______个，集合 P 满足条件 $(A\cap B)\subsetneqq P\subsetneqq(A\cup B)$，写出所有可能的集合 P.

【易错纠正实录】

实录1　已知集合 $A=\{x|2a+3<x<4a\}$，$B=\{x|1<x<8\}$，且满足 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

学生解答	正确解答
$A\subseteq B\Rightarrow\begin{cases}2a+3\geqslant1\\4a\leqslant8\end{cases}$，$\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant-1\\a\leqslant2\end{cases}$，$\Rightarrow-1\leqslant a\leqslant2$	（1）当 $A=\varnothing$ 时，$A\subseteq B$，此时 $2a+3\geqslant4a\Rightarrow a\leqslant\frac{3}{2}$ （2）当 $A\neq\varnothing$ 时，$A\subseteq B\Rightarrow\begin{cases}2a+3\geqslant1\\4a\leqslant8\\2a+3<4a\end{cases}$，$\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant-1\\a\leqslant2\\a>\frac{3}{2}\end{cases}$ $\Rightarrow\frac{3}{2}<a\leqslant2$ 由（1）、（2）得 $a\leqslant2$

错因剖析，点拨提高：

在求集合的子集时不要忘掉空集的情况，因为空集能够满足题设的要求. 忘记对空集这种情况的讨论是该类问题的常见典型错误.

实录2　设集合 $A=\{(x,y)|y=2x-1,x\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)|y=ax^2-ax+a,x\in\mathbf{N}^*\}$，是否存在非零整数 a，使 $A\cap B\neq\varnothing$？若存在，请求出 a 的值；若不存在，说明理由.

学生解答	正确解答
假设 $A\cap B\neq\varnothing$，则方程组 $\begin{cases}y=2x-1\\y=ax^2-ax+a\end{cases}$ 有正整数解，消去 y，得 $ax^2-(a+2)x+a+1=0$ 由 $\Delta\geqslant0$，有 $(a+2)^2-4a(a+1)\geqslant0$， 解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$， $\because a$ 为非零整数，$\therefore a=\pm1$.	假设 $A\cap B\neq\varnothing$，则方程组 $\begin{cases}y=2x-1\\y=ax^2-ax+a\end{cases}$ 有正整数解，消去 y，得 $ax^2-(a+2)x+a+1=0$ 由 $\Delta\geqslant0$，有 $(a+2)^2-4a(a+1)\geqslant0$， 解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$， $\because a$ 为非零整数，$\therefore a=\pm1$， 当 $a=1$ 时，代入方程，解得 $x=1$ 或 $x=2$，符合题意. 当 $a=-1$ 时，代入方程，解得 $x=0$ 或 $x=-1$，而 $\because x\in\mathbf{N}^*$，$\therefore a\neq-1$. 故存在 $a=1$，使 $a\cap B\neq\varnothing$， 此时 $A\cap B=\{(1,1),(2,3)\}$.

错因剖析，点拨提高：

①对含参数问题的求解，没有把求得的结果代入进行验证是该类问题常见的错误；②对参数进行分类讨论时，要不重不漏.

【思想方法提炼】

（1）要抓住一个重点——集合的表示方法，即抓住集合中元素的性质特征，准确求出集合是解决集合问题的基础.

（2）理清两种不同的关系——元素与集合的关系以及集合与集合之间的关系，搞清“$\in$、$\notin$”与“$\varnothing$、$\subseteq$”的区别.

（3）对于参数的取值范围问题应将全体实数分类全面考虑.

（4）非等价变换一定要将结果代入检验.

（5）解题时，若正面情形较为复杂，可以考虑其反面，再利用其补集，求得其解，这就是“补集思想”.

（6）灵活利用数形结合的方法——利用数轴、韦恩图等进行集合之间的交集、并集、补集的基本运算，应充分借助图形的直观、形象的优势去探究集合的运算关系. 注意以不等式的形式表示的集合运算中，端点值的取舍.

（7）弄清集合中元素所具有的性质，并将集合语言等价转化成其熟悉的数学语言，然后利用相应知识进行求解，是解决集合综合问题的重要思想方法.

第二节　常用逻辑用语

【知识要点梳理】

一、命题

1. 命题：可以判断真假的语句叫命题.
2. 逻辑联结词：“或”“且”“非”这些词就叫做逻辑联结词.
3. 简单命题：不含逻辑联结词的命题.
4. 复合命题：由简单命题与逻辑联结词构成的命题.

常用小写的拉丁字母 p，q，r，s，……表示命题，故复合命题有三种形式：p 或 q；p 且 q；非 p.

二、复合命题的真值

1. “非 p”形式复合命题的真假可以用下表表示

p	非 p
真	假
假	真

2. “p 且 q”形式复合命题的真假可以用下表表示：

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

3. “p 或 q”形式复合命题的真假可以用下表表示：

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

注：①像上面表示命题真假的表叫真值表；②由真值表得：“非 p”形式复合命题的真假与 p 的真假相反；“p 且 q”形式复合命题当 p 与 q 同为真时为真，其他情况为假；“p 或 q”形式复合命题当 p 与 q 同为假时为假，其他情况为真；③真值表是根据简单命题的真假，判断由这些简单命题构成的复合命题的真假，而不涉及简单命题的具体内容.

三、四种命题

（1）如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，且第一个命题的结论是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做__________.

（2）如果一个命题的条件和结论分别是原命题的条件和结论的否定，那么这两个命题叫做__________，这个命题叫做原命题的__________.

（3）如果一个命题的条件和结论分别是原命题的结论和条件的否定，那么这两个命题叫做__________，这个命题叫做原命题的__________.

（4）两个__________命题的真假是相同的，即两个互为逆否命题是等价命题. 若判断一个命题的真假较困难时，可转化为判断其__________的真假.

四、充分条件、必要条件、充要条件

1. 概念：一般地，如果已知 $p\Rightarrow q$，那么就说：p 是 q 的______条件；q 是 p 的________条件.

2. 分类

①充分不必要条件，即 $p\Rightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$；

②必要不充分条件，即 $p\nRightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$；

③既充分又必要条件，即 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$；

④既不充分也不必要条件，即$\nRightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$.

一般地，如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作：$p\Leftrightarrow q$. “$\Leftrightarrow$”叫做等价符号. $p\Leftrightarrow q$ 表示 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$.

这时 p 既是 q 的充分条件，又是 q 的必要条件，则 p 是 q 的________条件，简称______条件.

3. 集合表示

设满足条件 p 的集合记为 P，满足条件 q 的集合记为 Q，则

（1）若 p 是 q 的________条件，则 $P\subseteq Q$ 且 $Q\subseteq P$ 即 $P=Q$.

（2）若 p 是 q 的________条件，则 $P\subseteq Q$ 且 $Q\not\subseteq P$ 即 $P\subsetneqq Q$.

（3）若 p 是 q 的________条件，则 $P\not\subseteq Q$ 且 $Q\subseteq P$ 即 $Q\subsetneqq P$.

（4）若 p 是 q 的________条件，则 $P\not\subseteq Q$ 且 $Q\not\subseteq P$（即 P 与 Q 不互相包含）.

4. 等价关系

条件$\neg p$ 与$\neg q$ 的关系和条件 p 与 q 的关系（运用互为逆否命题的命题真假性一致判断）

（1）若 p 是 q 的充分必要条件等价于$\neg p$ 是$\neg q$ 的________条件.

（2）若 p 是 q 的充分不必要条件等价于$\neg p$ 是$\neg q$ 的________条件.

（3）若 p 是 q 的必要不充分条件等价于$\neg p$ 是$\neg q$ 的__________条件.

（4）若 p 是 q 的既不充分也不必要条件等价于$\neg p$ 是$\neg q$ 的________条件.

5. 判断充分条件、必要条件、充要条件的方法

（1）定义法.

（2）集合法.

（3）等价关系法.

（4）传递法.

五、全称命题与特称命题

短语“所有”在陈述中表示所述事物的全体，逻辑中通常叫做全称量词，并用符号∀表示. 含有全体量词的命题，叫做________.

短语“有一个”或“有些”或“至少有一个”在陈述中表示所述事物的个体或部分，逻辑中通常叫做存在量词，并用符号∃表示，含有存在量词的命题，叫做__________.

六、命题中常见词语的否定

正面词语	等于	大于	小于	是	都是	任意一个
否定词语	不等于	小于或等于	大于或等于	不是	不都是	某一个
正面词语	至多一个	至少一个	至多 n 个	至少 n 个	所有的	
否定词语	至少两个	一个也没有	至少 $n+1$ 个	至多 $n-1$ 个	某些	

七、反证法

1. 反证法的模式

反证法就是证明欲证命题的等价命题——逆否命题. 其模式为：欲证若 p 则 q，等价证 $\neg q$ 则 $\neg p$. 可设 q 不成立，推出 p 不成立或与某已成立的结论矛盾⇒设 q 不成立为错，故 q 成立.（假设原命题不成立，经过正确的推理，最后得出矛盾. 因此，说明假设错误，从而证明了原命题成立，这种证明方法叫反证法.）

2. 反证法证明步骤

（1）假设结论不成立；

（2）从假设出发，经过推理，推出矛盾；

（3）由矛盾判断假设不成立，从而肯定结论.

3. 导出矛盾的几种形式

（1）与定义、定理矛盾；

（2）与已知条件矛盾；

（3）与假设矛盾；

（4）自相矛盾.

4. 反证法适合的题型

（1）命题简洁，但无更多定理、公理等帮助论证；

（2）结论本身以否定形式出现；

（3）结论中含有“至多……”，“至少……”的形式；

（4）关于唯一性、存在性的命题；

（5）结论的反面比原命题更易处理.

【典例互动探究】

题型一：四种命题及应用

例1　写出命题“已知 a、b 为实数，若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集，则 $a^2-4b\geqslant 0$”的逆命题、否命题、逆否命题，并判断其真假.

思路分析与点评：

本题考查了命题间的关系，关键是找出原命题的条件 p 与结论 q，将原命题写出“若 p 则 q”的形式. 注意原命题中有大前提时，在写出它的逆命题、否命题、逆否命题时，应当保留这个大前提.

此类问题中，要准确把握否命题中的关键语句“条件与结论同时否定”. 原命题与其逆否命题互为等价命题，逆命题与否命题互为等价命题，当一个命题的真假不易判断时，可以判断其对应的逆否命题的真假，从而判断出原命题的真假. 有时候运用举反例的方法，说明一个命题不正确也是该类问题中经常用到的方法.

题型二：充分条件与必要条件

例2　已知 $P=\{x\mid x^2-8x-20\leqslant 0\}$，$S=\{x\mid 1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$.

（1）是否存在实数 m，使 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的充要条件，若存在，求出 m 的范围；

（2）是否存在实数 m，使 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，若存在，求出 m 的范围.

思路分析与点评：

推理问题常用“满足”或“包含”的关系进行判断正误，本题利用集合中的包含关系与充要条件之间的关系进行判断，具体解题过程中，要注意利用数轴寻找参数的取值范围是数形结合的基本方法.

在判断命题的条件的充要性时，注意利用集合观点，也可以考虑“正难则反”的原则，即在正面判断较难时，可以转化为应用该命题的逆否命题进行判断. 一个结论成立的充分条件可以不止一个，必要条件也可以不止一个.

题型三：复合命题真假的判定与应用

例3　已知 $c>0$，且 $c\neq 1$，设 p：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；q：函数 $f(x)=x^2-2cx+1$ 在 $\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$ 上为增函数，若“p 且 q”为假，“p 或 q”为真，求实数 c 的取值范围.

思路分析与点评

本题由简单命题和逻辑联结词构成的复合命题的真假可以用真值表来判断，反之根据复合命题的真假也可以判断简单命题的真假，若 p 且 q 真，则 p 真 q 也真；若 p 或 q 真，则 p、q 至少一个真；若 p 且 q 假，则 p、q 至少一个假.

解决这类问题，可按如下步骤实施：

（1）运用相关知识等价化简所给命题 p、q；

（2）由复合命题的真假分析 p、q 的真假关系；

（3）列相应方程（组）或不等式（组）；

（4）得出结论.

【题型自主训练】

1. 已知命题 p：$\frac{1}{4}\leqslant 2^x\leqslant\frac{1}{2}$，命题 q：$x+\frac{1}{x}\in\left[-\frac{5}{2},\ -2\right]$，则 p 是 q 的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

2. “$m=\frac{1}{2}$”是“直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直”的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

3. 已知 a_1，a_2，b_1，b_2 均为非零实数，集合 $A=\{x\mid a_1x+b_1>0\}$，$B=\{x\mid a_2x+b_2>0\}$，则“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$”是“$A=B$”的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

4. 设集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-1}{x+1}<0\right\}$，$B=\{x\mid |x-1|<a\}$，若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5. “$a=1$”是函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为“π”的（　　）.

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件